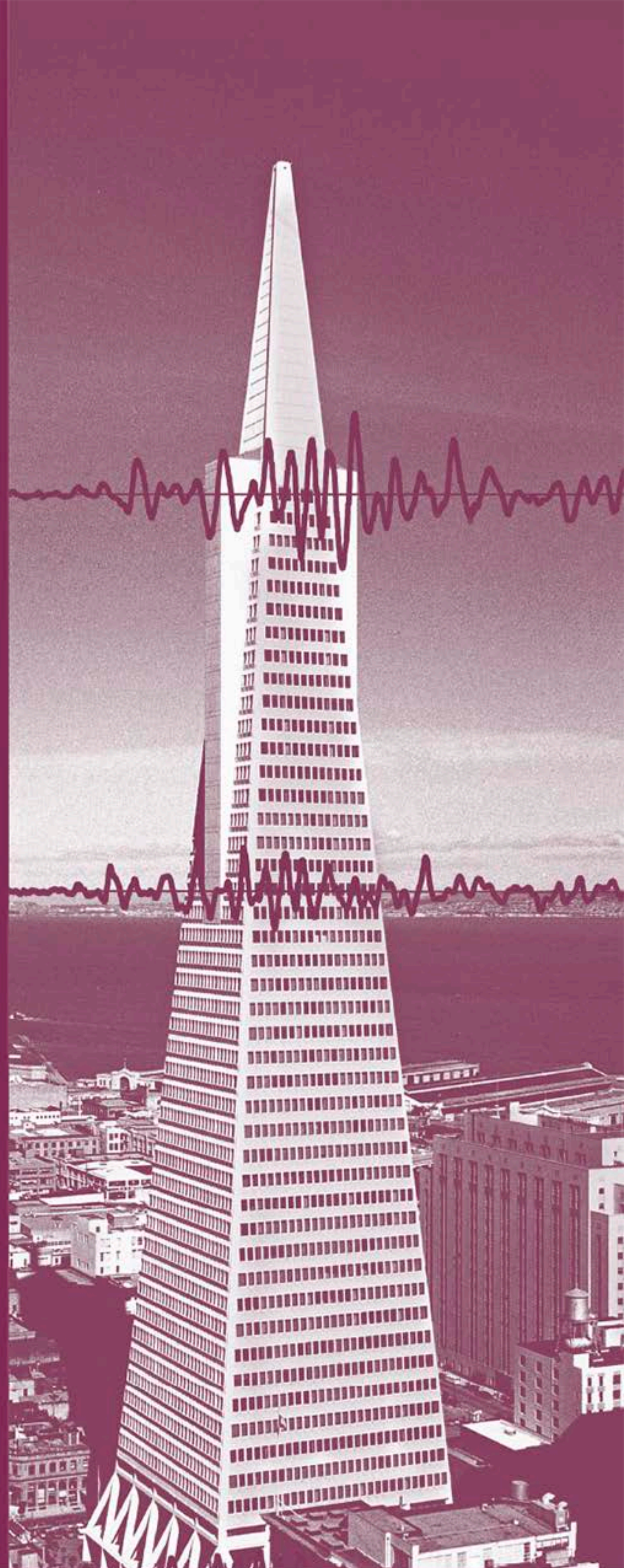
DINÁMICA DE ESTRUCTURAS

CUARTA EDICIÓN



ANIL K. CHOPRA

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Dinámica de estructuras

Dinámica de estructuras

Cuarta edición

Anil K. Chopra
University of California at Berkeley

TRADUCCIÓN
Jesús Elmer Murrieta Murrieta
Maestro en investigación de operaciones
Tecnológico de Monterrey - Campus Morelos

REVISIÓN TÉCNICA
Luciano Roberto Fernández Solá
Consuelo Gómez Soberón
Departamento de Materiales
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

CHOPRA, ANIL K.
Dinámica de estructuras
Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2014

ISBN: 978-607-32-2239-6
Área: Ingeniería

Formato: 18.5 x 23.5 cm Páginas: 752

ISBN 9780132858038

Edición en español
Dirección General: Philip de la Vega
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editor Sponsor: Luis M. Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearson.com
Editor de Desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de Producción: Juan José García Guzmán
Gerencia Editorial Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

CUARTA EDICIÓN, 2014

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-2239-6
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-2240-2
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2241-9

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 16 15 14 13

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

Dedicado a Hamida y Nasreen, con gratitud por sugerirme la idea de trabajar en un libro, y con agradecimiento por soportar pacientemente y compartir estos años de preparación conmigo. Su presencia y aliento hicieron que esta idea se volviera una realidad.

Contenido breve

MATERIAL EN EL SITIO WEB

Contenido

MATERIAL EN EL SITIO WEB

Prólogo

La necesidad de un libro de texto sobre ingeniería sísmica fue planteada por primera vez por el eminente ingeniero consultor, John R. Freeman (1855-1932). Después del sismo de 1925 que causó grandes daños en Santa Bárbara, California, Freeman se interesó en el tema y realizó búsquedas de libros adecuados en la Biblioteca Pública de Boston. Encontró que no sólo no había ningún libro de texto sobre ingeniería sísmica, sino que el tema en sí no se mencionaba en ninguno de los libros de ingeniería estructural. Al revisar al pasado podemos ver que la enseñanza de la ingeniería en 1925 se encontraba en un gran atraso, los cálculos se realizaban usando regla de cálculo y los programas de estudio no preparaban al estudiante para la comprensión de la dinámica estructural. De hecho, no se habían desarrollado instrumentos para el registro de movimientos fuertes del terreno, y la sociedad no parecía estar preocupada por el peligro de los sismos.

En años recientes se han publicado textos sobre ingeniería sísmica y dinámica estructural, pero este libro del profesor Anil K. Chopra llena un nicho existente entre los libros más elementales y los que son para estudios avanzados de posgrado. El autor es un reconocido experto en ingeniería sísmica y dinámica estructural, y su libro será de gran valor para los estudiantes, no sólo en las regiones sísmicas, sino también en otras partes del mundo, dado que el conocimiento de la dinámica estructural es esencial para la ingeniería moderna. El libro presenta material sobre vibraciones y la dinámica de las estructuras, y demuestra su aplicación a los movimientos estructurales causados por los sismos. El material se presenta de una manera muy clara, con numerosos ejemplos ilustrativos resueltos, por lo que incluso estudiantes de alguna universidad donde no se imparta este curso serán capaces de estudiar con el libro a su propio paso. Los lectores que ya practican la ingeniería, con la ayuda de este libro no deben tener ninguna dificultad para estudiar el tema.

Una característica muy interesante del libro es la aplicación de la teoría de la dinámica estructural a los aspectos más importantes en la respuesta sísmica y el diseño de edificios de

varios niveles. La información que se presenta aquí será de gran valor para los ingenieros que participan en el diseño sísmico real y que desean mejorar su comprensión del tema.

Aunque el material del libro conduce a la ingeniería sísmica, la información que se presenta también es relevante para las vibraciones inducidas por el viento sobre las estructuras, así como los movimientos realizados por el hombre, como los producidos por martillos a gravedad o por el tráfico de vehículos pesados. Este texto sobre vibraciones y dinámicas estructurales no tiene competencia, y puede recomendarse a cualquier estudiante serio. Creo que este libro debe ser el que John R. Freeman estaba buscando.

George W. Housner
California Institute of Technology

Prefacio

FILOSOFÍA Y OBJETIVOS

Este libro sobre la dinámica de estructuras está concebido como un texto para cursos de ingeniería civil. Incluye muchos temas teóricos de la dinámica estructural, y aplicaciones de esta teoría al análisis, la respuesta, el diseño y la evaluación de las estructuras en casos de sismo. Se asume un nulo conocimiento de la dinámica estructural con el fin de que resulte adecuado para el lector que estudia el tema por primera vez. La presentación es suficientemente detallada e integrada mediante referencias cruzadas a fin de que sea adecuada para el autoestudio. Esta característica, junto con una selección de temas motivados por la práctica, debe ser atractiva para los ingenieros profesionales, sobre todo para los que están interesados en el análisis y diseño de estructuras en ubicaciones sísmicas.

Al elaborar este libro se ha puesto un énfasis especial en facilitar el aprendizaje de la dinámica estructural a los estudiantes e ingenieros profesionales, ya que puede resultar difícil. Para lograr este objetivo, se ha estructurado la presentación en torno a varias características: las matemáticas se mantienen tan sencillas como el tema lo permite. Los procedimientos analíticos se resumen y se hace hincapié en los pasos clave, facilitando su aplicación por parte del lector. Estos procedimientos se ilustran con más de 120 ejemplos resueltos, muchos de ellos completos y realistas en los que se enfatiza la interpretación física de los resultados. Se han diseñado y ejecutado con detalle alrededor de 500 figuras, de modo que resulten pedagógicamente eficaces; muchas de ellas implican simulaciones completas por computadora de la respuesta dinámica de las estructuras. Se incluyen, asimismo, fotografías de las estructuras y los movimientos estructurales registrados durante los sismos a fin de relacionar la presentación con hechos reales.

La preparación de este libro se inspiró en varios objetivos:

- Relacionar las ideas estructurales estudiadas con las propiedades de las estructuras reales.
- Presentar la teoría de la respuesta dinámica de la estructuras de una manera que destaque la comprensión física de los procedimientos analíticos.
- Ilustrar las aplicaciones de la teoría en la solución de problemas motivados por aplicaciones prácticas.
- Interpretar los resultados teóricos para entender la respuesta de las estructuras a diferentes excitaciones dinámicas, con énfasis en la excitación sísmica.
- Aplicar la teoría de la dinámica estructural para realizar estudios paramétricos que pongan en evidencia varios aspectos fundamentales de la respuesta, el diseño y la evaluación de los sismos en edificios de varios niveles.

Este modo de presentación debe ayudar al lector a lograr una comprensión más profunda del tema y aplicar con confianza la teoría de la dinámica estructural a problemas prácticos; sobre todo en el análisis, el diseño y la evaluación de estructuras ante los sismos, reduciendo así la brecha existente entre la teoría y la práctica.

EVOLUCIÓN DEL LIBRO

Dado que el libro apareció por primera vez en 1995, se ha revisado y ampliado en varias formas, lo que dio lugar a la segunda edición en 2001 y a la tercera edición en 2007. Impulsado por un creciente número de registros de movimientos del terreno en la proximidad de una falla, el capítulo 6 se extendió para identificar las características especiales de los movimientos del terreno cercanos a las fallas y compararlas con los movimientos habituales lejanos a éstas. Debido al interés cada vez mayor en el comportamiento de los puentes ante los sismos, en varios capítulos se añadieron ejemplos sobre la dinámica de éstos y su respuesta ante estos eventos. Debido a la gran necesidad de simplificar los procedimientos del análisis dinámico adecuados para la ingeniería sísmica basada en el desempeño, se amplió el capítulo 7 a fin de proporcionar un análisis más completo de las deformaciones inducidas por los sismos en los sistemas inelásticos y elásticos, y para demostrar las aplicaciones del espectro de diseño inelástico en el diseño estructural de ductilidad permisible, el diseño basado en el desplazamiento y la evaluación sísmica de estructuras existentes. El anterior capítulo 19 (ahora 20) se reescribió por completo para incorporar los avances posteriores a 1990 en el análisis de los sismos y la respuesta de las construcciones inelásticas. El anterior capítulo 21 (ahora 22), que originalmente se limitaba a tres códigos de construcción (Estados Unidos, Canadá y México), se amplió para incluir el Eurocódigo. La adición del capítulo 22 (ahora 23) estuvo motivada por la adopción de las directrices basadas en el desempeño para la evaluación de construcciones existentes en la profesión de la ingeniería estructural.

En respuesta a las peticiones de los lectores se incluyó el método de dominio de la frecuencia para el análisis dinámico, pero presentado como un apéndice en vez de estar disperso a lo largo del libro. Esta decisión se debió a mi objetivo de mantener las matemáticas tan sencillas como lo permita cada tema, con lo que la dinámica estructural se vuelve más accesible a los estudiantes e ingenieros profesionales.

NOVEDADES EN ESTA EDICIÓN

Dinámica de estructuras ha sido bien recibido desde que se publicó por primera vez, hace ya más de 18 años, y continúa siendo utilizado como texto en universidades de Estados Unidos y muchos otros países, y cuenta también con una gran cantidad de lectores profesionales deseosos de actualizarse. Se han hecho traducciones al japonés, coreano, chino, griego, persa y al español. La preparación de esta cuarta edición me proporcionó la oportunidad de mejorar, ampliar y actualizar el libro.

El capítulo 14 es nuevo, por lo que fue necesaria una renumeración de los capítulos 14 a 22 (como 15 a 23); esta nueva numeración se refleja en el resto del prefacio. Los capítulos 5 y 16 se sometieron a una revisión exhaustiva; los capítulos 12 y 13 se ampliaron; y el 22 y el 23 se actualizaron. Enseguida presentamos algunos de los cambios específicos:

- Se añadió el capítulo 14, sobre sistemas con amortiguamiento no clásico. Esta adición fue motivada por el gran interés por estos sistemas que se presentan en varias situaciones prácticas: estructuras con sistemas complementarios para la disipación de energía o sobre la base de un sistema de aislamiento, sistemas terreno-estructura y sistemas fluido-estructura.
- Los capítulos 5 y 16, sobre la evaluación numérica de la respuesta dinámica, se reescribieron para ajustarse a las formas en las que estos métodos numéricos se implementan generalmente en los programas computacionales y para ofrecer una presentación integrada del análisis estático no lineal (también conocido como análisis paso a paso (o *pushover*) modal, y el análisis dinámico no lineal.
- Se añadió una sección al final del capítulo 12 para presentar una versión general del método de superposición en el modo de aceleración para excitaciones más complejas, como la fuerza de las olas que se presenta en las plataformas de perforación en alta mar.
- El capítulo 13 se amplió para incluir dos temas que hasta ahora habían sido relegados a la literatura de investigación, pero que son de interés práctico: (1) la combinación de respuestas máximas de una estructura a los distintos componentes del movimiento de traslación del terreno, con el fin de estimar la respuesta máxima a varios componentes de excitación, y (2) las ecuaciones de respuesta basadas en el espectro para determinar una envolvente que delimita la trayectoria de respuesta conjunta de todas las fuerzas que actúan al mismo tiempo y que controlan el diseño sísmico de un elemento estructural.
- Los capítulos 22 y 23 se actualizaron para reflejar la edición más actual de los códigos de construcción para el diseño de nuevos edificios y las directrices basadas en el desempeño y las normas para la evaluación de construcciones existentes.
- La adición del capítulo 14 implicó algunas modificaciones en los capítulos 2, 4, 6, 10 y 12.
- Se añadieron nuevas figuras, fotografías, así como ejemplos resueltos y problemas de fin de capítulo.

Con el uso de este libro en el aula y analizándolo con cuidado en los últimos años, han surgido mejoras adicionales. El texto se ha clarificado y perfeccionado, haciéndolo más global, y se han reorganizado algunas secciones para mejorar su presentación.

TEMAS QUE SE PRESENTAN

Este libro está organizado en tres partes: I. Sistemas con un solo grado de libertad; II. Sistemas de varios grados de libertad y III. Respuesta sísmica, diseño y evaluación de edificios de varios niveles.

La parte I incluye los capítulos 1 a 8. En el capítulo 1 se formula el problema de la dinámica estructural para estructuras simples elásticas e inelásticas, que pueden idealizarse como sistemas con un solo grado de libertad (1GDL), y se estudian brevemente cuatro métodos para resolver la ecuación diferencial que controla el movimiento de la estructura. Después se estudia la respuesta dinámica de los sistemas elástico lineales (1) a la vibración libre (capítulo 2), (2) a las excitaciones armónicas y periódicas (capítulo 3), y (3) a las excitaciones de paso e impulso (capítulo 4). En los capítulos 2 y 3 se incluye la dinámica de los sistemas de 1GDL con amortiguamiento de Coulomb, un tema que por lo regular no se incluye en los textos de ingeniería civil, pero que se ha hecho relevante para la ingeniería sísmica porque los dispositivos para la disipación de energía basados en la fricción se utilizan en la construcción resistente a los sismos. Tras la presentación numérica de los métodos de cálculo de tiempo por pasos para la respuesta dinámica de los sistemas de 1GDL (capítulo 5), se estudia la respuesta sísmica de los sistemas elásticos e inelástico lineales en los capítulos 6 y 7, respectivamente. La cobertura de estos temas es más amplia que en los textos disponibles; se incluyen detalles sobre la construcción de respuesta y los espectros de diseño, los efectos de la amortiguación y la fluencia, así como la distinción entre la respuesta y los espectros de diseño. El tema del capítulo 8 es el análisis de sistemas complejos tratados como sistemas generalizados de 1GDL.

La parte II incluye los capítulos 9 a 18 (los 4 últimos se encuentran en el sitio web del libro, 15 y 16 en español y 17 y 18 en inglés) sobre el análisis dinámico de sistemas con varios grados de libertad (VGL). En el primero de estos capítulos (el 9) se formula el problema de la dinámica estructural para estructuras idealizadas como sistemas con un número finito de grados de libertad, y se ilustra mediante numerosos ejemplos; también se incluye una descripción general de los métodos para resolver las ecuaciones diferenciales que controlan el movimiento de la estructura. En el capítulo 10 se ve la vibración libre de sistemas con amortiguamiento clásico y al cálculo numérico de frecuencias de vibración y modos naturales de la estructura. El capítulo 11 aborda varios aspectos que se plantean en la definición de las propiedades de amortiguamiento de las estructuras, incluyendo datos experimentales (a partir de ensayos de vibración forzada sobre las estructuras y movimientos de las estructuras registrados durante los sismos) que proporcionan una base para estimar las fracciones de amortiguamiento modal y los procedimientos analíticos para construir la matriz de amortiguamiento en caso necesario. El capítulo 12 aborda el análisis dinámico de los sistemas lineales, donde se pone énfasis en el procedimiento clásico de análisis modal. La parte C de este capítulo representa una “nueva” forma de ver el análisis modal que facilita la comprensión de la forma en la que las contribuciones de la respuesta modal están influenciadas por la distribución espacial y la variación en el tiempo de las fuerzas aplicadas, originando criterios prácticos en el número de modos que deben incluirse en el cálculo de la respuesta. En el capítulo 13 se desarrollan los procedimientos del análisis modal para el análisis de sismos en sistemas con amortiguamiento clásico; tanto el análisis de la historia de la respuesta, como los procedimientos del análisis para el espectro de respuesta se presentan en una forma que proporciona una interpretación física; este último procedimiento estima la respuesta máxima de los sistemas

con VGL directamente de la respuesta sísmica o del espectro de diseño. Los procedimientos se ilustran con numerosos ejemplos, entre ellos la respuesta lateral-torsional acoplada de edificios con planta asimétrica y la respuesta torsional de edificios nominalmente simétricos. Este capítulo termina con los procedimientos de respuesta basados en el espectro para considerar todas las fuerzas que actúan al mismo tiempo y que controlan el diseño de un elemento estructural, así como para estimar la respuesta máxima de una estructura a la excitación de un sismo con múltiples componentes. Este procedimiento se amplía en el capítulo 14 al análisis de la historia de la respuesta para sistemas con amortiguamiento no clásico sometidos a una excitación sísmica. Para este propósito, primero se revisan los sistemas con amortiguamiento clásico y se modifican los procedimientos de análisis de los capítulos 10 y 13, de modo que faciliten su extensión al caso más general.

El capítulo 15 (en el sitio web del libro) está dedicado al aspecto computacional práctico para reducir el número de grados de libertad en la idealización estructural requerida para el análisis estático, con el fin de reconocer que la respuesta dinámica de muchas estructuras puede representarse mediante sus primeros modos naturales de vibración. En el capítulo 16 (también en el sitio web) se presentan los métodos numéricos de tiempo por pasos para sistemas con VGL no susceptibles al análisis modal clásico: sistemas con amortiguamiento no clásico o sistemas que responden en el intervalo del comportamiento no lineal. El capítulo 17 (en inglés) se ocupa de los problemas clásicos en la dinámica de los sistemas con masa distribuida; sólo se incluyen los sistemas unidimensionales. En el capítulo 18 (también en inglés) se presentan dos métodos para discretizar los sistemas unidimensionales con masa distribuida: el método de Rayleigh-Ritz y el método del elemento finito. Se presenta el concepto de matriz de masa consistente y se demuestra la precisión y la convergencia de las frecuencias naturales aproximadas de una viga en voladizo, determinadas mediante el método del elemento finito.

La parte III del libro consta de cinco capítulos (todos en el sitio web) que se ocupan del diseño de respuesta sísmica y la evaluación de edificios con varios niveles, un tema que en general no se incluye en los textos de dinámica estructural. Se abordan varios aspectos importantes y prácticos usando los procedimientos analíticos desarrollados en los capítulos anteriores. En el capítulo 19 se presenta la respuesta sísmica de edificios con varios niveles elástico lineales para un intervalo amplio de dos parámetros clave: el periodo de vibración natural fundamental y la relación de rigidez viga-columna. Con base en estos resultados se desarrolla una comprensión de la manera en que estos parámetros afectan a la respuesta sísmica de los edificios y, en particular, a las contribuciones relativas de respuesta de los distintos modos naturales, las cuales conducen a información práctica sobre el número de modos más altos que deben incluirse en los cálculos de respuesta sísmica. El capítulo 20 se refiere al importante tema de la respuesta sísmica de edificios con varios niveles que se deforman en su intervalo inelástico. La parte A de este capítulo presenta un riguroso análisis de la historia de la respuesta no lineal; identifica la importante influencia de los supuestos en el modelo, los principales parámetros estructurales y los detalles del movimiento sísmico sobre las demandas sísmicas; asimismo, determina la fuerza necesaria para limitar las demandas de ductilidad de cada nivel en un edificio de varios niveles. En vista de que el análisis riguroso no lineal de la historia de la respuesta sigue siendo una tarea difícil, en la parte B se desarrolla el procedimiento del análisis paso a paso o *pushover* modal (APM) (un procedimiento de análisis aproximado). En este procedimiento se estiman las demandas sísmicas mediante análisis no estático lineales de la estructura sometida a distribuciones de fuerza inerciales modales. El aislamiento de la base

es el tema del capítulo 21 (en inglés). El objetivo es estudiar el comportamiento dinámico de los edificios soportados sobre sistemas de aislamiento de la base con el objetivo limitado de entender por qué y en qué condiciones resulta eficaz al reducir las fuerzas inducidas por los sismos en una estructura. En el capítulo 22 se presentan las disposiciones de la fuerza sísmica en cuatro códigos de construcción: *International Building Code* (Estados Unidos), *National Building Code of Canada*, *Eurocódigo* y *Código del Distrito Federal* (México), así como su relación con la teoría de la dinámica estructural desarrollada en los capítulos 6 , 7, 8 y 13. Posteriormente se evalúan las disposiciones de los códigos en vista de los resultados del análisis dinámico de edificios que se presenta en los capítulos 19 y 20. Las directrices y normas basadas en el desempeño para la evaluación de edificios existentes consideran de forma explícita el comportamiento inelástico en la estimación de las demandas sísmicas en los niveles de bajo rendimiento, como la seguridad de la vida y la prevención de colapso. En el capítulo 23 se presentan y analizan determinados aspectos del procedimiento dinámico y del procedimiento estático no lineales en esos documentos (ATC-40, FEMA 356 y ASCE 41-06) dada la teoría de la dinámica estructural desarrollada en los capítulos 7 y 20.

NOTA PARA LOS PROFESORES

Este libro es adecuado para cursos tanto a nivel de postgrado como de pregrado superior. No es necesario ningún conocimiento previo sobre la dinámica estructural. Los fundamentos necesarios se obtienen a través de los cursos habituales de los estudiantes de ingeniería civil, que incluyen:

- Análisis estático de las estructuras, incluyendo las estructuras estáticamente indeterminadas y la formulación matricial de procedimientos de análisis (conocimientos previos necesarios principalmente para la parte II)
- Diseño estructural
- Dinámica de cuerpos rígidos
- Matemáticas: ecuaciones diferenciales ordinarias (para la parte I), álgebra lineal (para la parte II) y ecuaciones diferenciales parciales (sólo para el capítulo 17)

Al proporcionar un tratamiento elemental pero minucioso de una gran cantidad de temas, el libro permite una flexibilidad inusual en la selección de los contenidos, a criterio del profesor, para desarrollar varios cursos, o adaptar uno a su medida, en función del material presentado; he aquí algunos ejemplos.

Casi todo el libro puede cubrirse en un curso de un año:

- *Título*: Dinámica de estructuras I (1 semestre)

  Plan de estudio: capítulo 1; secciones 1 y 2 del capítulo 2; partes A y B del capítulo 3; capítulo 4; temas seleccionados del capítulo 5; secciones 1 a 7 del capítulo 6; secciones 1 a 7 del capítulo 7; temas seleccionados del capítulo 8; secciones 1 a 4 y 9 a 11 del capítulo 9; partes A y B del capítulo 10; secciones 1 y 2 del capítulo 11; partes A y B del capítulo 12; secciones 1, 2, 7 y 8 (excluyendo el método CQC) del capítulo 13; y temas seleccionados de la parte A del capítulo 22.

- *Título*: Dinámica de estructuras II (1 semestre)

Plan de estudio: secciones 5 a 7 del capítulo 9; secciones 3 a 5 del capítulo 11; partes C y D del capítulo 12, secciones 3 a 11 del capítulo 13; partes seleccionadas de los capítulos 14, 15, 17, 19 a 21, y 23; y el apéndice A.

La selección de los temas para el primer curso se ha realizado en parte por la necesidad de proporcionar una cobertura completa, incluyendo el análisis dinámico y el análisis sísmico en sistemas con VGL, para los estudiantes que toman un solo curso.

Es posible organizar versiones abreviadas de los esquemas anteriores de modo que se impartan en dos cursos trimestrales. Una posibilidad es la siguiente:

- *Título:* Dinámica de estructuras I (1 trimestre)

Plan de estudio: capítulo 1; secciones 1 y 2 del capítulo 2; secciones 1 a 4 del capítulo 3; secciones 1 y 2 del capítulo 4; temas seleccionados del capítulo 5; secciones 1 a 7 del capítulo 6; secciones 1 a 7 del capítulo 7; temas seleccionados del capítulo 8; secciones 1 a 4 y 9 a 11 del capítulo 9; partes A y B del capítulo 10; parte B del capítulo 12; secciones 1, 2, 7 y 8 (excluyendo el método CQC) del capítulo 13.

- *Título*: Dinámica de estructuras II (1 trimestre)

Plan de estudio: secciones 5 a 7 del capítulo 9; secciones 3 a 9 del capítulo 13; y temas seleccionados de los capítulos 19 a 23.

Un curso de un semestre, con énfasis en la ingeniería sísmica, puede organizarse de la siguiente manera:

- *Título:* Dinámica sísmica de estructuras

Plan de estudios: capítulo 1; secciones 1 y 2 del capítulo 2; secciones 1 y 2 del capítulo 4; capítulos 6 y 7; temas seleccionados del capítulo 8; secciones 1 a 4 y 9 a 11 del capítulo 9; partes A y B del capítulo 10; parte A del capítulo 11; secciones 1 a 3 y 7 a 11 del capítulo 13; temas seleccionados de los capítulos 19 a 23.

La resolución de problemas es esencial para que los estudiantes aprendan sobre la dinámica estructural. Para ello, los primeros 18 capítulos incluyen 373 problemas. Los capítulos 19 a 23 no incluyen problemas por dos razones: (1) en estos capítulos no se presentan nuevos procedimientos de análisis dinámico; (2) este material no es para plantear problemas pequeños y significativos. Sin embargo, será útil trabajar con los ejemplos que se presentan en los capítulos 19 a 23 y reproducir los resultados. La computadora es esencial para resolver algunos de esos problemas, los cuales se encuentran bien identificados. En su solución se asume que el estudiante tiene acceso a programas de computadora, como MATLAB o MATHCAD. Las soluciones de estos problemas están disponibles en inglés para los profesores en el sitio web del libro (pregunte a su representante cómo acceder a ellos).

En mis conferencias en Berkeley, desarrollo la teoría en el pizarrón y la ilustro mediante transparencias de las figuras más complejas del libro; las versiones ampliadas de muchas de las figuras, que resultan adecuadas para la elaboración de transparencias que pueden usarse en el aula, están disponibles para los profesores en el sitio web del libro. A pesar de que se ha solicitado un conjunto completo de diapositivas de PowerPoint, no se ha desarrollado porque no creo que este enfoque sea la estrategia más eficaz para la enseñanza de la dinámica de estructuras.

NOTA PARA LOS INGENIEROS PROFESIONALES

Muchos ingenieros profesionales me alentaron durante la década de 1980 a preparar un libro más completo de *Dinámica de estructuras, Estudio elemental (Dynamics of Structures, A Primer)*, una monografía publicada en 1981 por el Earthquake Engineering Research Institute. Esta necesidad, espero, se cubrió mediante el presente libro. Al haber sido concebido como un libro de texto, incluye el formalismo y el detalle necesario para los estudiantes, pero estas características no deberían disuadir a los profesionales de utilizar el libro, porque su filosofía y estilo están creados para facilitar el aprendizaje del tema mediante el autoestudio.

Para los ingenieros profesionales interesados en el análisis, respuesta, diseño y evaluación de las estructuras ante sismos, sugiero la siguiente ruta de lectura: capítulos 1 y 2; capítulos 6 a 9; partes A y B del capítulo 10; parte A del capítulo 11; y los capítulos 13 y 19 a 23.

REFERENCIAS

En un texto introductorio no es práctico presentar las fuentes de la información. Se han omitido las referencias para evitar distraer al lector. Sin embargo, se han incluido comentarios ocasionales para añadir una perspectiva histórica, y al final de casi todos los capítulos se proporciona una breve lista de las publicaciones adecuadas para una lectura adicional.

SUS COMENTARIOS SON BIENVENIDOS

Invito a los profesores, estudiantes e ingenieros profesionales a escribirme (chopra@ce.berkeley.edu) si tienen alguna sugerencias de mejora o aclaraciones, o si identifican errores en el libro. Les agradezco de antemano por tomarse el tiempo y el interés en hacerlo.

Anil K. Chopra

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que ayudaron en la preparación de este libro.

- El profesor Rakesh K. Goel, un compañero de principio a fin, me ayudó de numerosas formas y jugó un papel importante. Su contribución más importante fue desarrollar y ejecutar los programas de computadora necesarios para generar los resultados numéricos y crear la mayoría de las figuras.
- El profesor Gregory L. Fenves leyó el primer borrador del manuscrito original, lo analizó conmigo cada semana y siempre realizó importantes sugerencias para su mejora.
- Seis revisores, los profesores Luis Esteva, William J. Hall, Rafael Riddell, C. C. Tung y los fallecidos George W. Housner y Donald E. Hudson examinaron el borrador final del manuscrito original. Ellos me alentaron y dieron sugerencias muy acertadas.
- Los profesores Gregory L. Fenves y Filip C. Fillipou me aconsejaron sobre la modificación de los capítulos 5 y 16, y realizaron observaciones sobre el proyecto final.
- El Dr. Ian Aiken me proporcionó materiales (incluyendo fotografías) y recomendaciones para la modificación de las secciones 7.10.1 y 7.10.2 sobre dispositivos complementarios para la disipación de energía.
- El Dr. Charles Menun, cuyos resultados de investigación fueron la base para la nueva sección 13.10, me asesoró mucho sobre la preparación de esta sección y revisó varios borradores.

- El profesor Óscar López y el Dr. Charles Menun, cuyos resultados de investigación fueron la base de la nueva sección 13.11, me proporcionaron su ayuda y revisaron el borrador final.
- Varios revisores —los profesores Michael C. Constantinou, Takeru Igusa, George C. Lee, Fai Ma y Carlos E. Ventura— me sugirieron mejoras para la versión final del capítulo 14.
- Seis expertos me asesoraron en la interpretación de las versiones actualizadas de los cuatro códigos de construcción del capítulo 22: Yousef Bozorgnia y Ronald O. Hamburguer (*International Building Code*); Jagmohan L. Humar (*National Building Code of Canada*); Eduardo Miranda (*Código del Distrito Federal, México*); y Peter Fajfar y Michael N. Fardis (*Eurocódigo*).
- Diversos profesores que han adoptado el libro en sus cursos durante varios años me han sugerido mejoras. Algunas de las modificaciones y adiciones en esta edición estuvieron motivadas por las recomendaciones de los profesores A. Stavros Anagnostopoulos, Michael C. Constantinou, Kincho Law y Jose M. Roesset.
- Muchos ex estudiantes me han ayudado durante años en la preparación de soluciones para los ejemplos resueltos y los problemas de fin de capítulo, y me han ayudado de otras maneras: Ashraf Ayoub, Ushnish Basu, Shih-Po Chang, Juan Chávez, Chatpan Chintanapakdee, Juan Carlos De la Llera, Rakesh K. Goel, Garrett Hall, Gabriel Hurtado, Petros Keshishian, Allen Kwan, Lin Wen-Hsiung, Charles Menun y Tsung-Li Tai. Han-Chen Tan realizó el procesamiento de textos y gráficos para el manual de soluciones original de los 233 problemas de la primera edición.
- Varios estudiantes y ex estudiantes me ayudaron en la preparación del material nuevo en la cuarta edición: Juan Carlos Reyes resolvió los ejemplos y problemas finales de los capítulos 5, 14 y 16, y elaboró las figuras. Yvonne Tsui generó los resultados numéricos de la sección 13.10 y preparó las figuras preliminares. Neal Simon Kwong resolvió los ejemplos y preparó las figuras en las secciones 12.14 y 13.11, y finalizó las figuras de la sección 13.10. Eric Keldrauk desarrolló los resultados de la figura 11.4.3.
- Charles D. James, Director de Sistemas de Información para el NISEE en la Universidad de California, Berkeley, me ayudó en la selección y recopilación de las fotografías nuevas.
- Claire Johnson preparó el texto para las partes nuevas y modificadas en el manuscrito, y también reunió y editó el manual de soluciones.
- Barbara Zeiders trabajó como editora de textos en esta edición, como lo hizo en las tres primeras ediciones.
- El profesor Joseph Penzien asumió mis funciones como editor asociado de *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* desde junio de 1993 hasta agosto de 1994 cuando estaba trabajando en el libro original.

También deseo expresar mi profundo agradecimiento a los profesores Ray W. Clough, Jr., Joseph Penzien, Emilio Rosenblueth y A. S. Veletsos por la influencia que han tenido

en mi crecimiento profesional. A principios de la década de 1960, los profesores Clough, Penzien, y Rosenblueth me expusieron sus puntos de vista bien sustentados y sus cursos tan bien organizados sobre la dinámica estructural y la ingeniería sísmica. Más tarde, el profesor Veletsos, a través de su investigación, sus escritos y sus conferencias, influyó en mi enseñanza y filosofía de investigación. Su obra, en colaboración con el fallecido profesor Nathan M. Newmark, definió el enfoque adoptado para algunas secciones de los capítulos 6 y 7; y que, en colaboración con el profesor Carlos E. Ventura, definió el estilo de presentación para el capítulo 14.

Este libro ha tenido la influencia de mi propia experiencia de investigación en colaboración con mis alumnos. Desde 1969, varias organizaciones han apoyado mi investigación en la ingeniería sísmica, como la National Science Foundation, el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de Estados Unidos y el California Strong Motion Instrumentation Program.

Este libro y sus ediciones revisadas se han preparado durante años sabáticos, un privilegio que agradezco a la Universidad de California en Berkeley.

Anil K. Chopra

PARTE I

Sistemas con un solo grado de libertad





Ecuaciones de movimiento, planteamiento del problema y métodos de solución

AVANCE

En este primer capítulo se formula el problema de la dinámica estructural para estructuras simples que pueden idealizarse como sistemas con una masa concentrada soportados por una estructura sin masa. Se consideran tanto las estructuras elásticas lineales, así como las estructuras inelásticas, sometidas a una fuerza dinámica aplicada o a un movimiento del terreno inducido por un sismo. Después se estudian brevemente cuatro métodos para resolver la ecuación diferencial que rige el movimiento de la estructura. El capítulo termina con un resumen de la forma en que está organizado el estudio de la respuesta dinámica de los sistemas con un grado de libertad en los capítulos siguientes.

1.1 ESTRUCTURAS SIMPLES

El estudio de la dinámica estructural se inicia con estructuras *simples*, como la pérgola que se muestra en la figura 1.1.1 y el tanque de agua elevado de la figura 1.1.2. Se tiene interés en comprender la vibración de estas estructuras cuando se les aplica una fuerza lateral (u horizontal) en la parte superior o un movimiento horizontal del terreno debido a un sismo.

Estas estructuras se llaman *simples* porque pueden idealizarse como una masa m concentrada o agrupada soportada por una estructura sin masa con rigidez k en la dirección lateral. Dicha idealización es apropiada para esta pérgola con un techo de concreto pesado sostenido por columnas ligeras de tubo de acero, que pueden suponerse carentes de masa. El techo de concreto es muy rígido y la flexibilidad de la estructura en la dirección lateral (u horizontal) la proporcionan en su totalidad las columnas. El sistema idealizado se muestra



Figura 1.1.1 Esta pérgola en el Hotel Macuto Sheraton, cerca de Caracas, Venezuela, se dañó por el sismo del 29 de julio de 1967. El evento con magnitud 6.5, que se ubicó a unas 15 millas del hotel, deformó en exceso las columnas de tubo de acero, produciendo un desplazamiento permanente del techo de 9 pulgadas. (Tomada de la colección Steinbrugge, Servicio de Información Nacional de Ingeniería Sísmica en la Universidad de California, Berkeley).

en la figura 1.1.3a con un par de columnas que soportan la longitud tributaria del techo de concreto. Este sistema tiene una masa concentrada m igual a la masa del techo mostrado, y su rigidez lateral k es igual a la suma de las rigideces de las columnas tubulares individuales. En la figura 1.1.3b se muestra una idealización similar, la cual es apropiada para el tanque cuando se encuentra lleno de agua. Como el chapoteo del agua no es posible en un tanque lleno, se trata de una masa concentrada m sostenida por una torre relativamente ligera que puede considerarse como carente de masa. La torre en voladizo que soporta el depósito de agua proporciona la rigidez lateral k a la estructura. Por el momento, se asumirá que el movimiento lateral de estas estructuras es pequeño suponiendo que las estructuras de soporte se deforman dentro de su límite elástico lineal.

Más adelante en este capítulo se verá que la ecuación diferencial que controla el desplazamiento lateral $u(t)$ de estas estructuras idealizadas sin ninguna excitación externa —fuerza aplicada o movimiento del terreno— es

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{1.1.1}$$

donde los puntos sobre las variables indican diferenciación con respecto al tiempo, por lo que $\ddot{u}$ representa la velocidad de la masa y $\ddot{u}$ su aceleración. La solución de esta ecuación, presentada en el capítulo 2, mostrará que si a la masa de los sistemas idealizados de la figura 1.1.3 se le impone un desplazamiento inicial $u(0)$, después se libera y se permite que vibre libremente, la estructura oscilará o vibrará hacia adelante y hacia atrás alrededor de

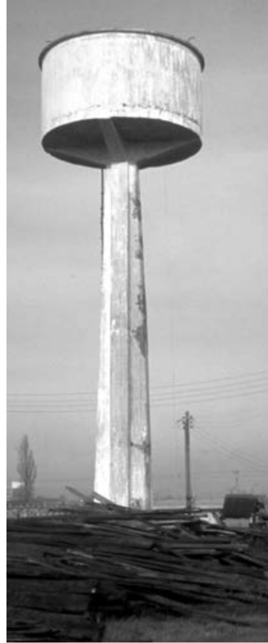


Figura 1.1.2 Este tanque de concreto reforzado sobre una sola columna de concreto de 40 pies de altura, que se encuentra cerca del aeropuerto de Valdivia, no sufrió daños por los sismos chilenos de mayo de 1960. Cuando el tanque está lleno de agua, la estructura puede analizarse como un sistema de un grado de libertad. (Tomada de la colección Steinbrugge, Servicio de Información Nacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de California, Berkeley).

su posición de equilibrio inicial. Como se muestra en la figura 1.1.3c, se presenta el mismo desplazamiento máximo oscilación tras oscilación; estas oscilaciones continúan de manera indefinida y los sistemas idealizados nunca llegarían al reposo. Por supuesto, lo anterior no es una situación realista. La intuición sugiere que si el techo de la pérgola o la parte superior del tanque de agua fueran desplazados lateralmente mediante una cuerda y la cuerda se cortara de repente, la estructura oscilaría cada vez con menor amplitud y con el tiempo

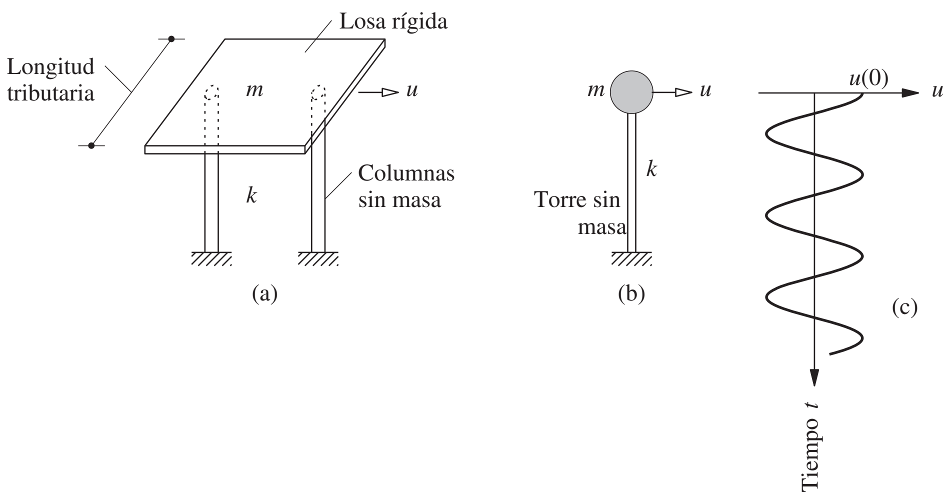
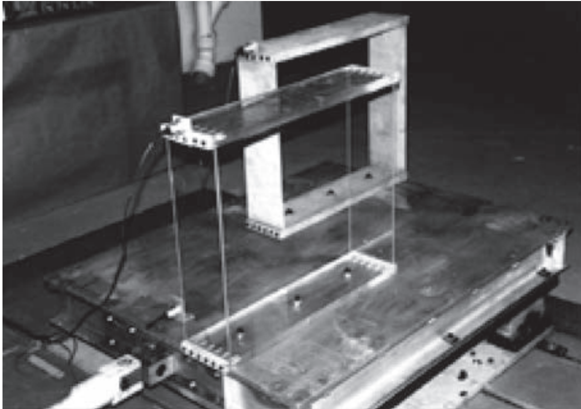


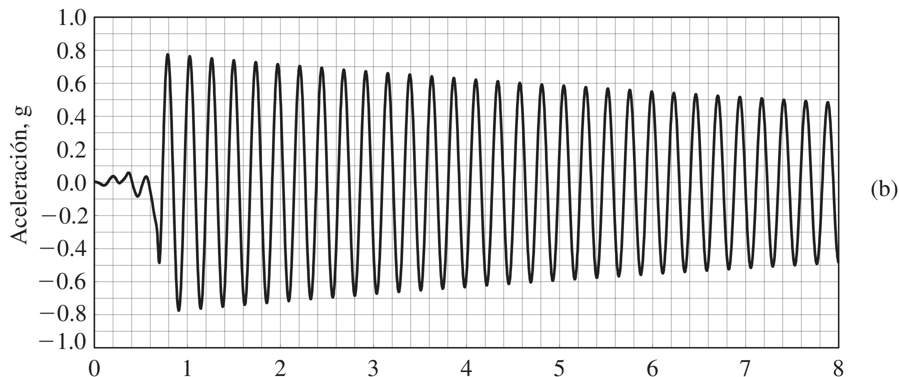
Figura 1.1.3 (a) Pérgola idealizada, (b) tanque de agua idealizado, (c) vibración libre debida a un desplazamiento inicial.

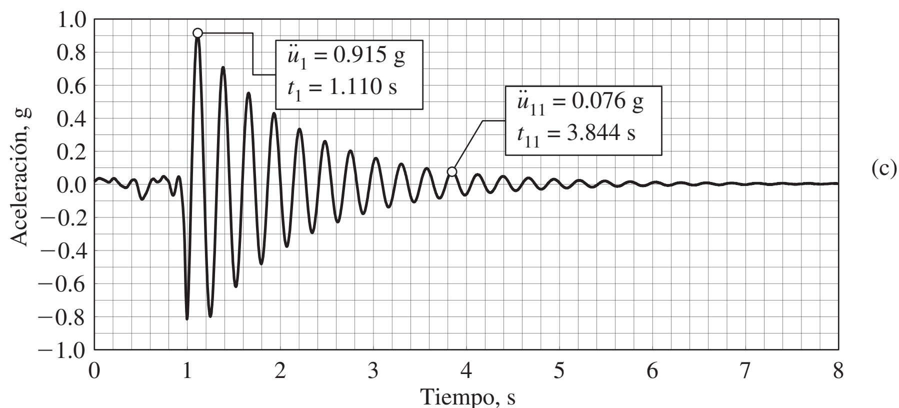
se detendría. Experimentos de este tipo se realizaron en modelos de laboratorio de marcos de un solo nivel, y los registros medidos de su respuesta a la vibración libre se presentan en la figura 1.1.4. Como era de esperarse, el movimiento de los modelos estructurales decayó con el tiempo, siendo el decaimiento del modelo de plexiglás más rápido que el del marco de aluminio.



(a)

Figura 1.1.4 (a) Modelos de marco de aluminio y plexiglás montados sobre una pequeña mesa vibradora que se usa para una demostración en clase de la Universidad de California en Berkeley (cortesía de T. Merport), (b) registro de la vibración libre del modelo de aluminio, (c) registro de la vibración libre del modelo de plexiglás.





El proceso mediante el cual la amplitud de la vibración disminuye de manera constante se denomina *amortiguamiento*. La energía cinética y la energía de deformación del sistema vibratorio se disipan mediante diversos mecanismos de amortiguamiento que se mencionarán más adelante. Por el momento, simplemente se reconoce que es necesario incluir un mecanismo de disipación de energía en la idealización estructural con el fin de caracterizar el decaimiento del movimiento observado durante los ensayos de vibración libre de una estructura. El elemento de amortiguamiento que se utiliza comúnmente es el amortiguador viscoso, en parte porque su manejo matemático es más sencillo. En los capítulos 2 y 3 se presentan otros mecanismos de disipación de la energía.

1.2 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

El sistema considerado se muestra esquemáticamente en la figura 1.2.1. Se compone de una masa *m* concentrada en el nivel del techo, un marco sin masa que proporciona rigidez al sistema, y un amortiguador viscoso que disipa la energía de vibración del sistema. Se supone que la viga y las columnas son axialmente indeformables.

Este sistema puede considerarse como una idealización de una estructura de un nivel. Cada elemento estructural (viga, columna, muro, etcétera) de la estructura real contribuye a las propiedades inerciales (masa), elásticas (rigidez o flexibilidad) y de disipación de la energía (amortiguamiento) de la estructura. Sin embargo, en el sistema idealizado, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puros distintos: el componente de masa, el componente de rigidez y el componente de amortiguamiento.

El número de desplazamientos independientes requerido para definir las posiciones desplazadas de todas las masas en relación con su posición original se denomina el número de *grados de libertad* (GDL) para el análisis dinámico. De manera típica, se requieren más GDL para definir las propiedades de rigidez de una estructura que los GDL necesarios para representar las propiedades inerciales. Considere el marco de un nivel de la figura 1.2.1, restringido a moverse sólo en la dirección de la excitación. El problema de análisis estático debe formularse con tres GDL (el desplazamiento lateral y la rotación de los dos nudos) para determinar la rigidez lateral del marco (vea la sección 1.3). En contraste, la estructura tiene un solo GDL (el desplazamiento lateral) para el análisis dinámico si se idealiza con la masa concentrada en una ubicación, por lo regular al nivel del techo. Por lo tanto, se le llama *sistema de un grado de libertad* (1GDL).

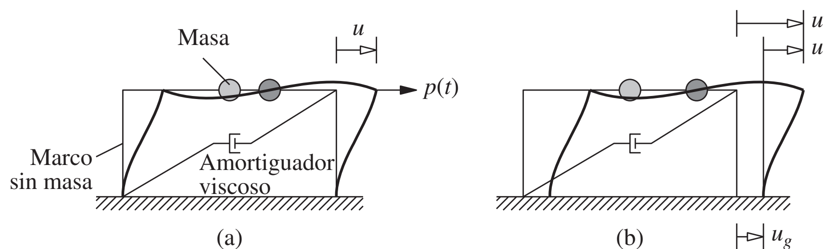


Figura 1.2.1 Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada $p(t)$; (b) movimiento del terreno inducido por un sismo.

Se considerarán dos tipos de excitación dinámica: (1) la fuerza externa $p(t)$ en la dirección lateral (figura 1.2.1a), y (2) el movimiento del terreno $u_g(t)$ inducido por un sismo (figura 1.2.1b). En ambos casos u indica el desplazamiento relativo entre la masa y la base de la estructura.

1.3 RELACIÓN FUERZA-DESPLAZAMIENTO

Considere el sistema mostrado en la figura 1.3.1a sin excitación dinámica, sometido a una fuerza externa estática f_S aplicada en la dirección del GDL u tal como se muestra. La fuerza interna que se opone al desplazamiento u es igual y opuesta a la fuerza externa f_S (figura 1.3.1b). Se desea determinar la relación entre la fuerza f_S y el desplazamiento relativo u asociado con las deformaciones en la estructura durante el movimiento oscilatorio. Esta relación de fuerza-desplazamiento sería lineal para pequeñas deformaciones, pero volvería no lineal en el caso de grandes deformaciones (figura 1.3.lc); se consideran tanto las relaciones lineales como las no lineales (figura 1.3.1c y d).

La determinación de la relación entre f_S y u es un problema estándar en el análisis estructural estático, y se supone que el lector está familiarizado con este tipo de análisis. Por lo tanto, la presentación en esta sección es breve y se limita a los aspectos esenciales.

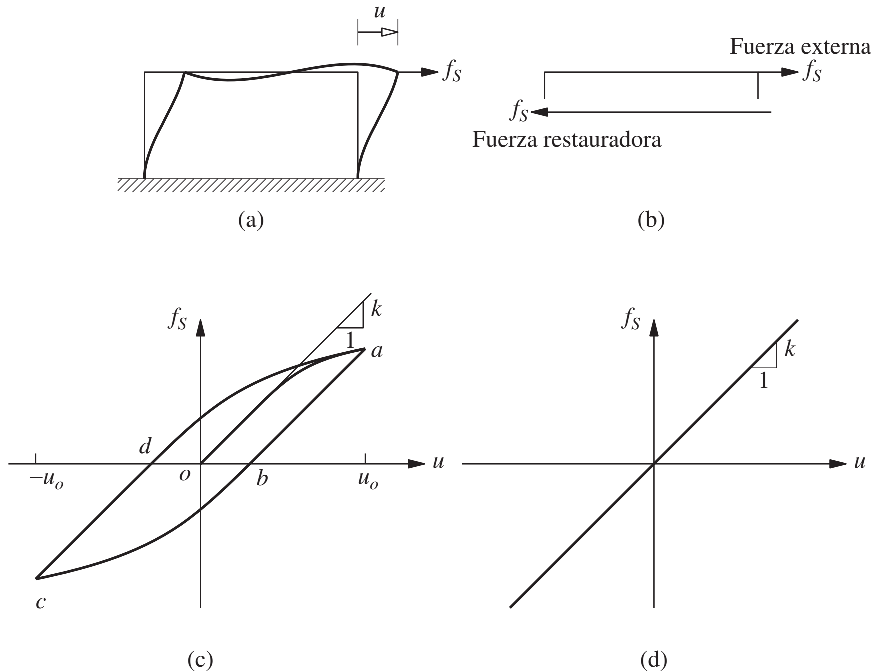


Figura 1.3.1

1.3.1 Sistemas elástico lineales

Para un *sistema lineal* la relación entre la fuerza lateral f_S y la deformación resultante u es lineal, es decir,

$$f_S = ku \tag{1.3.1}$$

donde k es la rigidez lateral del sistema; sus unidades son fuerza/longitud. En la ecuación (1.3.1) está implícito el supuesto de que la relación lineal f_S-u determinada para pequeñas deformaciones de la estructura también es válida para el caso de grandes deformaciones. Esta relación lineal implica que f_S es una función de u con un solo valor (es decir, las curvas de carga y descarga son idénticas). Se dice que tal sistema es elástico, por lo que se utiliza el término *sistema elástico lineal* para enfatizar ambas propiedades.

Considere el marco de la figura 1.3.2a con una crujía de tamaño L, altura h, módulo de elasticidad E y segundo momento de área de la sección transversal (o momento de inercia)† alrededor del eje de flexión $= I_b$ e I_c para la viga y las columnas, respectivamente; las columnas están sujetas (o empotradas) en la base. La *rigidez lateral* del marco puede determinarse fácilmente para dos casos extremos: si la viga es infinitamente rígida (es decir, la rigidez a la flexión $EI_b = \infty$, figura 1.3.2b),

$$k = \sum_{\text{columnas}} \frac{12EI_c}{h^3} = 24\frac{EI_c}{h^3} \tag{1.3.2}$$

Por otra parte, para una viga sin rigidez (es decir, $EI_b = 0$, figura 1.3.2c),

$$k = \sum_{\text{columnas}} \frac{3EI_c}{h^3} = 6\frac{EI_c}{h^3} \tag{1.3.3}$$

Observe que para los dos valores extremos de la rigidez de la viga, la rigidez lateral de la estructura es independiente de L, la longitud de la viga o el tamaño de la crujía.

La rigidez lateral del marco con un valor intermedio de la rigidez de la viga más realista, puede calcularse mediante los procedimientos estándar del análisis estructural estático. La matriz de rigidez del marco se formula con respecto a tres GDL: el desplazamiento lateral u y las rotaciones de los dos nudos viga-columna (figura 1.3.2a). La relación fuerza

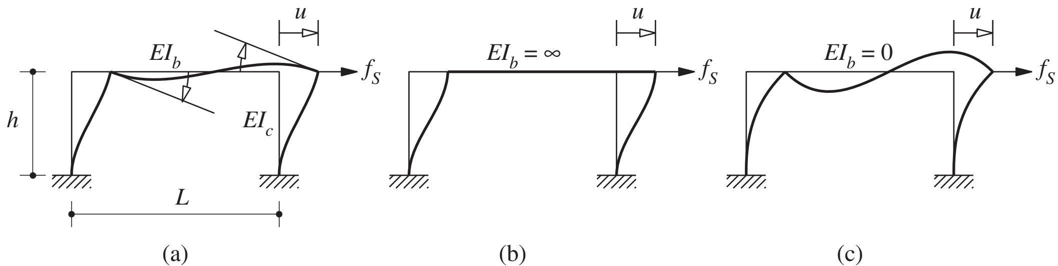


Figura 1.3.2

†En este libro el término preferido para I es *segundo momento de área* en vez del que se usa comúnmente, *momento de inercia*; este último se reservará para definir los efectos de la inercia asociada con el movimiento rotacional de los cuerpos rígidos.

lateral-desplazamiento de la ecuación (1.3.1) se determina por condensación estática o por eliminación de los GDL de rotación. Al aplicar este procedimiento a un marco con $L = 2h$ y $EI_b = EI_c$, se obtiene su rigidez lateral (vea el ejemplo 1.1):

$$k = \frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} \tag{1.3.4}$$

La rigidez lateral del marco puede calcularse de manera similar para cualquier valor de I_b, I_c, L y h utilizando los coeficientes de rigidez de un elemento uniforme a flexión que se presentan en el apéndice 1. Si se desprecian las deformaciones por cortante en los elementos, el resultado puede escribirse en la forma

$$k = \frac{24EI_c}{h^3}\frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \tag{1.3.5}$$

donde $\rho = (EI_b/L) \div (2EI_c/h)$ es la *relación de rigidez de la viga con la columna* (que se describe en la sección 18.1.1). Para $\rho = 0, \infty$ y $\frac{1}{4}$, la ecuación (1.3.5) se reduce a los resultados de las ecuaciones (1.3.3), (1.3.2) y (1.3.4), respectivamente. La rigidez lateral se representa de manera gráfica como una función de ρ en la figura 1.3.3; se incrementa por un factor de 4 cuando ρ crece desde cero hasta infinito.

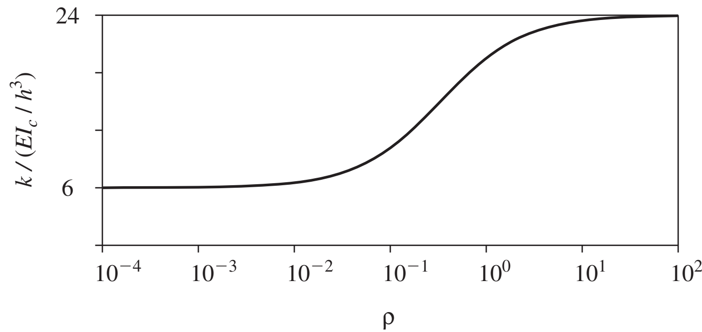


Figura 1.3.3 Variación de la rigidez lateral, k, con la relación de rigidez de la viga con la columna, ρ.

Ejemplo 1.1

Calcule la rigidez lateral para el marco mostrado en la figura E1.1a, suponiendo que los elementos son infinitamente rígidos en la dirección axial.

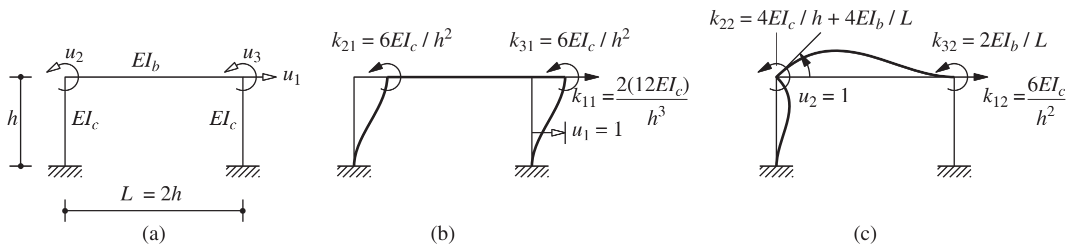


Figura E1.1

Solución Esta estructura puede analizarse mediante cualquiera de los métodos estándar, incluyendo la distribución de momentos. Aquí se utiliza la definición de coeficientes de influencia de la rigidez para resolver el problema.

El sistema tiene los tres GDL mostrados en la figura E1.1a. Para obtener la primera columna de la matriz de rigidez de 3 × 3, se impone un desplazamiento unitario en el GDL u_1, con $u_2 = u_3 = 0$. Las fuerzas k_{i1} necesarias para mantener esta configuración deformada se muestran en la figura E1.1b. Éstas se determinan usando los coeficientes de rigidez para un elemento uniforme a la flexión que se presenta en el apéndice 1. Los elementos k_{i2} en la segunda columna de la matriz de rigidez se determinan imponiendo $u_2 = 1$ con $u_1 = u_3 = 0$; vea la figura E1.1c. De manera similar, los elementos k_{i3} en la tercera columna de la matriz de rigidez pueden determinarse al imponer los desplazamientos $u_3 = 1$ con $u_1 = u_2 = 0$. Así, se conoce la matriz de rigidez de 3 × 3 de la estructura y es posible escribir las ecuaciones de equilibrio. Para un marco con $I_b = I_c$ sometido a la fuerza lateral f_S, se tiene

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

A partir de la segunda y tercera ecuaciones, las rotaciones de los nudos pueden expresarse en términos del desplazamiento lateral de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix} u_1 = -\frac{6}{7h}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \tag{b}$$

Al sustituir la ecuación (b) en la primera de las tres ecuaciones de la ecuación (a) se obtiene

$$f_S = \left(\frac{24EI_c}{h^3} - \frac{EI_c}{h^3}\frac{6}{7h}\langle 6h \quad 6h\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) u_1 = \frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} u_1 \tag{c}$$

Así, la rigidez lateral del marco es

$$k = \frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} \tag{d}$$

Este procedimiento para eliminar rotaciones de los nudos, conocido como el *método de condensación estática*, se presenta en libros de texto sobre el análisis estático de las estructuras. Este tema se retomará en el capítulo 9.

1.3.2 Sistemas inelásticos

En la figura 1.3.4 se muestra la relación experimental fuerza-deformación de un elemento estructural de acero sometido a niveles de deformacion cíclicos esperados durante un sismo. La curva de carga inicial es no lineal a los niveles más grandes de deformación y las curvas de descarga y recarga difieren de la curva de carga inicial; se dice que un sistema así es *inelástico*. Esto implica que la relación fuerza-deformación depende de la dirección, es decir, depende de si la deformación está aumentando o disminuyendo. De este modo, la fuerza restauradora es una función implícita de la deformación:

$$f_S = f_S(u) \tag{1.3.6}$$

La relación fuerza-deformación para el marco idealizado de un nivel (figura 1.3.1a) que se deforma en el rango inelástico puede determinarse de dos formas. Un enfoque consiste en utilizar métodos de análisis estructural estático no lineal. Por ejemplo, en el análisis de una estructura de acero con un modelo constitutivo esfuerzo-deformación supuesta, el análisis

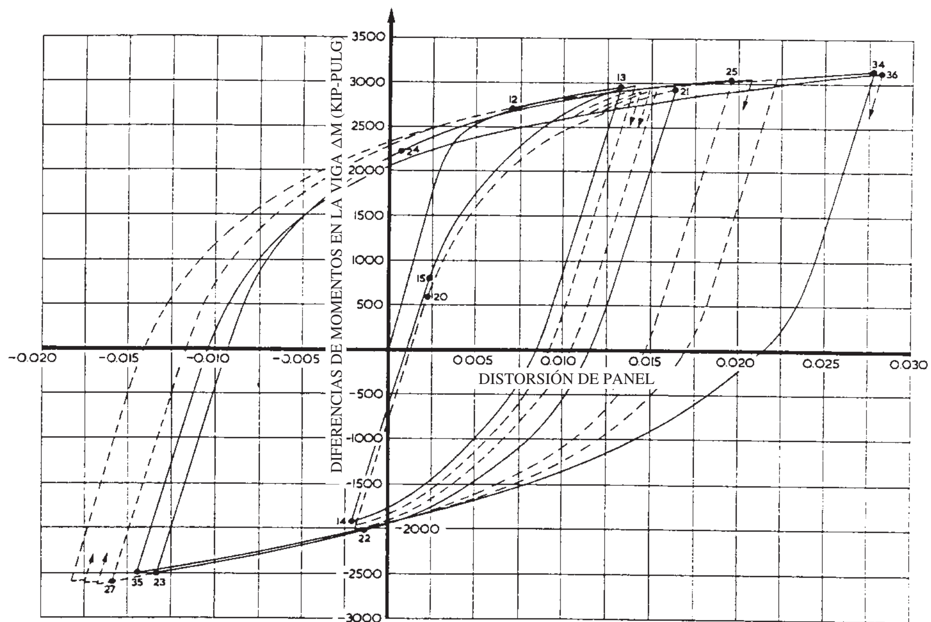


Figura 1.3.4 Relación fuerza-deformación para un elemento estructural de acero. (Tomada de H. Krawinkler, V. V. Bertero y E. P. Popov, "comportamiento inelástico de subensambles de acero viga-columna". *Informe No. 71-7 CEIE*, Universidad de California, Berkeley, 1971).

mantiene un registro del inicio y la propagación de la fluencia en ubicaciones críticas y la formación de articulaciones plásticas para obtener la curva de carga inicial (*o-a*) que se muestra en la figura 1.3.1c. Las curvas de descarga (*a-c*) y recarga (*c-a*) pueden calcularse de manera similar o es posible definirlas a partir de la curva de carga inicial con las hipótesis existentes. Otro enfoque es definir la relación inelástica de fuerza-deformación como una versión idealizada de los datos experimentales, como en la figura 1.3.4.

Se tiene interés en el estudio de la respuesta dinámica de los sistemas inelásticos porque muchas estructuras están diseñadas bajo el supuesto de que estarán sometidas a grietas, fluencia y daños durante algún movimiento intenso del terreno causado por los sismos.

1.4 FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO

Como se mencionó con anterioridad, el proceso mediante el cual la amplitud de la vibración libre disminuye de manera constante se denomina *amortiguamiento*. En el amortiguamiento, la energía del sistema en vibración se disipa por diversos mecanismos y, con frecuencia, más de un mecanismo puede estar presente al mismo tiempo. En los sistemas "limpios" sencillos como los modelos de laboratorio de la figura 1.1.4, la mayor parte de la disipación de energía puede ser asociada al efecto térmico del esfuerzo elástico repetido del material y de la fricción interna que se produce en un sólido cuando se deforma. Sin embargo, en las estructuras reales existen muchos otros mecanismos que también contribuyen a la disipación de la energía. En un edificio en vibración éstos incluyen la fricción en las conexiones de acero,

la apertura y cierre de microfisuras en el concreto y la fricción entre la propia estructura y los elementos no estructurales, tales como muros divisorios. Parece imposible identificar o describir matemáticamente cada uno de estos mecanismos de disipación de energía en un edificio real.

Como resultado, el amortiguamiento de las estructuras reales se representa por lo general en una forma muy idealizada. Para muchos fines, el amortiguamiento real en una estructura de 1GDL puede idealizarse de manera satisfactoria por medio de un amortiguador viscoso lineal. El coeficiente de amortiguamiento se selecciona de modo que la energía disipada sea equivalente a la energía disipada en todos los mecanismos de amortiguamiento, combinados, presentes en la estructura real. Por lo anterior, esta idealización se denomina *amortiguamiento viscoso equivalente*, un concepto que se desarrolla con mayor detalle en el capítulo 3.

En la figura 1.4.1a se muestra un amortiguador viscoso lineal sometido a una fuerza f_D en la dirección del GDL u. La fuerza interna en el amortiguador es igual y opuesta a la fuerza externa f_D (figura 1.4.1b). Como se muestra en la figura 1.4.1c, la fuerza de amortiguamiento de f_D se relaciona con la velocidad $\dot{u}$ a través del amortiguador viscoso lineal por

$$f_D = c\dot{u} \tag{1.4.1}$$

donde la constante c es el *coeficiente de amortiguamiento viscoso*; tiene unidades de fuerza $\times$ tiempo/longitud.

A diferencia de la rigidez de una estructura, el coeficiente de amortiguamiento no puede calcularse a partir de las dimensiones de la estructura y los tamaños de los elementos estructurales. Esto no debería ser sorprendente puesto que, como se ha señalado antes, no es posible identificar todos los mecanismos que disipan la energía de vibración en las estructuras reales. Así, los experimentos de vibración en estructuras reales proporcionan datos para evaluar el coeficiente de amortiguamiento. Éstos pueden ser experimentos de vibración libre que conducen a datos como los que se muestran en la figura 1.1.4; la razón de decaimiento del movimiento en la vibración libre proveerá una base para evaluar el coeficiente de amortiguamiento, como se verá en el capítulo 2. La propiedad de amortiguamiento también puede determinarse a partir de experimentos de vibración forzada, un tema que se estudia en el capítulo 3.

El amortiguador viscoso equivalente tiene la intención de modelar la disipación de energía para amplitudes de deformación dentro del límite elástico lineal de toda la estructura. Dentro de este intervalo de deformaciones, el coeficiente de amortiguamiento c determinado a partir de pruebas experimentales puede variar con la amplitud de la deformación. Esta no linealidad del amortiguamiento en general no se considera explícitamente en los análisis dinámicos. Esto puede tratarse de manera indirecta mediante la selección de un valor para el coeficiente de

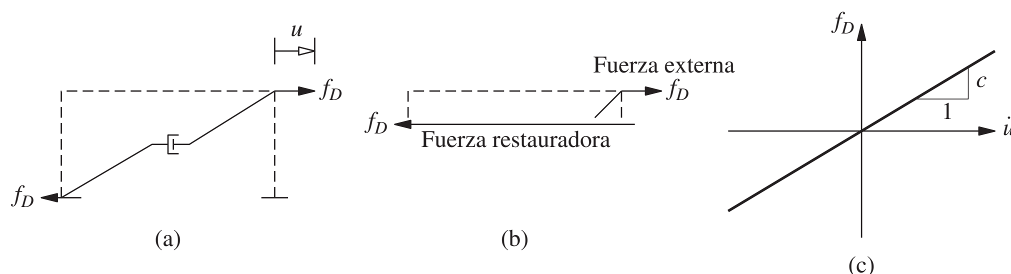


Figura 1.4.1

amortiguamiento conistente con la amplitud de deformación esperada, y que por lo regular se toma como la deformación asociada con el límite elástico lineal de la estructura.

Se disipa energía adicional debido al comportamiento inelástico de la estructura a grandes deformaciones. Ante la acción de fuerzas o deformaciones cíclicas, este comportamiento implica la formación de un ciclo de histéresis fuerza-deformación (figura 1.3.1c). La energía de amortiguamiento disipada durante un ciclo de deformación entre los límites de deformación $\pm u_o$ está dada por el área dentro del ciclo de histéresis *abcda* (figura 1.3.1c). Esta disipación de energía no suele modelarse mediante un amortiguador viscoso, en especial si la excitación es un movimiento sísmico, por razones que se describen en el capítulo 7. En cambio, el enfoque más común, directo y preciso para explicar la disipación de energía debida al comportamiento inelástico es determinar la relación inelástica entre la fuerza restauradora y la deformación, como se muestra en las figuras 1.3.1c y 1.3.4, al resolver la ecuación de movimiento (capítulo 5). Tales relaciones de fuerza-deformación se obtienen a partir de pruebas experimentales en las estructuras o componentes estructurales a bajas velocidades de deformación, lo que excluye cualquier disipación de energía derivada de los efectos dependientes de la velocidad de deformación. El enfoque habitual es modelar este amortiguamiento en el intervalo de deformaciones inelásticas mediante el mismo amortiguador viscoso que se definió anteriormente para pequeñas deformaciones en el intervalo elástico lineal.

1.5 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO: FUERZA EXTERNA

En la figura 1.5.1a se muestra el marco idealizado de un nivel que se presentó con anterioridad, sometido a una fuerza dinámica $p(t)$ aplicada de manera externa en la dirección del GDL u. Esta notación indica que la fuerza p varía con el tiempo t. El desplazamiento resultante de la masa también varía con el tiempo y se indica mediante $u(t)$. En las secciones 1.5.1 y 1.5.2 se obtiene la ecuación diferencial que controla el desplazamiento $u(t)$ mediante dos métodos que utilizan (1) la Segunda ley del movimiento de Newton y (2) el equilibrio dinámico. En la sección 1.5.3 se presenta una manera alternativa para obtener dicha ecuación.

1.5.1 Uso de la Segunda ley del movimiento de Newton

En la figura 1.5.1b se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa en un cierto instante de tiempo. Éstas incluyen la fuerza externa $p(t)$, la fuerza restauradora elástica (o inelástica) f_S (figura 1.3.1) y la fuerza de amortiguamiento f_D (figura 1.4.1). Se considera que la fuerza externa es positiva en la dirección del eje x, y que el desplazamiento $u(t)$, la velocidad $\dot{u}(t)$ y la aceleración $\ddot{u}(t)$ también son positivas en la dirección del eje x. Las fuerzas elásticas y

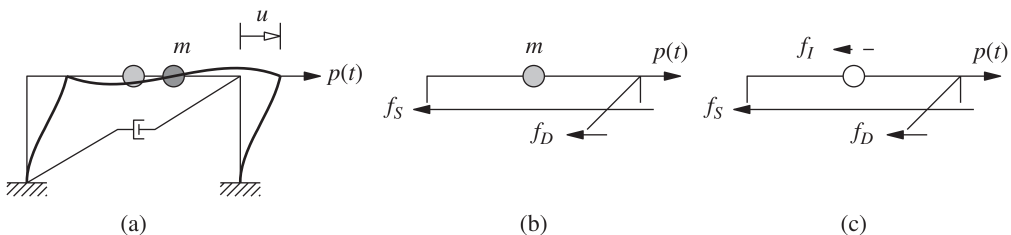


Figura 1.5.1

de amortiguamiento se muestran actuando en la dirección opuesta, dado que son las fuerzas internas que se oponen a la deformación y a la velocidad respectivamente.

La fuerza resultante a lo largo del eje x es $p - f_S - f_D$, y a partir de la Segunda ley del movimiento de Newton se tiene

$$p - f_S - f_D = m\ddot{u} \quad \text{o} \quad m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t) \tag{1.5.1}$$

Después de sustituir las ecuaciones (1.3.1) y (1.4.1), esta ecuación se convierte en

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{1.5.2}$$

Ésta es la ecuación de movimiento que controla la deformación o el desplazamiento $u(t)$ de la estructura idealizada en la figura 1.5.1a, que se supone elástica lineal, sometida a una fuerza externa dinámica $p(t)$. Las unidades de masa son fuerza/aceleración.

Esta deducción puede extenderse con facilidad a sistemas inelásticos. La ecuación (1.5.1) todavía es válida y todo lo que debe hacerse es sustituir la ecuación (1.3.1), restringida a los sistemas lineales, por la ecuación (1.3.6), válida para los sistemas inelásticos. Por lo tanto, para tales sistemas, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u) = p(t) \tag{1.5.3}$$

1.5.2 Equilibrio dinámico

Después de haber sido entrenados para pensar en términos del equilibrio de fuerzas, los ingenieros estructurales pueden encontrar el principio de *equilibrio dinámico* de D'Alembert muy atractivo. Este principio se basa en la noción de una *fuerza inercial* ficticia, una fuerza que es igual al producto de la masa por su aceleración y que actúa en dirección opuesta a la aceleración. Lo anterior establece que, con las fuerzas de inercia incluidas, un sistema está en equilibrio en cada instante de tiempo. Así, es posible dibujar un diagrama de cuerpo libre de una masa en movimiento y pueden usarse los principios de la estática para desarrollar la ecuación de movimiento.

En la figura 1.5.1c se presenta el diagrama de cuerpo libre en el momento t, donde la masa se ha reemplazado por su fuerza de inercia, representada mediante una línea discontinua para distinguir esta fuerza ficticia de las fuerzas reales. Al igualar a cero la sumatoria de todas las fuerzas, se obtiene la ecuación (1.5.1b),[†] que se obtuvo con anterioridad utilizando la Segunda ley del movimiento de Newton.

1.5.3 Componentes de rigidez, amortiguamiento y masa

En esta sección la ecuación que descibe el desplazamiento para el marco idealizado de un solo nivel se formula con un punto de vista alternativo. Bajo la acción de la fuerza externa $p(t)$, las condiciones del sistema se describen mediante el desplazamiento $u(t)$, la velocidad $\dot{u}(t)$, y la aceleración $\ddot{u}(t)$, vea la figura 1.5.2a. Ahora visualice el sistema como la combinación de tres componentes puros: (1) el componente de rigidez: el marco sin amortiguamiento o masa (figura 1.5.2b); (2) el componente de amortiguamiento: el marco con su propiedad de amortiguamiento, pero sin rigidez o masa (figura 1.5.2c) y (3) el componente de masa: la masa del techo sin la rigidez o el amortiguamiento del marco (figura 1.5.2d).

[†]Dos o más ecuaciones en la misma línea con el mismo número de ecuación se referirán como ecuaciones a, b, c, etcétera, de izquierda a derecha.

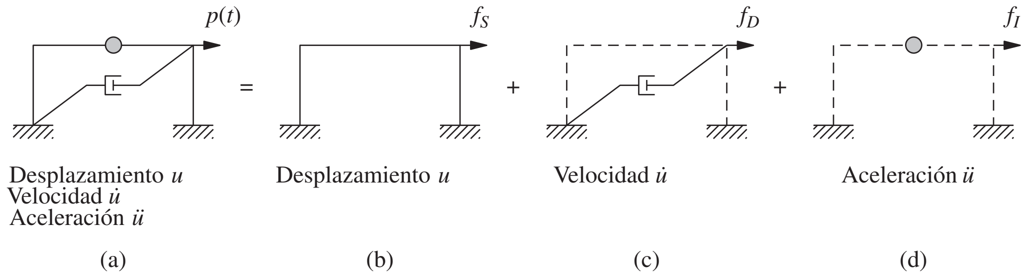


Figura 1.5.2 (a) Sistema; (b) componente de rigidez; (c) componente de amortiguamiento; (d) componente de masa.

La fuerza externa f_S sobre el componente de rigidez se relaciona con el desplazamiento u por medio de la ecuación (1.3.1) si el sistema es elástico lineal, la fuerza externa f_D sobre el componente de amortiguamiento se relaciona con la velocidad $\dot{u}$ mediante la ecuación (1.4.1), y la fuerza externa f_I sobre el componente de masa se relaciona con la aceleración por medio de $f_I = m\ddot{u}$. Por lo tanto, la fuerza externa $p(t)$ aplicada al sistema completo puede visualizarse como distribuida entre los tres componentes de la estructura, y $f_S + f_D + f_I$ debe ser igual a la fuerza aplicada $p(t)$ que conduce a la ecuación (1.5.1b). Aunque este punto de vista alternativo puede parecer innecesario para el sistema sencillo de la figura 1.5.2a, resulta útil para los sistemas complejos (capítulo 9).

Ejemplo 1.2

Un edificio industrial pequeño de un solo nivel, de 20 por 30 pies en planta, se muestra en la figura E1.2 con marcos a momento en la dirección norte-sur y marcos contraventeados en la dirección este-oeste. El peso de la estructura puede idealizarse como 30 lb/pie^2 concentradas en el nivel del techo. Los contravientos horizontales están en la cuerda inferior de las armaduras del techo. Todas las columnas tienen sección de W8 × 24, los segundos momentos de área de la sección transversal respecto a los ejes x y y son $I_x = 82.8$ pulg^4 e $I_y = 18.3$ pulg^4, respectivamente; para el acero, $E = 29{,}000$ ksi. Los contravientos verticales están hechos con varillas de 1 pulgadas de diámetro. Formule la ecuación que controla la vibración libre en (**a**) la dirección norte-sur y (**b**) la dirección este-oeste.

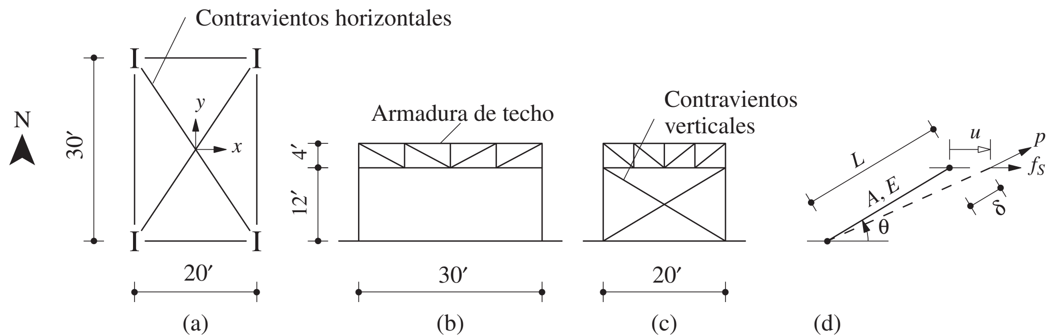


Figura E1.2 (a) Planta; (b) elevaciones este y oeste; (c) elevaciones norte y sur; (d) contraviento.

Solución La masa concentrada en el techo es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{30 \times 30 \times 20}{386} = 46.63 \text{ lb-s}^2/\text{pulg} = 0.04663 \text{ kip-s}^2/\text{pulg}$$

Debido a los contravientos horizontales, el techo puede tratarse como un diafragma infinítamente rígido.

(**a**) *Dirección norte-sur.* Debido a la armadura de techo, cada columna se comporta como una columna empotrada en sus dos extremos y la rigidez lateral de los dos marcos a momento (figura E1.2b) es

$$k_{\text{N-S}} = 4\left(\frac{12EI_x}{h^3}\right) = 4\frac{12(29 \times 10^3)(82.8)}{(12 \times 12)^3} = 38.58 \text{ kips/pulg}$$

y la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{u} + (k_{\text{N-S}})\,u = 0 \tag{a}$$

(**b**) *Dirección este-oeste.* Los marcos contraventeados, como los que se muestran en la figura E1.2c, suelen diseñarse como dos sistemas superpuestos: un marco rígido común que soporta las cargas verticales (muertas y vivas), además de un sistema de contravientos verticales, que se considera en general como una armadura conectada mediante pasadores que resiste las fuerzas laterales. Así, la rigidez lateral de un marco contraventeado puede estimarse como la suma de las rigideces laterales de los contravientos individuales. La rigidez de un contraviento (figura E1.2d) es $k_{\text{contraviento}} = (AE/L)\cos^2\theta$. Esto puede deducirse de la manera siguiente.

Se inicia con la relación fuerza-deformación axial para un contraviento:

$$p = \frac{AE}{L}\delta \tag{b}$$

Por estática $f_S = p\cos\theta$, y por cinemática $u = \delta/\cos\theta$. Al sustituir $p = f_S/\cos\theta$ y $\delta = u\cos\theta$ en la ecuación (b) se obtiene

$$f_S = k_{\text{contraviento}}u \qquad k_{\text{contraviento}} = \frac{AE}{L}\cos^2\theta \tag{c}$$

Para el contraviento de la figura E1.2c, $\cos\theta = 20/\sqrt{12^2 + 20^2} = 0.8575$, $A = 0.785$ pulg^2, $L = 23.3$ pies y

$$k_{\text{contraviento}} = \frac{0.785(29 \times 10^3)}{23.3 \times 12}(0.8575)^2 = 59.8 \text{ kips/pulg}$$

Aunque cada marco tiene dos contravientos, sólo el que está en tensión proporciona resistencia lateral; el que está en compresión se pandeará ante una fuerza axial pequeña y contribuirá poco a la rigidez lateral. Teniendo en cuenta los dos marcos,

$$k_{\text{E-W}} = 2 \times 59.8 = 119.6 \text{ kips/pulg} \tag{d}$$

y la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{u} + (k_{\text{E-W}})\,u = 0$$

Observe que el error al despreciar la rigidez de las columnas es pequeño: $k_{\text{col}} = 2 \times 12EI_y/h^3 = 4.26$ kips/pulg contra $k_{\text{contraviento}} = 59.8$ kips/pulg.

Ejemplo 1.3

En la figura E1.3 se muestra una trabe cajón de un puente, hecha de concreto, con 375 pies de largo sobre cuatro soportes (dos estribos y dos ejes intermedios ubicados simétricamente). El

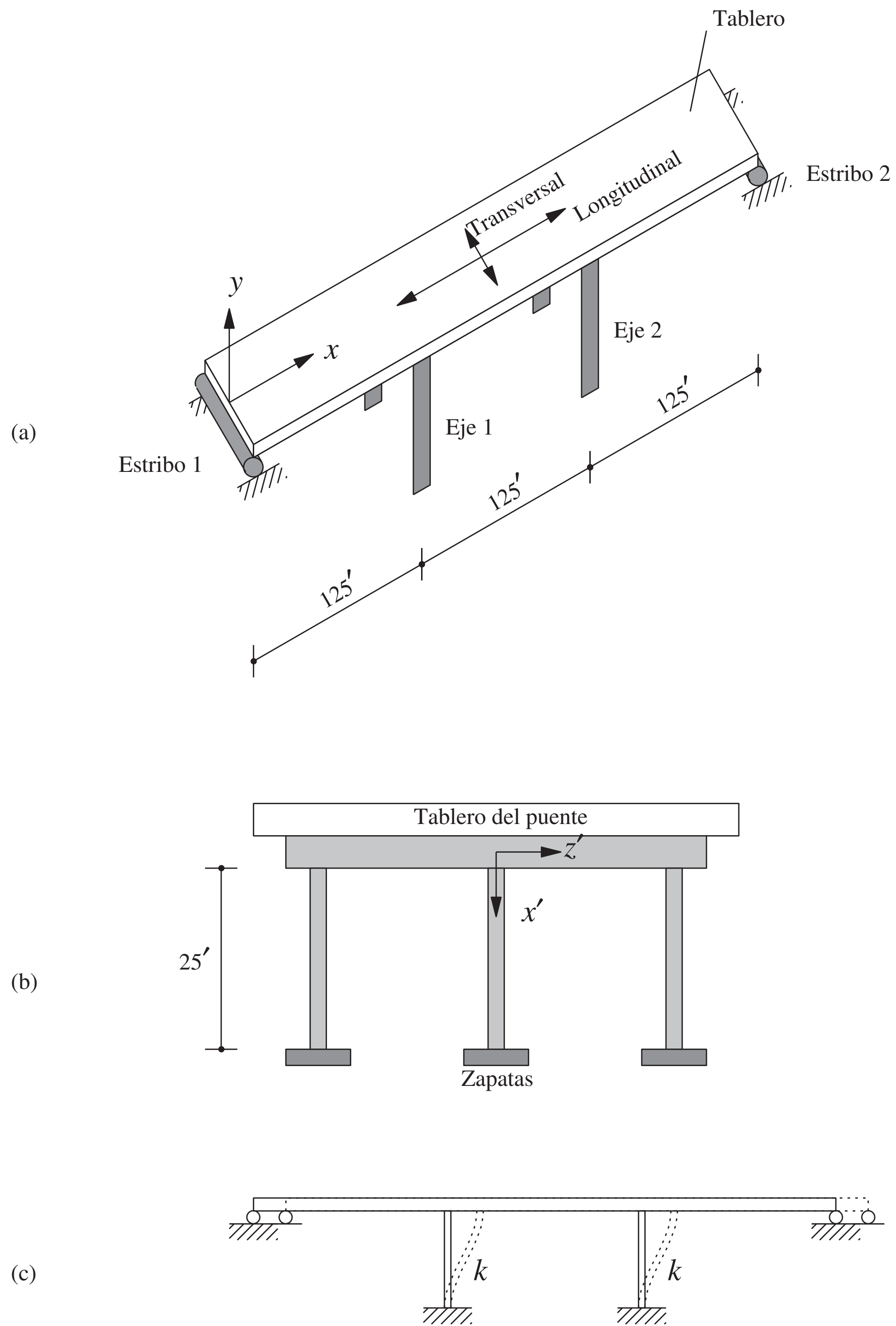

Tablero
Estribo 2
Transversal
Longitudinal
y
x
Eje 2
Eje 1
(a)
Estribo 1
125′
125′
125′
Tablero del puente
z′
x′
25′
(b)
Zapatas
(c)
k
k

Figura E1.3

área de la sección transversal del tablero del puente es de 123 $pies^2$. El peso del puente se idealiza como concentrado en el nivel de la cubierta, el peso volumétrico del concreto es de 150 lb/pie^3. El peso de las columnas en los ejes puede despreciarse. Cada eje consiste en tres columnas de 25 pies de altura con sección transversal circular, donde $I_{y'} = I_{z'} = 13$ $pies^4$ (figura E1.3b). Formule la ecuación de movimiento que controla la vibración libre en la dirección longitudinal. El módulo de elasticidad del concreto es $E = 3000$ ksi.

Solución El peso por unidad de longitud concentrado en el nivel de la cubierta es (123 × 1) 150 = 18.45 kips/pie. El peso total concentrado en el nivel de la cubierta es

$$w = 18.45 \times 375 = 6919 \text{ kips}$$

y la masa correspondiente es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{6919}{32.2} = 214.9 \text{ kip-s}^2/\text{pie}$$

La rigidez longitudinal del puente se calcula suponiendo que la cubierta del puente se desplazará como cuerpo rígido como se muestra en la figura E1.3c. Cada columna de un acodamiento se comporta como una columna empotrada en sus dos extremos. La rigidez longitudinal proporcionada por cada acodamiento es

$$k_{\text{eje}} = 3\left(\frac{12EI_{z'}}{h^3}\right) = 3\left[\frac{12(3000 \times 144)13}{(25)^3}\right] = 12{,}940 \text{ kips/pie}$$

Dos ejes proporcionan una rigidez total de

$$k = 2 \times k_{\text{eje}} = 2 \times 12{,}940 = 25{,}880 \text{ kips/pie}$$

La ecuación que controla el desplazamiento longitudinal u es

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

1.6 SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR

Se ha presentado el sistema 1GDL idealizando una estructura de un nivel (figura 1.5.1a), un enfoque que debería ser atractivo para los estudiantes de ingeniería estructural. Sin embargo, el sistema 1GDL clásico es el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 1.6.1a. La dinámica de este sistema se desarrolla en los libros de texto sobre vibración mecánica y física elemental. Si se considera que el resorte y el amortiguador no tienen masa, que la masa es rígida y que todo movimiento ocurre en la dirección del eje x, se tiene un sistema de 1GDL. En la figura 1.6.1b se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa, las cuales incluyen la fuerza restauradora elástica, $f_S = ku$, ejercida por un resorte lineal de rigidez k, y la fuerza restauradora de amortiguamiento, $f_D = c\dot{u}$, debida a un amortiguador viscoso lineal. Entonces, a partir de la Segunda ley del movimiento de Newton resulta la ecuación (1.5.1b). De manera alternativa, puede obtenerse la misma ecuación mediante el uso del principio de D'Alembert y al escribir una ecuación de equilibrio de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, incluyendo la fuerza de inercia (figura 1.6.lc). Es evidente que la ecuación de movimiento obtenida anteriormente, para el marco idealizado de un nivel en la figura 1.5.1a, también es válida para el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 1.6.1a.

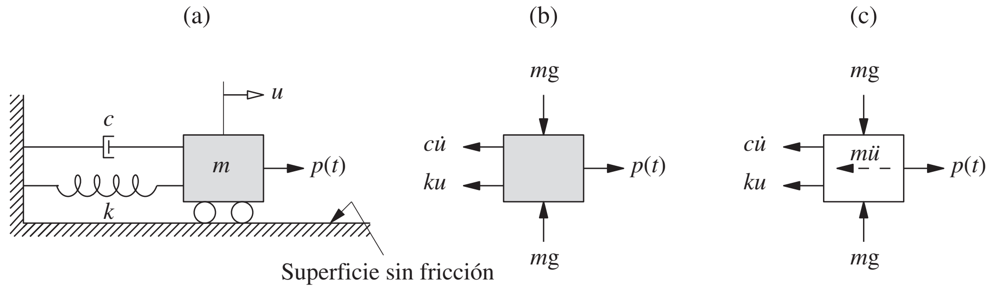


Figura 1.6.1 Sistema masa-resorte-amortiguador.

Ejemplo 1.4

Deduzca la ecuación de movimiento del peso w suspendido por un resorte en el extremo libre de la viga de acero en voladizo que se muestra en la figura E1.4a. Para el acero, $E = 29{,}000$ ksi. Desprecie las masas de la viga y el resorte.

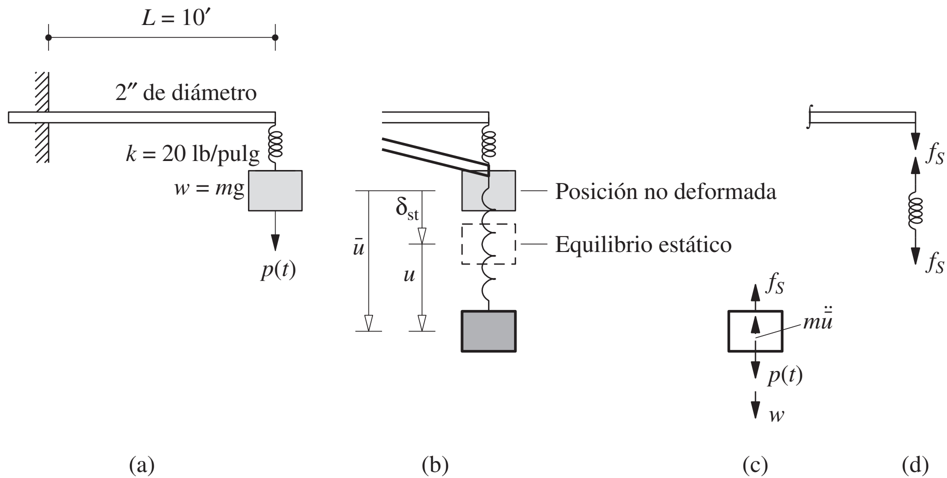


Figura E1.4 (a) Sistema; (b) posiciones no deformada, deformada y de equilibrio estático; (c) diagrama de cuerpo libre; (d) fuerzas del resorte y la viga.

Solución En la figura E1.4b se muestra la posición deformada del extremo libre de la viga, el resorte y la masa. El desplazamiento $\bar{u}$ de la masa se mide desde su posición inicial con la viga y el resorte en su configuración original no deformada. El equilibrio de fuerzas de la figura E1.4c resulta en

$$m\ddot{\bar{u}} + f_S = w + p(t) \tag{a}$$

donde

$$f_S = k_e \bar{u} \tag{b}$$

y falta por determinar la rigidez efectiva k_e del sistema. La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\bar{u}} + k_e \bar{u} = w + p(t) \tag{c}$$

El desplazamiento $\bar{u}$ puede expresarse como

$$\bar{u} = \delta_{st} + u \tag{d}$$

donde δ_{st} es el desplazamiento estático debido al peso w y u se mide desde la posición de equilibrio estático. Al sustituir la ecuación (d) en la ecuación (a) y al observar (1) que $\ddot{\bar{u}} = \ddot{u}$ porque δ_{st} no varía con el tiempo y (2) que $k_e\delta_{st} = w$, resulta

$$m\ddot{u} + k_e u = p(t) \tag{e}$$

Observe que esto es igual a la ecuación (1.5.2) con $c = 0$ para un sistema de masa-resorte orientado en la dirección horizontal (figura 1.6.1). También observe que la ecuación de movimiento (e) que controla u, medido desde la posición de equilibrio estático, no se ve afectada por las fuerzas de gravedad.

Por esta razón, en general se formula un problema de análisis dinámico para un sistema lineal con su posición de equilibrio estático como la posición de referencia. El desplazamiento $u(t)$ y las fuerzas asociadas internas en el sistema representarán la respuesta dinámica del sistema. Los desplazamientos totales y las fuerzas se obtienen al sumar las cantidades estáticas correspondientes a la respuesta dinámica.

Falta por determinar la rigidez efectiva k_e. Ésta relaciona la fuerza estática f_S con el desplazamiento resultante $\bar{u}$ mediante

$$f_S = k_e \bar{u} \tag{f}$$

donde

$$\bar{u} = \bar{u}_{\text{resorte}} + \bar{u}_{\text{viga}} \tag{g}$$

donde $\bar{u}_{\text{viga}}$ es la deflexión del extremo derecho de la viga y $\bar{u}_{\text{resorte}}$ es la deformación en el resorte. Con referencia a la figura E1.4d,

$$f_S = k\bar{u}_{\text{resorte}} = k_{\text{viga}}\bar{u}_{\text{viga}} \tag{h}$$

En la ecuación (g), sustituya $\bar{u}$ de la ecuación (f) y $\bar{u}_{\text{resorte}}$ y $\bar{u}_{\text{viga}}$ de la ecuación (h) para obtener

$$\frac{f_S}{k_e} = \frac{f_S}{k} + \frac{f_S}{k_{\text{viga}}} \qquad \text{o} \qquad k_e = \frac{k k_{\text{viga}}}{k + k_{\text{viga}}} \tag{i}$$

Ahora $k = 20$ lb/pulg y

$$k_{\text{viga}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29 \times 10^6)[\pi(1)^4/4]}{(10 \times 12)^3} = 39.54 \text{ lb/pulg}$$

Al sustituir k y k_{viga} en la ecuación (i) resulta

$$k_e = 13.39 \text{ lb/pulg}$$

Como se mencionó anteriormente, las fuerzas de gravedad pueden omitirse de la formulación de la ecuación que controla el movimiento para el sistema de la figura E1.4 siempre que el desplazamiento u se mida desde la posición de equilibrio estático. Sin embargo, es necesario considerar las cargas de gravedad si éstas actúan como fuerzas de restauración (ejemplo 1.5) o como fuerzas desestabilizadoras (ejemplo 1.6).

Ejemplo 1.5

Deduzca la ecuación que controla el movimiento libre de un péndulo simple (figura E1.5a), que consiste en una masa puntual m suspendida mediante una cuerda ligera de longitud L.

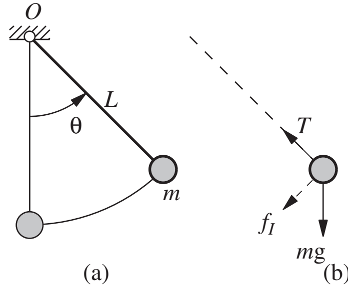


Figura E1.5 (a) Péndulo simple; (b) diagrama de cuerpo libre.

Solución En la figura E1.5a se muestra la posición desplazada del péndulo, la cual se define mediante el ángulo θ medido desde la posición vertical, y en la figura E1.5b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa. Las fuerzas que actúan son el peso mg, la tensión T en la cuerda, y la fuerza inercial ficticia de D'Alembert $f_I = mL\ddot{\theta}$.

El equilibrio de los momentos de las fuerzas respecto a O da

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\,sen\,\theta = 0 \tag{a}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal que controla θ.

Para rotaciones pequeñas, sen $\theta \simeq \theta$ y la ecuación de movimiento [ecuación (a)] puede reescribirse como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{b}$$

Ejemplo 1.6

El sistema de la figura E1.6 se compone de un peso w unido a una barra infinitamente rígida sin masa de longitud L, la cual se conecta a su soporte mediante un resorte rotacional de rigidez k. Deduzca la ecuación de movimiento. Desprecie la inercia rotacional y suponga deflexiones pequeñas. ¿Cuál es el peso de pandeo?

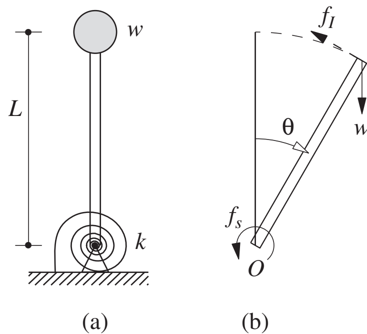


Figura E1.6

Solución En la figura E1.6b se muestra la posición desplazada del sistema, que se define mediante el ángulo θ medido desde la posición vertical y el diagrama de cuerpo libre, el cual incluye el peso w, la fuerza del resorte (momento) $f_S = k\theta$, y la fuerza inercial ficticia de D'Alembert $f_I = (w/g)L\ddot{\theta}$.

El equilibrio de los momentos respecto a O da

$$f_I L + f_S = mgL \operatorname{sen} \theta$$

o bien

$$\frac{w}{g} L^2 \ddot{\theta} + k\theta = wL \operatorname{sen} \theta \tag{a}$$

Para rotaciones pequeñas sen $\theta \simeq \theta$ y la ecuación (a) puede reescribirse como

$$\frac{w}{g} L^2 \ddot{\theta} + (k - wL)\theta = 0 \tag{b}$$

Observe que la carga de gravedad reduce la rigidez efectiva del sistema. Si el peso $w = k/L$, la rigidez efectiva es cero y el sistema se vuelve inestable bajo su propio peso. Por lo tanto, la carga de pandeo (o peso) es

$$w_{\text{cr}} = \frac{k}{L} \tag{c}$$

1.7 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO: EXCITACIÓN SÍSMICA

En las regiones propensas a sismos el principal problema de dinámica estructural que afecta a los ingenieros estructurales es el comportamiento de las estructuras sometidas a movimientos de la base de la estructura inducidos por sismos. El desplazamiento del terreno se indica por u_g, el desplazamiento total (o absoluto) de la masa por u^t, y el desplazamiento relativo entre la masa y el terreno por u (figura 1.7.1). En cada instante de tiempo, estos desplazamientos se relacionan mediante

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t) \tag{1.7.1}$$

Tanto u^t como u_g se refieren al mismo marco de referencia inercial y sus direcciones positivas coinciden.

La ecuación de movimiento para el sistema idealizado de un nivel de la figura 1.7.1a, sometido a la excitación sísmica, puede deducirse por cualquiera de los enfoques presentados en la sección 1.5. Aquí se opta por utilizar el concepto de equilibrio dinámico. A partir del diagrama de cuerpo libre que incluye la fuerza de inercia f_I, mostrada en la figura 1.7.1b, la ecuación de equilibrio dinámico es

$$f_I + f_D + f_S = 0 \tag{1.7.2}$$

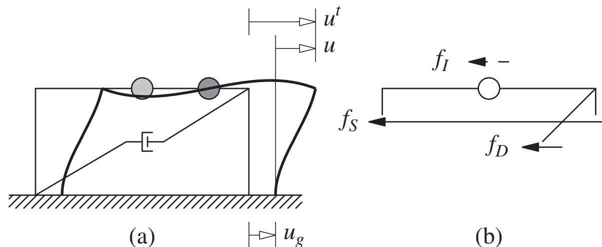


Figura 1.7.1

Sólo el movimiento relativo u entre la masa y la base, debido a la deformación estructural, produce fuerzas elásticas y de amortiguamiento (es decir, el componente de cuerpo rígido del desplazamiento de la estructura no produce fuerzas internas). Así, para un sistema lineal, las ecuaciones (1.3.1) y (1.4.1) siguen siendo válidas. La fuerza de inercia f_I se relaciona con la aceleración $\ddot{u}^t$ de la masa mediante

$$f_t = m\ddot{u}^t \tag{1.7.3}$$

Al sustituir las ecuaciones (1.3.1), (1.4.1) y (1.7.3) en la ecuación (1.7.2) y utilizar la ecuación (1.7.1), se obtiene

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \tag{1.7.4}$$

Ésta es la ecuación de movimiento que controla el desplazamiento relativo o la deformación $u(t)$ de la estructura elástica lineal de la figura 1.7.1a, sometida a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Para los sistemas inelásticos, la ecuación (1.7.2) es válida, pero la ecuación (1.3.1) debe sustituirse por la ecuación (1.3.6). La ecuación de movimiento resultante es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{1.7.5}$$

Al comparar las ecuaciones (1.5.2) y (1.7.4), o las ecuaciones (1.5.3) y (1.7.5), se observa que las ecuaciones de movimiento para la estructura sometida a dos excitaciones distintas [la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ y la fuerza externa $= -m\ddot{u}_g(t)$] son una misma. Así, el desplazamiento relativo o deformación $u(t)$ de la estructura debida a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ será idéntica al desplazamiento $u(t)$ de la estructura si su base fuese estacionaria y se sometiera a una fuerza externa $= -m\ddot{u}_g(t)$. Entonces, como se muestra en la figura 1.7.2, el movimiento del terreno puede sustituirse por la *fuerza sísmica efectiva* (que se indica mediante el subíndice "ef"):

$$p_{\text{ef}}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{1.7.6}$$

Esta fuerza es igual a la masa por la aceleración del terreno, que actúa opuesta a la aceleración. Es importante reconocer que la fuerza sísmica efectiva es proporcional a la masa de la estructura. Por lo tanto, si la masa estructural se incrementa, el diseñador estructural aumentará la fuerza sísmica efectiva.

Aunque los componentes rotacionales del movimiento del terreno no se miden durante los sismos, éstos pueden estimarse a partir de los componentes de traslación medidos, lo cual es de interés para aplicar los conceptos anteriores a esta excitación. Con este propósito, observe la torre en voladizo de la figura 1.7.3a, que puede considerarse como una idealización

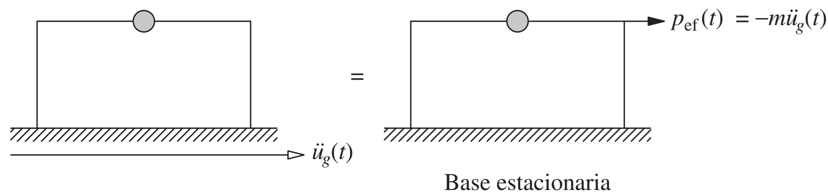


Figura 1.7.2 Fuerza sísmica efectiva: movimiento horizontal del terreno.

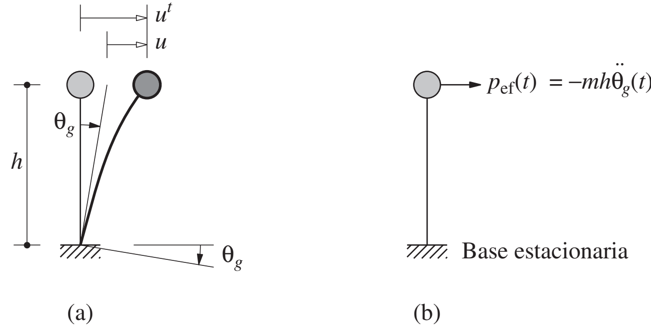


Figura 1.7.3 Fuerza sísmica efectiva: movimiento rotacional del terreno.

del tanque de agua de la figura 1.1.2, sometida a una rotación θ_g de la base. El desplazamiento total u^t de la masa se compone de dos partes: u asociada con la deformación estructural y un componente de cuerpo rígido $h\theta_g$, donde h es la altura de la masa por encima de la base. En cada instante de tiempo, estos desplazamientos se relacionan mediante

$$u^t(t) = u(t) + h\theta_g(t) \tag{1.7.7}$$

Las ecuaciones (l.7.2) y (1.7.3) siguen siendo válidas, pero la aceleración total $\ddot{u}^t(t)$ ahora debe determinarse a partir de la ecuación (1.7.7). Si se ponen todas estas ecuaciones juntas se obtiene

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mh\ddot{\theta}_g(t) \tag{1.7.8}$$

La fuerza sísmica efectiva asociada con la rotación del terreno es

$$p_{\text{ef}}(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t) \tag{1.7.9}$$

Ejemplo 1.7

Una losa infinitamente rígida uniforme de masa total m se apoya en cuatro columnas de altura h conectadas de manera infinitamente rígida a la placa superior y a la losa de cimentación (figura E1.7a). Cada columna tiene una sección transversal rectangular con segundos momentos de área I_x e I_y para la flexión con relación a los ejes x y y, respectivamente. Determine la ecuación de movimiento de este sistema sometido a la rotación $u_{g\theta}$ de la base alrededor de un eje vertical. Desprecie la masa de las columnas.

Solución El par de torsión elástico o el momento de torsión resistente f_S que actúa sobre la masa se muestra en la figura E1.7b, y la Segunda ley de Newton da

$$-f_S = I_O\ddot{u}_\theta^t \tag{a}$$

donde

$$u_\theta^t(t) = u_\theta(t) + u_{g\theta}(t) \tag{b}$$

Aquí u_θ es la rotación de la losa del techo relativa al suelo e $I_O = m(b^2 + d^2)/12$ es el momento de inercia de la losa del techo alrededor del eje normal respecto a la losa, que pasa a través de su centro de masa O. Las unidades del momento de inercia son de fuerza × (longitud)^2/aceleración. El par de torsión f_S y la rotación relativa u_θ se relacionan mediante

$$f_S = k_\theta u_\theta \tag{c}$$

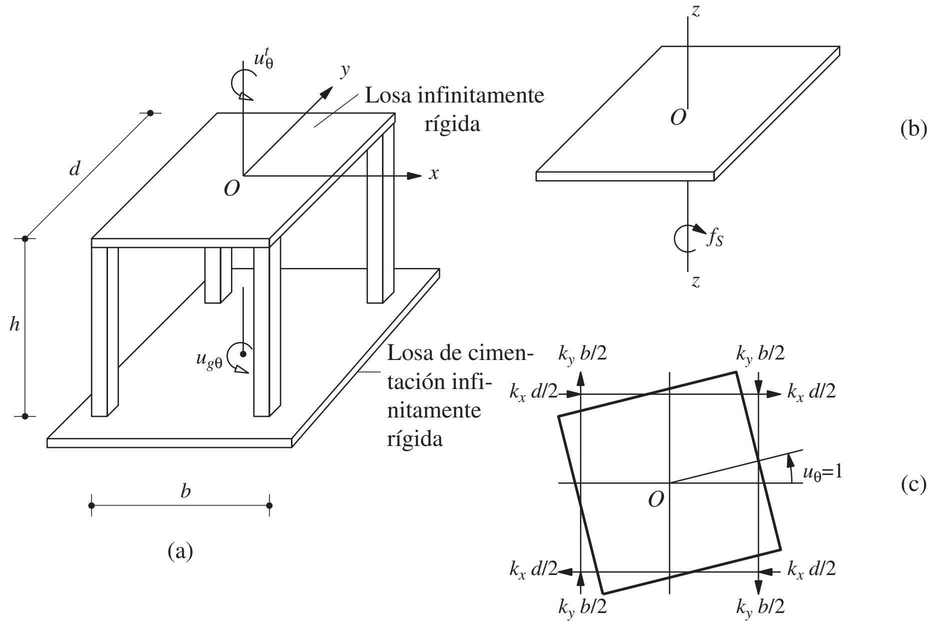


Figura E1.7

donde k_θ es la rigidez torsional. Para determinar k_θ se introduce una rotación unitaria $u_\theta = 1$ y se identifican las fuerzas restauradoras en cada columna (figura E1.7c). Para una columna con ambos extremos empotrados, $k_x = 12EI_y/h^3$ y $k_y = 12EI_x/h^3$. El par de torsión requerido para equilibrar estas fuerzas restauradoras es

$$k_\theta = 4\left(k_x \frac{d}{2}\frac{d}{2}\right) + 4\left(k_y \frac{b}{2}\frac{b}{2}\right) = k_x d^2 + k_y b^2 \quad \text{(d)}$$

Al sustituir las ecuaciones (c), (d) y (b) en (a) resulta

$$I_O \ddot{u}_\theta + (k_x d^2 + k_y b^2)u_\theta = -I_O \ddot{u}_{g\theta} \quad \text{(e)}$$

Ésta es la ecuación que controla la rotación relativa u_θ de la losa del techo debido a la aceleración rotacional $\ddot{u}_{g\theta}$ de la losa de cimentación.

1.8 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ELEMENTOS MECÁNICOS

1.8.1 Planteamiento del problema

Dados la masa m, la rigidez k de un sistema elástico lineal, o la relación fuerza-deformación $f_S(u)$ para un sistema inelástico, el coeficiente de amortiguamiento c y la excitación dinámica [que puede ser una fuerza externa $p(t)$ o la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$] un problema fundamental en la dinámica estructural es determinar la respuesta de un sistema de 1GDL: el sistema idealizado de un solo nivel o el sistema masa-resorte-amortiguador.

El término *respuesta* se utiliza en un sentido general para incluir cualquier cantidad de respuesta, como el desplazamiento, la velocidad o la aceleración de la masa; también, una fuerza interna o el esfuerzo interno en la estructura. Cuando la excitación es una fuerza externa, las cantidades de respuesta de interés son el desplazamiento o la deformación $u(t)$, la velocidad (t) y la aceleración $\ddot{u}(t)$ de la masa. Para la excitación sísmica pueden requerirse tanto los valores totales (o absolutos) como los valores relativos de estas cantidades. El desplazamiento relativo $\dot{u}(t)$ asociado con las deformaciones de la estructura es la cantidad más importante, puesto que las fuerzas internas en la estructura están directamente relacionadas con $u(t)$.

1.8.2 Elementos mecánicos

Una vez que se ha evaluado la historia de deformaciones $u(t)$ mediante el análisis dinámico de la estructura (es decir, al resolver la ecuación de movimiento), es posible determinar los elementos mecánicos (momentos de flexión, fuerzas cortantes y fuerzas axiales) y los esfuerzos requeridos para el diseño estructural mediante el análisis estático de la estructura en cada instante de tiempo (es decir, no se requiere ningún análisis dinámico adicional). Este análisis estático de un marco elástico lineal de un nivel puede visualizarse en dos formas:

1. En cada instante, el desplazamiento lateral u con el que están relacionadas las rotaciones de los nudos es conocido y, por lo tanto, es posible determinarlas; vea la ecuación (b) del ejemplo 1.1. A partir del desplazamiento conocido y la rotación de cada extremo de un elemento estructural (viga y columna), pueden determinarse los elementos mecánicos (momentos de flexión y cortantes) a través de las propiedades de rigidez del elemento (apéndice 1); y los esfuerzos pueden obtenerse a partir de los elementos mecánicos.

2. El segundo método consiste en introducir la *fuerza estática equivalente*, un concepto central en la respuesta sísmica de las estructuras, como se verá en el capítulo 6. En cualquier instante de tiempo t esta fuerza f_S es la fuerza estática externa (aplicada lentamente) que producirá la deformación u determinada por medio del análisis dinámico. Así

$$f_S(t) = ku(t) \tag{1.8.1}$$

donde k es la rigidez lateral de la estructura. De manera alternativa, f_S puede interpretarse como la fuerza externa que producirá la misma deformación u en el componente de rigidez de la estructura (es decir, el sistema sin masa o amortiguamiento, figura 1.5.2b) como la que se determina mediante el análisis dinámico de la estructura (es decir, el sistema con masa, rigidez y amortiguamiento, figura 1.5.2a). Los elementos mecánicos o esfuerzos pueden determinarse en cada instante de tiempo por medio del análisis estático de la estructura sometida a la fuerza f_S, la cual se determina a partir de la ecuación (1.8.1). Para el sistema masa-resorte-amortiguador, no es necesario introducir el concepto de fuerza estática equivalente, debido a que la fuerza del resorte, también dada por la ecuación (1.8.1), puede visualizarse con facilidad.

Para los sistemas inelásticos, los elementos mecánicos pueden determinarse mediante modificaciones apropiadas de estos procedimientos que reconozcan que tales sistemas se analizan típicamente mediante procedimientos en el tiempo paso a paso, donde cada iteración es un paso de tiempo (capítulo 5).

¿Por qué en el segundo método la fuerza externa se define como $f_S(t)$ y no como $f_I(t)$? A partir de la ecuación (1.7.2), $-f_I(t) = f_S(t) + f_D(t) = ku(t) + c\dot{u}(t)$. Resulta inapropiado incluir la fuerza de amortiguamiento dependiente de la velocidad debido a que, para el diseño estructural, los esfuerzos en los elementos calculados deben compararse con los esfuerzos permisibles que se especifican según las pruebas estáticas en los materiales (es decir, pruebas realizadas a bajas velocidades de carga).

1.9 COMBINACIÓN DE RESPUESTAS ESTÁTICAS Y DINÁMICAS

En la aplicación práctica es necesario determinar las fuerzas totales en una estructura, incluyendo las existentes antes de la excitación dinámica de la estructura y las que resultan de dicha excitación. Para un sistema lineal, las fuerzas totales pueden determinarse mediante la combinación de resultados de dos análisis distintos: (1) el análisis estático de la estructura debido a las cargas vivas y muertas, los cambios de temperatura, etcétera, y (2) el análisis dinámico de la estructura sometida a una excitación variable en el tiempo. Esta superposición directa de los resultados de los dos análisis es válida sólo para los sistemas lineales.

Por otra parte, el análisis de sistemas no lineales no puede separarse en dos estudios independientes. El análisis dinámico de tales sistemas debe reconocer las fuerzas y deformaciones ya existentes en la estructura antes de la aparición de la excitación dinámica. Esto es necesario, en parte, para establecer la rigidez inicial de la estructura, que se requiere para comenzar el análisis dinámico.

1.10 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

La ecuación de movimiento para un sistema lineal de 1GDL sometido a una fuerza externa es la ecuación diferencial de segundo orden que se obtuvo con anterioridad:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{1.10.1}$$

Para definir por completo el problema es necesario especificar el desplazamiento inicial $u(0)$ y la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ en el tiempo cero. Por lo regular, la estructura está en reposo antes de la aparición de la excitación dinámica, de modo que la velocidad inicial y el desplazamiento inicial son cero. En las siguientes secciones se realiza una revisión breve de los cuatro métodos de solución.

1.10.1 Solución clásica

La solución completa de la ecuación diferencial lineal de movimiento consiste en la suma de la solución complementaria $u_c(t)$ y la solución particular $u_p(t)$, es decir, $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$. Como la ecuación diferencial es de segundo orden, se involucran dos constantes de integración. Éstas aparecen en la solución complementaria y se evalúan a partir del conocimiento de las condiciones iniciales.

Ejemplo 1.8

Considere una fuerza escalonada: $p(t) = p_o$, $t \geq 0$. En este caso, la ecuación diferencial de movimiento para un sistema sin amortiguamiento (es decir, $c = 0$) es

$$m\ddot{u} + ku = p_o \tag{a}$$

La solución particular para la ecuación (a) es

$$u_p(t) = \frac{p_o}{k} \tag{b}$$

y la solución complementaria es

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \tag{c}$$

donde A y B son constantes de integración y $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

La solución completa está dada por la suma de las ecuaciones (b) y (c):

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{p_o}{k} \tag{d}$$

Si el sistema está inicialmente en reposo, $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = 0$ en $t = 0$. Es posible determinar las constantes A y B para estas condiciones iniciales:

$$A = -\frac{p_o}{k} \qquad B = 0 \tag{e}$$

Al sustituir la ecuación (e) en la ecuación (d) se obtiene

$$u(t) = \frac{p_o}{k}(1 - \cos \omega_n t) \tag{f}$$

La solución clásica será el principal método que se utilizará aquí a fin de resolver la ecuación diferencial para la vibración libre y para las excitaciones que pueden describirse de manera analítica, como las fuerzas escalonadas, armónicas y de impulso.

1.10.2 Integral de Duhamel

Otro método muy conocido para resolver ecuaciones diferenciales lineales, como la ecuación de movimiento de un sistema de 1GDL, se basa en la representación de la fuerza aplicada como una secuencia infinitesimal de pulsos cortos. La respuesta del sistema a una fuerza $p(t)$, aplicada en el tiempo t, se obtiene al sumar las respuestas a todos los pulsos hasta ese instante. Este método se desarrolla en el capítulo 4, el cual conduce al siguiente resultado para un sistema no amortiguado de 1GDL:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen}[\omega_n (t - \tau)]\, d\tau \tag{1.10.2}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$. En este resultado están implícitas las condiciones iniciales "en reposo". La ecuación (1.10.2), conocida como la *integral de Duhamel*, es una forma especial de la integral de convolución que puede encontrarse en los libros de texto sobre ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1.9

La respuesta de un sistema de 1GDL, que se supone inicialmente en reposo, a una fuerza escalonada $p(t) = p_o$, $t \geq 0$, se determina usando la integral de Duhamel. Para esta fuerza aplicada,

la ecuación (1.10.2) se especifica como

$$u(t) = \frac{p_o}{m\omega_n}\int_0^t \text{sen}[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau = \frac{p_o}{m\omega_n}\left[\frac{\cos\omega_n(t-\tau)}{\omega_n}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{p_o}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

Este resultado es igual al obtenido en la sección 1.10.1 mediante la solución clásica de la ecuación diferencial.

La integral de Duhamel proporciona un método alternativo a la solución clásica si la fuerza aplicada $p(t)$ se define analíticamente mediante una función simple que permita la evaluación analítica de la integral. Para excitaciones complejas que se definen sólo por medio de valores numéricos de $p(t)$ en instantes de tiempo discretos, la integral de Duhamel puede evaluarse mediante métodos numéricos. Sin embargo, tales métodos no se incluyen en este libro porque existen procedimientos numéricos más eficientes para determinar la respuesta dinámica; algunos de ellos se presentan en el capítulo 5.

1.10.3 Método en el dominio de la frecuencia

Las transformadas de Laplace y de Fourier proporcionan herramientas poderosas para resolver ecuaciones diferenciales lineales; en particular, la ecuación de movimiento para un sistema lineal de 1GDL. Como los dos métodos de transformación se basan en conceptos similares, aquí se mencionará sólo el uso de la transformada de Fourier, lo que conduce al *método en el dominio de la frecuencia* del análisis dinámico.

La transformada de Fourier $P(\omega)$ de la función de excitación $p(t)$ está definida por

$$P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1.10.3}$$

Entonces, la transformada de Fourier $U(\omega)$ de la solución $u(t)$ de la ecuación diferencial está dada por

$$U(\omega) = H(\omega)\,P(\omega) \tag{1.10.4}$$

donde la función compleja de respuesta en la frecuencia $H(\omega)$ describe la respuesta del sistema ante una excitación armónica. Finalmente, la solución deseada $u(t)$ está dada por la transformada inversa de Fourier de $U(\omega)$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\,P(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \tag{1.10.5}$$

Es posible utilizar la integración directa para evaluar la integral de la ecuación (1.10.3), pero se requiere la integración de contorno en el plano complejo para la ecuación (1.10.5). Pueden obtenerse resultados de forma cerrada sólo si $p(t)$ es una función simple y la aplicación de la transformada de Fourier estaba restringida a este tipo de $p(t)$, hasta la aparición de computadoras de alta velocidad.

Ahora, el método de la transformada de Fourier es factible para el análisis dinámico de sistemas lineales con excitaciones complicadas $p(t)$ o $\ddot{u}_g(t)$, que se describen numéricamente. En tales situaciones, las integrales de las dos ecuaciones (1.10.3) y (1.10.5) se evalúan numéricamente mediante el *método de la transformada de Fourier discreta*, usando el algoritmo de la



Figura 1.10.1 Estas dos estructuras de contención en forma de cúpula y hechas de concreto reforzado, alojan los reactores nucleares de la central San Onofre en California. Para propósitos de diseño se calculó que su periodo fundamental de vibración sería de 0.15 s suponiendo una base fija, y 0.50 s considerando la flexibilidad del suelo. Esta gran diferencia en el periodo indica el efecto importante de la interacción suelo-estructura para este tipo de construcciones. (Cortesía de Southern California Edison).

transformada rápida de Fourier, que se desarrolló en 1965. Estos conceptos se presentan en el apéndice A.

El método en el dominio de la frecuencia para el análisis dinámico se simboliza mediante las ecuaciones (1.10.3) y (1.10.5). La primera proporciona las amplitudes $P(\omega)$ de todos los componentes armónicos que componen la excitación $p(t)$. La segunda ecuación puede interpretarse como la evaluación de la respuesta armónica del sistema ante cada componente de la excitación, para después superponer las respuestas armónicas a fin de obtener la respuesta $u(t)$. El método en el dominio de la frecuencia, que es una alternativa al método en el *dominio del tiempo* simbolizado por la integral de Duhamel, es útil y poderoso para el análisis dinámico de estructuras que interactúan con medios infinitos. Dos ejemplos son (1) el análisis de la respuesta sísmica de una estructura, donde los efectos de la interacción entre la estructura y el suelo subyacente ínfinito son significativos (figura 1.10.1), y (2) el análisis de la respuesta sísmica de las presas de concreto al interactuar con el agua contenida en el depósito, la cual se extiende a grandes distancias en la dirección aguas arriba

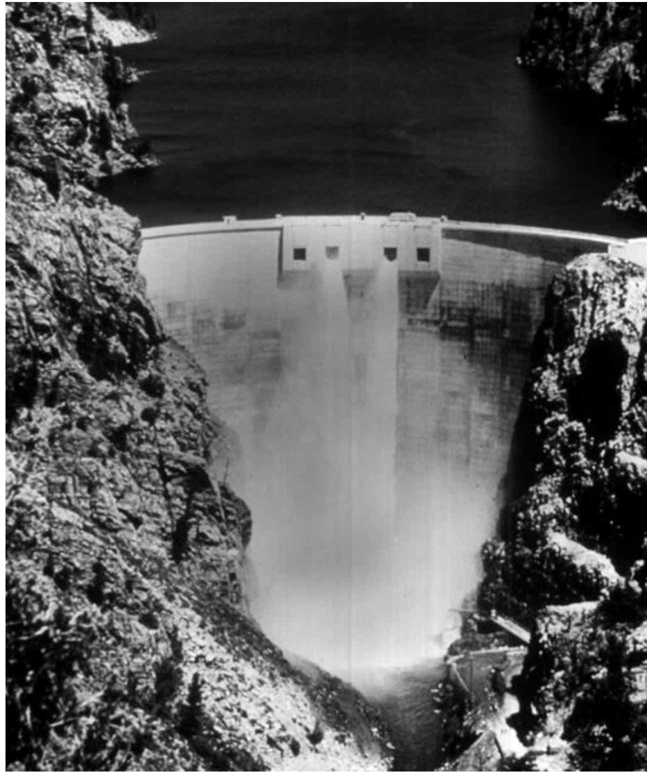


Figura 1.10.2 Presa Morrow Point, una presa de arco con 465 pies de altura, en el río Gunnison, Colorado. Mediante pruebas de vibración forzada se determinó que el periodo fundamental de vibración de la presa en vibración antisimétrica es de 0.268 s con el depósito parcialmente lleno y de 0.303 s con el depósito completamente lleno. (Cortesía del U. S. Bureau of Reclamation).

(figura 1.10.2). Como el análisis sísmico de sistemas suelo-estructura y fluido-estructura tan complejos va más allá del alcance de este libro, no se incluye una presentación exhaustiva del método en el dominio de la frecuencia para el análisis dinámico. Sin embargo, en el apéndice A se presenta una introducción al método.

1.10.4 Métodos numéricos

Los tres métodos de análisis dinámico anteriores se limitan a los sistemas lineales y no es posible considerar el comportamiento inelástico esperado de las estructuras durante sismos si el movimiento del terreno es intenso. El único enfoque práctico para tales sistemas abarca los métodos numéricos paso a paso en el tiempo, que se presentan en el capítulo 5. Estos métodos también son útiles para evaluar la respuesta de los sistemas lineales ante una excitación [la fuerza aplicada $p(t)$ o el movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$] que es demasiado complicada como para definirse de manera analítica y se describe sólo en forma numérica.

1.11 ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE 1GDL: ORGANIZACIÓN

Se estudiará la respuesta dinámica de los sistemas de 1GDL elástico lineales en vibración libre (capítulo 2), ante excitaciones armónicas y periódicas (capítulo 3), ante excitaciones de pulsos y escalonadas (capítulo 4), y ante movimiento sísmico (capítulo 6). Dado que la mayoría de las estructuras están diseñadas con la expectativa de que se deformen más allá del límite elástico lineal durante sismos grandes que son poco frecuentes, en el capítulo 7 se estudia la respuesta inelástica de los sistemas de 1GDL. Un aspecto de interés es la variación en el tiempo de la respuesta $r(t)$ ante estas diferentes excitaciones. Para fines de diseño estructural, el valor máximo (en el tiempo) de la respuesta r contiene información crucial, puesto que se relaciona con las fuerzas y deformaciones máximas que una estructura debe ser capaz de soportar. Se tiene un interés especial en el valor pico de la respuesta, o por razones de brevedad en la *respuesta pico*, definida como el máximo valor absoluto de la cantidad de respuesta:

$$r_o \equiv \max_t |r(t)| \tag{11.1.1}$$

Por definición, la respuesta pico es positiva; el signo algebraico se omite porque suele ser irrelevante para el diseño. Observe que el subíndice o unido a una cantidad respuesta indica su valor pico.

LECTURA ADICIONAL

Clough, R. W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993, Secciones 4-3, 6-2, 6-3 y 12-6.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, 2a. ed., A. A. Balkema Publishers, Lisse. Países Bajos, 2002, capítulo 9 y sección 13.5.

APÉNDICE 1: COEFICIENTES DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO EN FLEXIÓN

Es posible escribir los coeficientes de rigidez a partir de las ecuaciones de la pendiente de deflexión para un elemento de marco (uniforme) prismático y elástico lineal. Éstos se presentan en la figura A1.1 para un elemento con longitud L, segundo momento de área I y

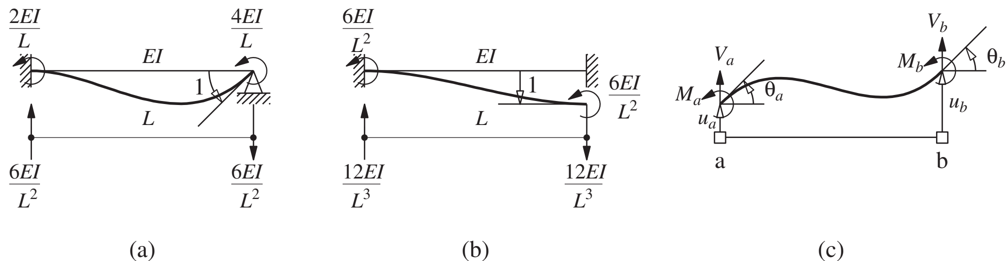


Figura A1.1

módulo de elasticidad E. Los coeficientes de rigidez para la rotación de los nudos se muestran en el inciso (a) y para la traslación de los nudos en el inciso (b) de la figura.

Considere ahora el elemento mostrado en la figura A1.1c con sus dos nodos identificados como a y b, los cuales se suponen axialmente indeformables. Sus cuatro grados de libertad son las traslaciones nodales u_a y u_b y las rotaciones nodales θ_a y θ_b. Los momentos de flexión en los dos nodos se relacionan con los cuatro GDL de la manera siguiente:

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \qquad \text{(A1.1)}$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \qquad \text{(A1.2)}$$

Las fuerzas cortantes en los dos nodos se relacionan con los cuatro GDL como se muestra a continuación:

$$V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b \qquad \text{(A1.3)}$$

$$V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b \qquad \text{(A1.4)}$$

En cada instante de tiempo, las fuerzas nodales M_a, M_b, V_a y V_b se calculan a partir de u_a, u_b, θ_a y θ_b. El momento de flexión y la fuerza cortante en cualquier otra ubicación a lo largo del elemento se determinan por medio de la estática aplicada al elemento de la figura A1.1c.

PROBLEMAS

1.1-1.3 A partir de la definición básica de rigidez, determine la rigidez efectiva del resorte combinado y escriba la ecuación de movimiento para los sistemas resorte-masa que se muestran en las figuras P1.1 a P1.3.

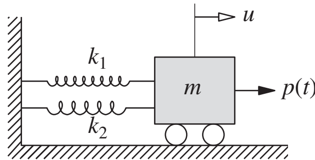


Figura P1.1

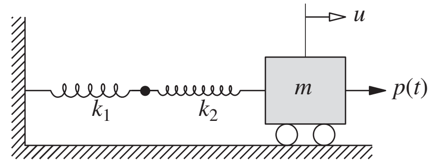


Figura P1.2

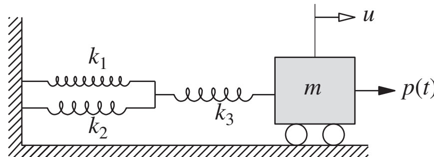


Figura P1.3

1.4 Deduzca la ecuación que controla el movimiento libre de un péndulo simple consistente en una barra infinitamente rígida sin masa, articulada en el punto O, con una masa m conectada en la punta (figura P1.4). Linealice la ecuación para las oscilaciones pequeñas y determine la frecuencia natural de oscilación.

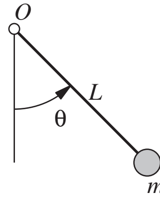


Figura P1.4

1.5 Considere el movimiento libre en el plano xy de un péndulo compuesto que consta de una barra infinitamente rígida suspendida de un punto (figura P1.5). La longitud de la barra es L y su masa m se distribuye uniformemente. La anchura de la barra uniforme es b y su espesor es t. El desplazamiento angular de la línea central del péndulo medida desde el eje y se indica mediante $\theta(t)$.

(a) Deduzca la ecuación que controla $\theta(t)$.
(b) Linealice la ecuación para θ pequeños.
(c) Determine la frecuencia natural de las oscilaciones pequeñas.

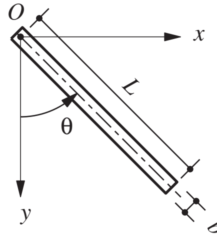


Figura P1.5

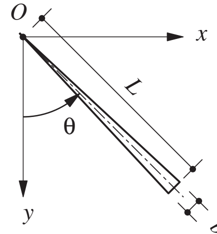


Figura P1.6

1.6 Repita el problema 1.5 para el sistema mostrado en la figura P1.6, el cual difiere sólo en un sentido: su ancho varía de cero en O a b en el extremo libre.

1.7 Desarrolle la ecuación que controla el movimiento longitudinal del sistema de la figura P1.7. La barra está hecha de un material elástico con módulo de elasticidad E; el área de su sección transversal es A y su longitud es L. Desprecie la masa de la barra y mida u desde la posición de equilibrio estático.

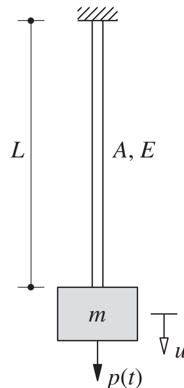


Figura P1.7

1.8 Un disco rígido de masa m está montado en el extremo de un eje flexible (figura P1.8). Desprecie el peso del eje y el amortiguamiento, y deduzca la ecuación de la vibración torsional libre del disco. El módulo cortante (de rigidez) del eje es G.

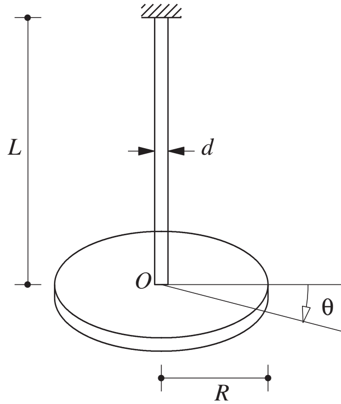


Figura P1.8

1.9- 1.11 Escriba la ecuación que controla la vibración libre de los sistemas mostrados en las figuras P1.9 a P1.11. Suponiendo que la viga carece de masa, cada sistema tiene un solo GDL definido como la deflexión vertical bajo el peso w. La rigidez a la flexión de la viga es EI y su longitud es L.

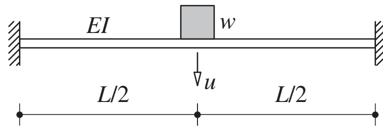


Figura P1.9

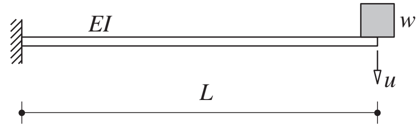


Figura P1.10

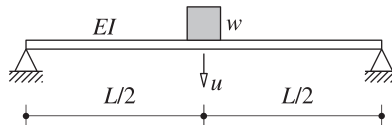


Figura P1.11

1.12 Determine la frecuencia natural de un peso w suspendido de un resorte en el punto medio de una viga simplemente apoyada (figura P1.12). La longitud de la viga es L y su rigidez a la flexión es EI. La rigidez del resorte es k. Suponga que la viga carece de masa.

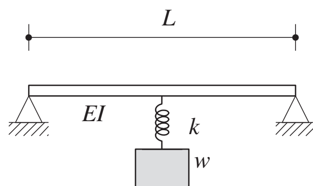


Figura P1.12

1.13 Deduzca la ecuación de movimiento para el marco que se muestra en la figura P1.13. La rigidez a la flexión de la viga y las columnas es como se indica. La masa concentrada en la viga es m; de manera alternativa, suponga que el marco no tiene masa y desprecie el amortiguamiento. Compare el resultado con la ecuación (1.3.2) y comente el efecto del empotramiento de la base.

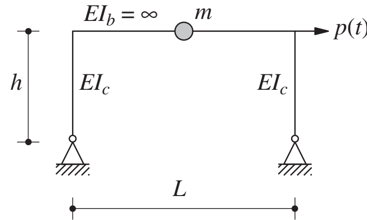


Figura P1.13

1.14 Escriba la ecuación de movimiento para el marco de un nivel y una crujía que se muestra en la figura P1.14. La rigidez a la flexión de la viga y las columnas es como se indica. La masa concentrada en la viga es m; de manera alternativa, suponga que el marco no tiene masa y desprecie el amortiguamiento. Compare esta ecuación de movimiento con la del ejemplo 1.1 y comente el efecto del empotramiento de la base.

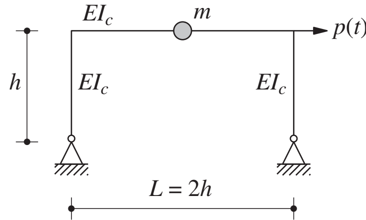


Figura P1.14

1.15-1.16 Escriba la ecuación de movimiento para el marco de un nivel y una crujía que se muestra en las figuras P1.15 y P1.16. La rigidez a la flexión de la viga y las columnas es como se indica. La masa concentrada en la viga es m; de manera alternativa, suponga que el marco no tiene masa y desprecie el amortiguamiento. Compruebe el resultado del problema 1.15 revisando la ecuación (1.3.5). Comente sobre el efecto del empotramiento de la base al comparar las dos ecuaciones de movimiento.

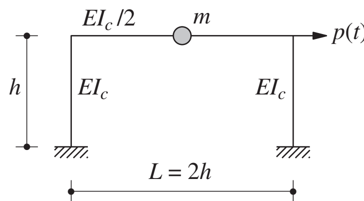


Figura P1.15

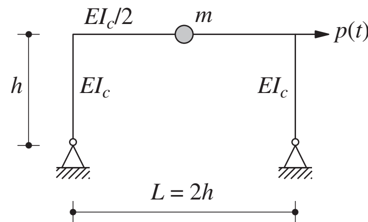


Figura P1.16

1.17 Una plataforma masiva infinitamente rígida con peso w se apoya en cuatro columnas, las cuales están articuladas en sus extremos superior e inferior y se encuentran contraventeadas

lateralmente en cada panel lateral mediante dos alambres de acero diagonales, como se muestra en la figura P1.17. Cada alambre diagonal se pretensa hasta un esfuerzo alto; el área de la sección transversal es *A* y el módulo de elasticidad es *E*. Desprecie la masa de las columnas y de los alambres, y deduzca la ecuación de movimiento que controla la vibración libre en (**a**) la dirección *x* y (**b**) la dirección *y*. (*Sugerencia:* debido a la alta pretensión, todos los cables contribuyen a la rigidez estructural, a diferencia del ejemplo 1.2, donde los contravientos en compresión no proporcionan rigidez).

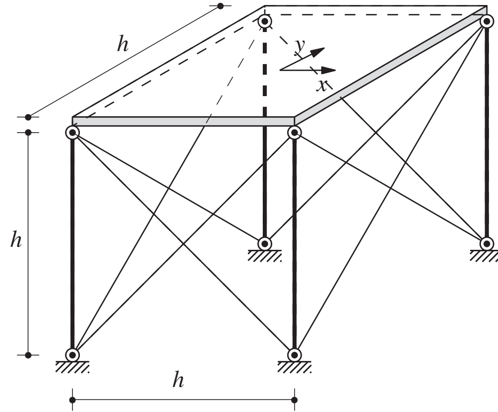


Figura P1.17

1.18 Deduzca la ecuación de movimiento que controla la vibración de torsión del sistema de la figura Pl.17, alrededor del eje vertical que pasa por el centro de la plataforma.

1.19 Un automóvil se idealiza de manera aproximada como una masa concentrada *m* apoyada en un sistema de resorte-amortiguador, como se muestra en la figura P1.19. El automóvil se desplaza a una velocidad constante *v* sobre un camino, cuyas irregularidades se conocen como una función de la posición a lo largo de dicho camino. Deduzca la ecuación de movimiento.

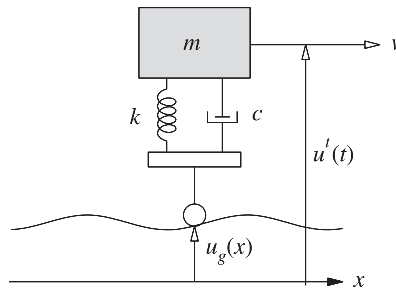


Figura P1.19

2

Vibración libre

AVANCE

Se dice que una estructura experimenta *vibración libre* cuando es perturbada de su posición de equilibrio estático y después se deja vibrar sin ninguna excitación dinámica externa. En este capítulo se estudia el problema de vibración libre para introducir nociones de frecuencia de vibración natural y la fracción de amortiguamiento de un sistema de 1GDL. Se verá que la razón de decaimiento del movimiento en vibración libre está controlada por la fracción de amortiguamiento. Así, los resultados analíticos que describen la vibración libre proporcionan una base para determinar la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento de una estructura a partir de datos experimentales, como los que se muestran en la figura 1.1.4.

Aunque el amortiguamiento en las estructuras reales se debe a varios mecanismos de disipación de la energía que actúan de manera simultánea, un enfoque matemáticamente práctico consiste en idealizarlos mediante el amortiguamiento viscoso equivalente. En consecuencia, este capítulo trata en su mayoría de los sistemas con amortiguamiento de tipo viscoso. Sin embargo, la vibración libre de sistemas en presencia de fuerzas de fricción de Coulomb se analiza al final del capítulo.

2.1 VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADA

El movimiento de los sistemas lineales de 1GDL, visualizados como un marco idealizado de un nivel o un sistema masa-resorte-amortiguador, sometido a la fuerza externa $p(t)$ se rige por la ecuación (1.5.2). Si se establece $p(t) = 0$, se obtiene la ecuación diferencial que rige la vibración libre del sistema, que para los sistemas sin amortiguamiento ($c = 0$) se especifica como

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{2.1.1}$$

La vibración libre se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento $u(0)$ y velocidad $\dot{u}(0)$ en el tiempo cero, definido como el instante en que se inicia el movimiento:

$$u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{2.1.2}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea sujeta a estas condiciones iniciales se obtiene por métodos comunes (vea la deducción 2.1):

$$u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\operatorname{sen}\omega_n t \tag{2.1.3}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1.4}$$

La ecuación (2.1.3) se representa con la gráfica en la figura 2.1.1. Ésta muestra que el sistema experimenta un movimiento vibratorio (u oscilatorio) alrededor de su posición de equilibrio estático (o no deformada, $u = 0$); y que este movimiento se repite después de cada $2\pi/\omega_n$ segundos. En particular, los estados (desplazamiento y velocidad) de la masa en dos instantes de tiempo, t_1 y $t_1 + 2\pi/\omega_n$, son idénticos: $u(t_1) = u(t_1 + 2\pi/\omega_n)$ y $\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_1 + 2\pi/\omega_n)$. Estas igualdades pueden probarse con facilidad, a partir de la ecuación (2.1.3). El movimiento descrito por la ecuación (2.1.3) y mostrado en la figura. 2.1.1 se conoce como *movimiento armónico simple*.

La porción *a-b-c-d-e* de la curva de tiempo-desplazamiento describe un ciclo de vibración libre del sistema. A partir de su posición de equilibrio estático (o no deformada) en *a*, la masa se mueve a la derecha, alcanzando su desplazamiento positivo máximo u_o en *b*, momento en el cual la velocidad es cero y el desplazamiento comienza a decrecer; luego

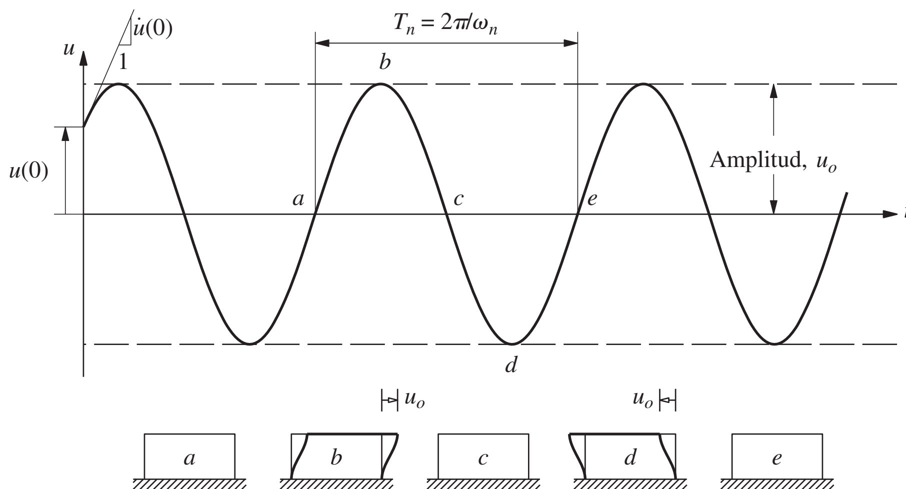


Figura 2.1.1 Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento.

la masa vuelve de nuevo a su posición de equilibrio *c*, momento en el cual la velocidad es máxima y por lo tanto la masa continúa moviéndose a la izquierda; después, la masa llega a su desplazamiento mínimo $-u_o$ en *d*, momento en el cual la velocidad es cero de nuevo y el desplazamiento comienza a disminuir otra vez hasta que la masa vuelve a su posición de equilibrio en *e*. En el instante de tiempo *e*, $2\pi/\omega_n$ segundos después del instante de tiempo *a*, el estado (desplazamiento y velocidad) de la masa es el mismo que en el momento *a*, y la masa está lista para comenzar un nuevo ciclo de vibración.

El tiempo requerido para que el sistema no amortiguado complete un ciclo de vibración libre es el *periodo natural de vibración* del sistema, que se denomina como T_n y cuyas unidades son segundos. Se relaciona con la *frecuencia circular natural de vibración*, ω_n, en unidades de radianes por segundo es:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{2.1.5}$$

Un sistema ejecuta $1/T_n$ ciclos en 1 segundo. Esta *frecuencia cíclica natural de vibración* se define mediante

$$f_n = \frac{1}{T_n} \tag{2.1.6}$$

Las unidades de f_n son hertz (Hz) (ciclos por segundo (cps)); f_n está obviamente relacionada con ω_n a través de

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{2.1.7}$$

El término *frecuencia natural de vibración* se aplica tanto a ω_n como a f_n.

Las propiedades de vibración natural ω_n, T_n y f_n dependen sólo de la masa y rigidez de la estructura; vea las ecuaciones (2.1.4) a (2.1.6). Si dos sistemas de 1GDL tienen la misma masa, el que sea más rígido de los dos tendrá la frecuencia natural más alta y el periodo natural más pequeño. De manera similar, si dos estructuras tienen la misma rigidez, aquella que sea la más pesada (con mayor masa) tendrá la menor frecuencia natural y el periodo natural más largo. El calificativo *natural* se utiliza en la definición de T_n, ω_n y f_n para destacar el hecho de que éstas son propiedades naturales del sistema cuando se le permite vibrar con libertad sin ningún tipo de excitación externa. Debido a que el sistema es lineal, estas propiedades de vibración son independientes del desplazamiento y la velocidad iniciales. La frecuencia natural y el periodo de los distintos tipos de estructuras que interesan a este texto variarán en gran medida, como se muestra en las figuras 1.10.1, 1.10.2, y 2.1.2a-f.

La frecuencia circular natural ω_n, la frecuencia natural cíclica f_n y el periodo natural T_n definidos por las ecuaciones (2.1.4) a (2.1.6) pueden expresarse en la forma alternativa

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad T_n = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{2.1.8}$$

donde $\delta_{st} = mg/k$ y g es la aceleración debida a la gravedad. δ_{st} es la deflexión estática de la masa *m* suspendida de un resorte con rigidez *k*, como puede observarse en el sistema de la figura 1.6.1 orientada en la dirección vertical. En el caso del marco de un solo nivel de la figura 1.2.1, δ_{st} es el desplazamiento lateral de la masa debido a la fuerza lateral *m*g.



Figura 2.1.2a Edificio Alcoa, San Francisco, California. Los periodos fundamentales de vibración natural de este edificio de acero con 26 pisos son 1.67 segundos para la vibración norte-sur (longitudinal), 2.21 segundos para la vibración este-oeste (transversal) y 1.12 segundos para la vibración torsional alrededor de un eje vertical. Estas propiedades de dinámicas se determinaron mediante pruebas de vibración forzada. (Cortesía de International Structural Slides).



Figura 2.1.2b Edificio Transamerica, San Francisco, California. Los periodos fundamentales de vibración natural de este edificio de acero con 49 pisos y forma ahusada, son 2.90 segundos para la vibración norte-sur y la vibración este-oeste. Estas propiedades dinámicas se determinaron mediante pruebas de vibración forzada. (Cortesía de International Structural Slides).



Figura 2.1.2c Edificio Medical Center, Richmond, California. Los periodos fundamentales de vibración natural de este edificio con marcos de acero de tres pisos son 0.63 segundos para la vibración en la dirección longitudinal, 0.74 segundos en la dirección transversal y 0.46 segundos para la vibración torsional alrededor de un eje vertical. Estas propiedades dinámicas se determinaron a partir de la respuesta obtenida en el edificio durante el terremoto de Loma Prieta en 1989. (Cortesía de California Strong Motion Instrumentation Program).



Figura 2.1.2d Presa Pine Flat en el río Kings, cerca de Fresno, California. El periodo fundamental de vibración natural de esta presa de concreto de gravedad con 400 pies de altura se midió mediante pruebas de vibración forzada y resultó ser de 0.288 segundos y 0.306 segundos con la profundidad de la presa a 310 pies y 345 pies, respectivamente.



Figura 2.1.2e Puente Golden Gate, San Francisco, California. Los periodos fundamentales de vibración natural de este puente colgante con un tramo principal de 4200 pies son de 18.2 segundos para la dirección transversal, 10.9 segundos para la dirección vertical, 3.81 segundos para la dirección longitudinal y 4.43 segundos para la torsional. Estas propiedades dinámicas se determinaron a partir de los movimientos registrados en el puente bajo diferentes condiciones ambientales (viento, tráfico, etcétera). (Cortesía de International Structural Slides).



Figura 2.1.2f Chimenea de concreto reforzado, situada en Aramon, Francia. El periodo fundamental de vibración natural de esta chimenea con 250 m de altura es de 3.57 segundos; éste se determinó a partir de los registros de vibración inducida por viento.

El sistema no amortiguado oscila hacia adelante y hacia atrás entre el desplazamiento máximo u_o, y el desplazamiento mínimo $-u_o$. La magnitud u_o de estos dos valores de desplazamiento es igual y se denomina la *amplitud de movimiento*, dada por

$$u_o = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2} \qquad (2.1.9)$$

La amplitud u_o depende del desplazamiento y la velocidad iniciales. Ciclo tras ciclo permanece igual; es decir, el movimiento no decae. En la sección 1.1 se mencionó este comportamiento no realista de un sistema si no se incluye un mecanismo de amortiguamiento para representar la disipación de la energía.

La frecuencia natural del marco de un solo nivel de la figura 1.3.2a con la masa concentrada m y columnas empotradas en la base es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad k = \frac{24EI_c}{h^3}\frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \qquad (2.1.10)$$

donde la rigidez lateral se obtiene con la ecuación (1.3.5) y $\rho = (EI_b/L) \div (2EI_c/h)$. Para los casos extremos de una viga rígida, $\rho = \infty$, y para una viga sin rigidez, $\rho = 0$; las rigideces laterales están dadas por las ecuaciones (1.3.2) y (1.3.3), y las frecuencias naturales son

$$(\omega_n)_{\rho=\infty} = \sqrt{\frac{24EI_c}{mh^3}} \qquad (\omega_n)_{\rho=0} = \sqrt{\frac{6EI_c}{mh^3}} \qquad (2.1.11)$$

La frecuencia natural se duplica cuando la relación de rigidez de la viga a la columna, ρ, aumenta de 0 a ∞; su variación con ρ se muestra en la figura 2.1.3.

La frecuencia natural se ve afectada de manera similar por las condiciones de frontera en la base de las columnas. Si las columnas están articuladas en la base en vez de empotradas y la viga es rígida, $\omega_n = \sqrt{6EI_c/mh^3}$, que es la mitad de la frecuencia natural del marco con columnas empotradas en su base.

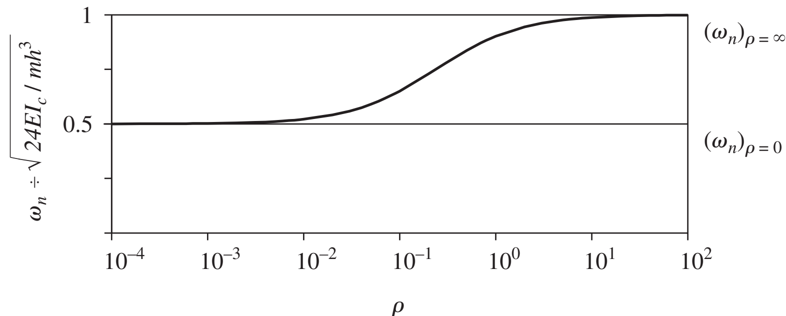


Figura 2.1.3 Variación de la frecuencia natural, ω_n, con la relación de rigidez de la viga a la columna, ρ.

Deducción 2.1

La solución de la ecuación (2.1.1), una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, tiene la forma

$$u = e^{\lambda t} \tag{a}$$

donde la constante λ es desconocida. Al sustituir en la ecuación (2.1.1) se obtiene

$$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0$$

El término exponencial nunca es cero, por lo que

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \tag{b}$$

Conocida como la *ecuación característica*, la ecuación (b) tiene dos raíces:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_n \tag{c}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. La solución general de la ecuación (2.1.1) es

$$u(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

que después de sustituir la ecuación (c) se convierte en

$$u(t) = a_1 e^{i\omega_n t} + a_2 e^{-i\omega_n t} \tag{d}$$

donde a_1 y a_2 son constantes con valores complejos aún por determinar. Mediante el uso de las relaciones de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$. La ecuación (d) puede reescribirse como

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B \operatorname{sen}\omega_n t \tag{e}$$

donde A y B son constantes con valores reales todavía por determinar. La ecuación (e) se diferencia para obtener

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \operatorname{sen}\omega_n t + \omega_n B\cos\omega_n t \tag{f}$$

La evaluación de las ecuaciones (e) y (f) en el tiempo cero proporciona las constantes A y B en términos del desplazamiento inicial $u(0)$ y la velocidad inicial $\dot{u}(0)$:

$$u(0) = A \qquad \dot{u}(0) = \omega_n B \tag{g}$$

Al sustituir A y B de la ecuación (g) en la ecuación (e) resulta la solución dada en la ecuación (2.1.3).

Ejemplo 2.1

Para el edificio industrial de una planta del ejemplo 1.2, determine la frecuencia circular natural, la frecuencia cíclica natural y el periodo natural de vibración en **(a)** la dirección norte-sur y **(b)** la dirección este-oeste.

Solución **(a)** *Dirección norte-sur:*

$$(\omega_n)_{\text{N-S}} = \sqrt{\frac{38.58}{0.04663}} = 28.73 \text{ rad/seg}$$

$$(T_n)_{\text{N-S}} = \frac{2\pi}{28.73} = 0.219 \text{ seg}$$

$$(f_n)_{\text{N-S}} = \frac{1}{0.219} = 4.57 \text{ Hz}$$

(b) *Dirección este-oeste*:

$$(\omega_n)_{E-W} = \sqrt{\frac{119.6}{0.04663}} = 50.64 \text{ rad/seg}$$

$$(T_n)_{E-W} = \frac{2\pi}{50.64} = 0.124 \text{ seg}$$

$$(f_n)_{E-W} = \frac{1}{0.124} = 8.06 \text{ Hz}$$

Observe que la frecuencia natural es mucho más alta (y el periodo natural mucho más corto) en la dirección este-oeste porque los refuerzos verticales hacen que el sistema sea mucho más rígido, aunque las columnas del marco se flexionen alrededor de su eje débil; la masa vibrante es la misma en ambas direcciones.

Ejemplo 2.2

Para el puente con viga cajón y tres claros del ejemplo 1.3, determine la frecuencia circular natural, la frecuencia cíclica natural y el periodo natural de vibración para el movimiento longitudinal.

Solución

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25{,}880}{214.9}} = 10.97 \text{ rad/seg}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{10.97} = 0.573 \text{ seg}$$

$$f_n = \frac{1}{0.573} = 1.75 \text{ Hz}$$

Ejemplo 2.3

Determine la frecuencia cíclica natural y el periodo de vibración natural de un peso de 20 libras suspendido como se describe en el ejemplo 1.4.

Solución

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad \delta_{st} = \frac{w}{k_e} = \frac{20}{13.39} = 1.494 \text{ pulg}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{1.494}} = 2.56 \text{ Hz}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 0.391 \text{ seg}$$

Ejemplo 2.4

Considere el sistema descrito en el ejemplo 1.7, con $b = 30$ pies, $d = 20$ pies, $h = 12$ pies, peso de la losa = 0.1 kip/pie^2 y la rigidez lateral de cada columna en la direcciones x y y es $k_x = 1.5$ y $k_y = 1.0$, ambas en kips/pulg. Determine la frecuencia natural y el periodo de movimiento torsional alrededor del eje vertical.

Solución A partir del ejemplo 1.7, la rigidez a la torsión k_θ y el momento de inercia I_O son

$$k_\theta = k_x d^2 + k_y b^2 = 1.5(12)(20)^2 + 1.0(12)(30)^2 = 18{,}000 \text{ kip-pie/rad}$$

$$I_O = m\frac{b^2 + d^2}{12} = \frac{0.1(30 \times 20)}{(32.2)}\left[\frac{(30)^2 + (20)^2}{12}\right] = 201.86 \text{ kip-seg}^2\text{-pie}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_O}} = 9.44 \text{ rad/seg} \qquad f_n = 1.49 \text{ Hz} \qquad T_n = 0.67 \text{ seg}$$

2.2 VIBRACIÓN LIBRE VISCOSAMENTE AMORTIGUADA

Si se establece $p(t) = 0$ en la ecuación (1.5.2), se obtiene la ecuación diferencial que rige la vibración libre de los sistemas de 1GDL con amortiguamiento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \tag{2.2.1a}$$

Al dividir entre m resulta

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{2.2.1b}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ como se ha definido anteriormente y

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{\text{cr}}} \tag{2.2.2}$$

Se hará referencia a

$$c_{\text{cr}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \tag{2.2.3}$$

como el *amortiguamiento crítico*, por razones que se describirán en breve; y ζ es la *razón* o *fracción del amortiguamiento crítico*. La constante de amortiguamiento c es una medida de la energía disipada en un ciclo de vibración libre o en un ciclo de vibración forzada armónica (sección 3.8). Sin embargo, la fracción de amortiguamiento (una medida adimensional de amortiguamiento) es una propiedad del sistema que depende también de su masa y rigidez. La ecuación diferencial (2.2.1) puede resolverse mediante los métodos comunes (de manera semejante a la deducción 2.1) para un desplazamiento inicial $u(0)$ y velocidad inicial $\dot{u}(0)$ dados. Sin embargo, antes de escribir cualquier solución formal, se examina la solución cualitativamente.

2.2.1 Tipos de movimiento

En la figura 2.2.1 se muestra una gráfica del movimiento $u(t)$ debido al desplazamiento inicial $u(0)$ para tres valores de ζ. Si $c < c_{\text{cr}}$ o $\zeta < 1$, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio con una amplitud que disminuye progresivamente. Si $c = c_{\text{cr}}$ o $\zeta = 1$, el sistema

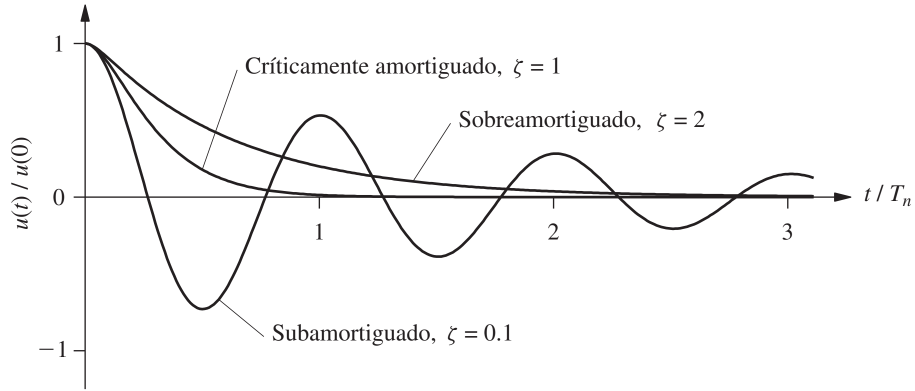


Figura 2.2.1 Vibración libre de sistemas subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar. Si $c > c_{cr}$ o $\zeta > 1$, de nuevo el sistema no oscila y regresa a su posición de equilibrio, como en el caso de $\zeta = 1$, pero a un ritmo más lento.

El amortiguamiento c_{cr} se denomina *amortiguamiento crítico* debido a que es el valor más pequeño de c que inhibe por completo la oscilación. Representa la línea divisoria entre el movimiento oscilatorio y no oscilatorio.

El resto de esta presentación se limita a los *sistemas subamortiguados* ($c < c_{cr}$) porque todas las estructuras de interés (edificios, puentes, presas, centrales nucleares, estructuras marítimas, etcétera) entran dentro de esta categoría ya que, por lo general, su fracción de amortiguamiento es menor a 0.10. Por lo tanto, existen pocas razones para estudiar la dinámica de los *sistemas críticamente amortiguados* ($c = c_{cr}$) o los *sistemas sobreamortiguados* ($c > c_{cr}$). Sin embargo, tales sistemas existen; por ejemplo, los mecanismos de retroceso, como la puerta automática común, están sobreamortiguados; y los instrumentos utilizados para medir valores de estado estable, como una báscula para medir peso muerto, por lo general se amortiguan críticamente. Sin embargo, incluso para los sistemas de absorción de choques en automóviles, suelen tener un amortiguamiento menor a la mitad del amortiguamiento crítico, $\zeta < 0.5$.

2.2.2 Sistemas subamortiguados

La solución de la ecuación (2.2.1) sujeta a las condiciones iniciales de la ecuación (2.1.2) para sistemas con $c < c_{cr}$ o $\zeta < 1$ es (vea la deducción 2.2)

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\operatorname{sen}\omega_D t\right] \tag{2.2.4}$$

donde

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \tag{2.2.5}$$

Observe que la ecuación (2.2.4) especializada para sistemas no amortiguados ($\zeta = 0$) se reduce a la ecuación (2.1.3).

La ecuación (2.2.4) se representa con una gráfica en la figura 2.2.2, que muestra la respuesta a la vibración libre de un sistema de 1GDL con fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.05$,

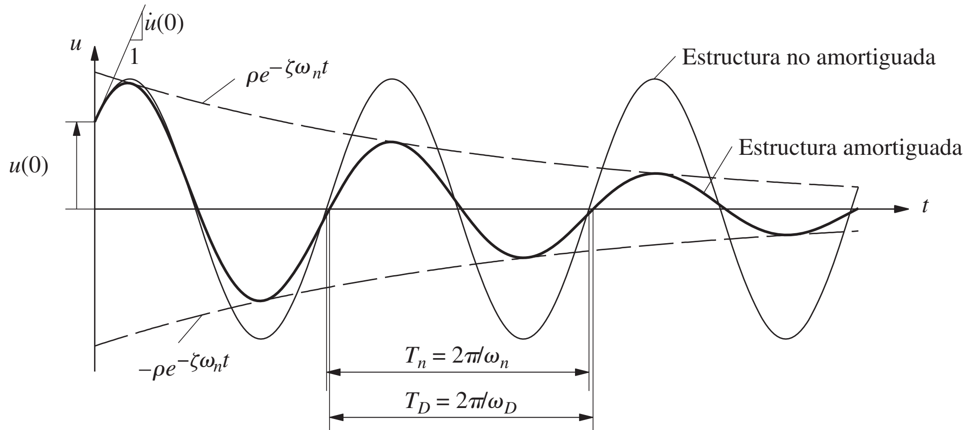


Figura 2.2.2 Efectos del amortiguamiento sobre la vibración libre.

o 5%. Se incluye, con propósitos comparativos, la respuesta a la vibración libre del mismo sistema que se presentó anteriormente en la figura 2.1.1, pero sin amortiguamiento. La vibración libre de ambos sistemas inicia por el mismo desplazamiento inicial $u(0)$ y la misma velocidad inicial $\dot{u}(0)$ y, por lo tanto, ambas gráficas de desplazamiento en el tiempo inician en el instante $t = 0$ con las mismas ordenada y pendiente. La ecuación (2.2.4) y la figura 2.2.2 indican que la *frecuencia natural de vibración amortiguada* es ω_D y que se relaciona mediante la ecuación (2.2.5) con la frecuencia natural ω_n del sistema sin amortiguamiento. El *periodo natural de vibración amortiguada*, $T_D = 2\pi/\omega_D$, se relaciona con el periodo natural T_n sin amortiguamiento mediante

$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{2.2.6}$$

La amplitud de desplazamiento del sistema no amortiguado es la misma en todos los ciclos de vibración, pero el sistema amortiguado oscila con amplitud decreciente en cada ciclo de vibración. La ecuación (2.2.4) indica que la amplitud de desplazamiento disminuye exponencialmente con el tiempo, como se muestra en la figura 2.2.2. Las curvas envolventes $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$, donde

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\right]^2} \tag{2.2.7}$$

tocan la curva de desplazamiento en el tiempo en los puntos que están ligeramente a la derecha de sus valores pico.

El amortiguamiento tiene el efecto de reducir la frecuencia natural de ω_n a ω_D y alargar el periodo natural de T_n a T_D. Estos efectos son insignificantes para fracciones de amortiguamiento por debajo de 20%, un rango que incluye a la mayoría de las estructuras, como se muestra en la figura 2.2.3, donde la relación $\omega_D/\omega_n = T_n/T_D$ se grafica contra el valor de ζ. Para la mayoría de las estructuras, las propiedades amortiguadas ω_D y T_D son aproximadamente iguales a las propiedades no amortiguadas ω_n y T_n, respectivamente. Para los sistemas con amortiguamiento crítico, $\omega_D = 0$ y $T_D = \infty$. Ésta es otra forma de decir que el sistema no oscila, como se muestra en la figura 2.2.1.

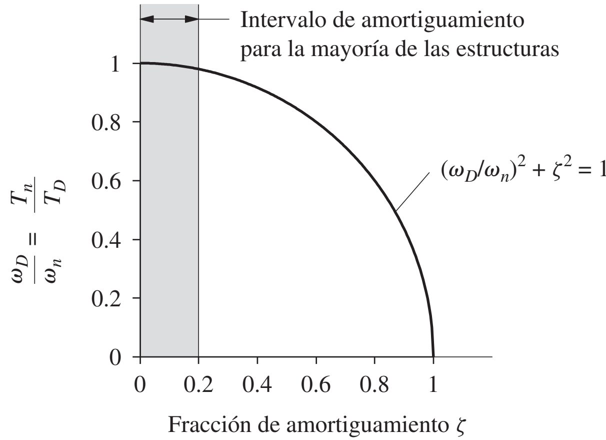


Figura 2.2.3 Efectos del amortiguamiento sobre la frecuencia de vibración natural.

El efecto más importante del amortiguamiento es sobre la rapidez de decaimiento en vibración libre. Esto se muestra en la figura 2.2.4, donde se grafica la vibración libre debida al desplazamiento inicial $u(0)$ para cuatro sistemas que tienen el mismo periodo natural T_n pero diferentes fracciones de amortiguamiento: $\zeta = 2$, 5, 10 y 20%.

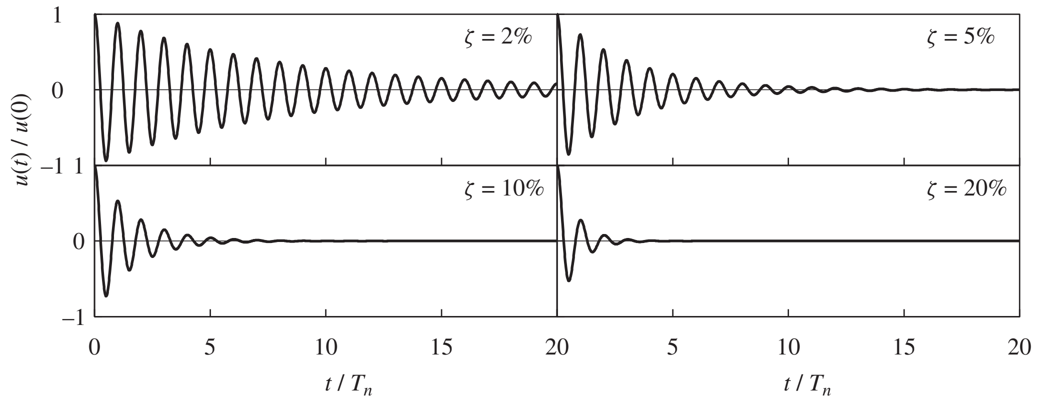


Figura 2.2.4 Vibración libre de sistemas con cuatro niveles de amortiguamiento: $\zeta = 2$, 5, 10 y 20%.

Deducción 2.2

Al sustituir la ecuación (a) de la deducción 2.1 en la ecuación (2.2.1b) resulta

$$\left(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2\right)e^{\lambda t} = 0$$

que se cumple para todos los valores de t si

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \tag{a}$$

La ecuación (a), que se conoce como la *ecuación característica*, tiene dos raíces:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right) \tag{b}$$

que tienen valores complejos para $\zeta < 1$. La solución general de la ecuación (2.2.1b) es

$$u(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \tag{c}$$

que después de sustituir la ecuación (b) se convierte en

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(a_1 e^{i\omega_D t} + a_2 e^{-i\omega_D t}\right) \tag{d}$$

donde a_1 y a_2 son constantes con valores complejos que todavía no se determinan y ω_D se define en la ecuación (2.2.5). Al igual que en la deducción 2.1, el término entre paréntesis de la ecuación (d) puede reescribirse en términos de funciones trigonométricas para obtener

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B \operatorname{sen}\omega_D t) \tag{e}$$

donde A y B son constantes con valores reales aún por determinar. Éstas pueden expresarse en términos de las condiciones iniciales procediendo a lo largo de las líneas de la deducción 2.1:

$$A = u(0) \qquad B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} \tag{f}$$

Al sustituir A y B en la ecuación (e) se llega a la solución dada en la ecuación (2.2.4).

Ahora se hacen dos observaciones que serán de utilidad más adelante: (1) λ_1 y λ_2 en la ecuación (b) son un par conjugado complejo, que se indica mediante λ y $\bar{\lambda}$, y (2) a_1 y a_2 también deben formar un par conjugado debido a que $u(t)$ tiene valor real. Por lo tanto, la ecuación (c) puede escribirse como

$$u(t) = be^{\lambda t} + \bar{b}e^{\bar{\lambda} t} \tag{g}$$

donde b es una constante de valor complejo.

2.2.3 Decaimiento del movimiento

En esta sección se presenta una relación entre la variación en dos picos sucesivos de una vibración libre amortiguada y su fracción de amortiguamiento. La relación entre el desplazamiento en el tiempo t, sobre su valor un periodo de vibración completo T_D después, es independiente de t. Obtenida de la ecuación (2.2.4), esta relación está dada por la primera igualdad en

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \exp(\zeta\omega_n T_D) = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{2.2.8}$$

y la segunda igualdad se obtiene utilizando las ecuaciones (2.2.6) y (2.1.5). Este resultado también proporciona la relación u_i/u_{i+1} de los picos sucesivos (máximos) que se muestran en la figura 2.2.5, porque estos picos están separados por un periodo T_D:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{2.2.9}$$

El logaritmo natural de esta relación, llamado el *decremento logarítmico*, se indica mediante δ:

$$\delta = \ln\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.2.10}$$

Si ζ es pequeña, $\sqrt{1-\zeta^2} \simeq$ y esto da una ecuación aproximada:

$$\delta \simeq 2\pi\zeta \tag{2.2.11}$$

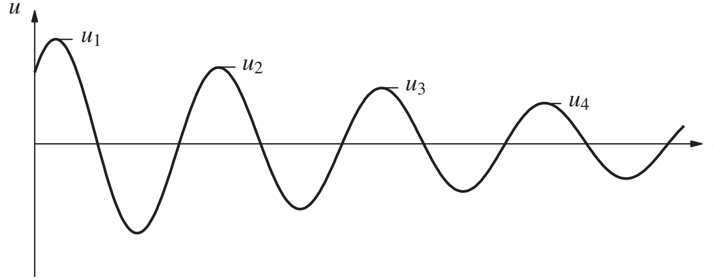


Figura 2.2.5

En la figura 2.2.6 se muestra una gráfica de las relaciones exacta y aproximada entre δ y ζ. Resulta claro que la ecuación (2.2.11) es válida para $\zeta < 0.2$, que cubre a la mayoría de las estructuras prácticas.

Si la disminución del movimiento es lenta, como es el caso para los sistemas ligeramente amortiguados, como el modelo de aluminio de la figura 1.1.4, lo ideal es determinar la fracción de amortiguamiento mediante la relación entre dos amplitudes separadas por varios ciclos de diferencia, en vez de amplitudes sucesivas. Durante los j ciclos el movimiento disminuye de u_1 a u_{j+1}. Esta relación está dada por

$$\frac{u_1}{u_{j+1}} = \frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}\frac{u_3}{u_4}\cdots\frac{u_j}{u_{j+1}} = e^{j\delta}$$

Por lo tanto,

$$\delta = (1/j)\ \ln(u_1/u_{j+1}) \simeq 2\pi\zeta \tag{2.2.12}$$

Para determinar el número de ciclos de tiempo transcurridos para una reducción de 50% en la amplitud de desplazamiento, se obtiene la siguiente relación a partir de la ecuación (2.2.12):

$$j_{50\%} \simeq 0.11/\zeta \tag{2.2.13}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 2.2.7.

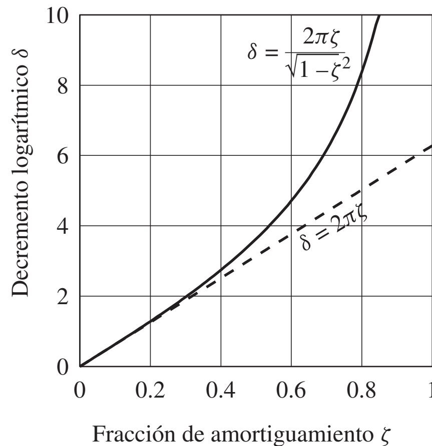


Figura 2.2.6 Relaciones exacta y aproximada entre el decremento logarítmico y la fracción de amortiguamiento.

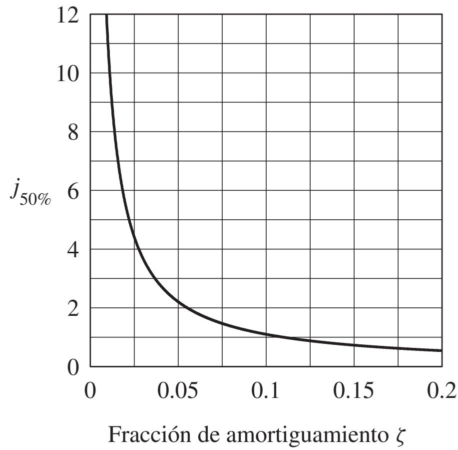


Figura 2.2.7 Número de ciclos necesarios para reducir la amplitud de la vibración libre en 50%.

2.2.4 Pruebas de vibración libre

Debido a que no es posible determinar de manera analítica la fracción de amortiguamiento ζ para las estructuras prácticas, esta propiedad debe determinarse de forma experimental. Los experimentos de vibración libre proporcionan un medio para determinar el amortiguamiento. Tales experimentos sobre dos modelos de un nivel condujeron al registro de vibraciones libres que se presentan en la figura 1.1.4; una parte de dicho registro se muestra en la figura 2.2.8. Para los sistemas ligeramente amortiguados, la fracción de amortiguamiento puede determinarse a partir de

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \qquad \text{o} \qquad \zeta = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}} \tag{2.2.14}$$

La primera de estas ecuaciones es equivalente a la ecuación (2.2.12), que se obtuvo de la ecuación para $u(t)$. La segunda es una ecuación similar en términos de aceleraciones, las cuales son más fáciles de medir que los desplazamientos. Es posible demostrar que es válida para los sistemas ligeramente amortiguados.

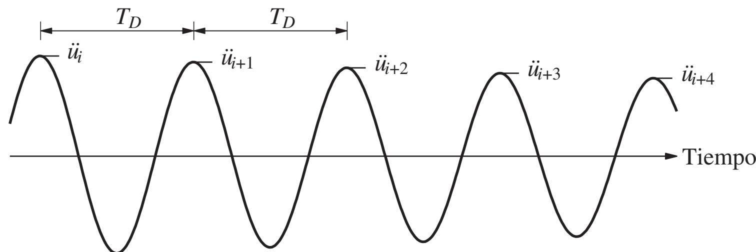


Figura 2.2.8 Registro de la aceleración de un sistema en vibración libre.

El periodo natural T_D del sistema también puede determinarse a partir del registro de la vibración libre al medir el tiempo requerido para completar un ciclo de vibración. Si se compara esto con el periodo natural obtenido de la rigidez y la masa calculada para un sistema idealizado, es posible conocer exactamente cómo se calcularon estas propiedades y qué tan bien la idealización representa a la estructura real.

Ejemplo 2.5

Determine el periodo de vibración natural y la fracción de amortiguamiento del modelo de un marco de plexiglás (figura 1.1.4a) a partir del registro de la aceleración de su vibración libre que se muestra en la figura 1.1.4c.

Solución Los valores pico de la aceleración y los instantes de tiempo en los que se producen, pueden leerse en el registro de la vibración libre u obtenerse a partir de los datos correspondientes almacenados en una computadora durante el experimento. Estos últimos proporcionan los siguientes datos:

Pico	Tiempo, t_i (s)	Pico, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ s} \qquad \zeta = \frac{1}{2\pi(10)} \ln \frac{0.915 \text{ g}}{0.076 \text{ g}} = 0.0396 \text{ o } 3.96\%$$

Ejemplo 2.6

En un tanque elevado de agua, como el de la figura 1.1.2, que se encuentra vacío, se realiza una prueba de vibración libre. Un cable conectado al tanque aplica una fuerza lateral (horizontal) de 16.4 kips y jala al tanque horizontalmente 2 pulgadas. El cable se corta de manera súbita y se registra la vibración libre resultante. Al final de cuatro ciclos completos, el tiempo es de 2.0 segundos y la amplitud es de 1 pulgada. A partir de estos datos calcule lo siguiente: **(a)** la fracción de amortiguamiento; **(b)** el periodo natural de vibración no amortiguada; **(c)** la rigidez; **(d)** el peso; **(e)** el amortiguamiento; y **(f)** el número de ciclos necesarios para que la amplitud de desplazamiento disminuya hasta 0.2 pulgadas.

Solución **(a)** Si se sustituye $u_i = 2$ pulg, $j = 4$ y $u_{i+j} = 1$ pulg en la ecuación (2.2.14a), resulta

$$\zeta = \frac{1}{2\pi(4)} \ln \frac{2}{1} = 0.0276 = 2.76\%$$

El supuesto de amortiguamiento pequeño implícito en la ecuación (2.2.14a) es válido.

(b) $T_D = \dfrac{2.0}{4} = 0.5$ s; $\quad T_n \simeq T_D = 0.5$ s.

(c) $k = \dfrac{16.4}{2} = 8.2$ kips/pulg.

(d) $\omega_n = \dfrac{2\pi}{T_n} = \dfrac{2\pi}{0.5} = 12.57$ rad/s;

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{8.2}{(12.57)^2} = 0.0519 \text{ kip-s}^2\text{/pulg;}$$

$$w = (0.0519)386 = 20.03 \text{ kips.}$$

(e) $c = \zeta(2\sqrt{km}) = 0.0276\left[2\sqrt{8.2(0.0519)}\right] = 0.0360$ kip-s/pulg.

$$\textbf{(f)}\ \zeta \simeq \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_1}{u_{1+j}}; \quad j \simeq \frac{1}{2\pi(0.0276)} \ln \frac{2}{0.2} = 13.28 \text{ ciclos } \sim 13 \text{ ciclos.}$$

Ejemplo 2.7

El peso de agua necesario para llenar el tanque del ejemplo 2.6 es de 80 kips. Determine el periodo de vibración natural y la fracción de amortiguamiento de la estructura con el tanque lleno.

Solución

$$w = 20.03 + 80 = 100.03 \text{ kips}$$

$$m = \frac{100.03}{386} = 0.2591 \text{ kip-s}^2\text{pulg}$$

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2591}{8.2}} = 1.12 \text{ s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{0.0360}{2\sqrt{8.2(0.2591)}} = 0.0123 = 1.23\%$$

Observe que la fracción de amortiguamiento ahora es más pequeña (1.23% frente a 2.76% en el ejemplo 2.6) debido a que la masa del tanque lleno es más grande y, por lo tanto, el amortiguamiento crítico es mayor.

2.3 ENERGÍA EN VIBRACIÓN LIBRE

La energía de entrada a un sistema de 1GDL al impartirle el desplazamiento inicial $u(0)$ y la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ es

$$E_I = \frac{1}{2}k[u(0)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2 \tag{2.3.1}$$

En cualquier instante de tiempo, la energía total en un sistema de vibración libre se compone de dos partes, la energía cinética E_K de la masa y la energía potencial igual a la energía de deformación E_S de la deformación en el resorte:

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m[\dot{u}(t)]^2 \qquad E_S(t) = \frac{1}{2}k[u(t)]^2 \tag{2.3.2}$$

Al sustituir $u(t)$ de la ecuación (2.1.3) para un sistema no amortiguado se llega a

$$E_K(t) = \frac{1}{2}m\omega_n^2\left[-u(0)\,\text{sen}\,\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\cos\omega_n t\right]^2 \tag{2.3.3}$$

$$E_S(t) = \frac{1}{2}k\left[u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\,\text{sen}\,\omega_n t\right]^2 \tag{2.3.4}$$

La energía total es

$$E_K(t) + E_S(t) = \frac{1}{2}k[u(0)]^2 + \frac{1}{2}m[\dot{u}(0)]^2 \tag{2.3.5}$$

donde la ecuación (2.1.4) se ha utilizado junto con una identidad trigonométrica muy conocida.

Por lo tanto, la energía total es independiente del tiempo e igual a la energía de entrada de la ecuación (2.3.1), lo que implica la conservación de la energía durante la vibración libre de un sistema sin amortiguamiento.

Para los sistemas con amortiguamiento viscoso, la energía cinética y la energía potencial podrían determinarse sustituyendo $u(t)$ de la ecuación (2.2.4) y su derivada $\dot{u}(t)$ en la ecuación (2.3.2). La energía total será ahora una función decreciente en el tiempo debido a la energía disipada en el amortiguamiento viscoso, el cual a través del tiempo de 0 a t_1 es

$$E_D = \int f_D \, du = \int_o^{t_1} (c\dot{u})\dot{u} \, dt = \int_o^{t_1} c\dot{u}^2 \, dt \qquad (2.3.6)$$

Toda la energía de entrada se disipará poco a poco en el amortiguamiento viscoso; a medida que t_1 se acerca a ∞, la energía disipada, ecuación (2.3.6), tiende a la energía de entrada, ecuación (2.3.1).

2.4 VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO DE COULOMB

En la sección 1.4 se mencionó que el amortiguamiento en las estructuras reales se debe a varios mecanismos de disipación de energía que actúan al mismo tiempo y que un enfoque matemáticamente conveniente consiste en idealizarlos mediante el amortiguamiento viscoso equivalente. Aunque este enfoque es lo suficientemente exacto para el análisis práctico de la mayoría de las estructuras, puede no ser apropiado cuando se han introducido dispositivos especiales de fricción en un edificio, a fin de reducir las vibraciones durante los sismos. En la actualidad, existe mucho interés en tal aplicación y se mencionará de nuevo en el capítulo 7. En esta sección se analiza la vibración libre de los sistemas en presencia de fuerzas de fricción de Coulomb.

El amortiguamiento de Coulomb resulta de la fricción por deslizamiento de dos superficies secas. La fuerza de fricción es $F = \mu N$, donde μ indica los coeficientes de fricción estática y cinética, tomados como iguales, y N es la fuerza normal entre las superficies deslizantes. Se supone que la fuerza de fricción es independiente de la velocidad una vez que inicia el movimiento. La dirección de la fuerza de fricción se opone al movimiento, y el signo de la fuerza de fricción cambiará cuando se modifique la dirección del movimiento. Esto requiere la formulación y la solución de dos ecuaciones diferenciales, una válida para el movimiento en una dirección y la otra válida cuando el movimiento se invierte.

En la figura 2.4.1 se muestra un sistema masa-resorte, con la masa que se desliza sobre una superficie seca, y los diagramas de cuerpo libre de la masa, incluyendo la fuerza de

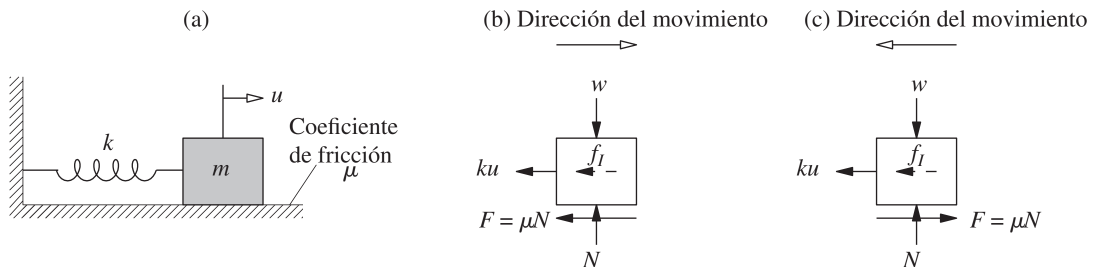


Figura 2.4.1

inercia, para las dos direcciones de movimiento. La ecuación que rige el movimiento de la masa de derecha a izquierda es

$$m\ddot{u} + ku = F \tag{2.4.1}$$

que tiene como solución

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \operatorname{sen} \omega_n t + u_F \tag{2.4.2}$$

donde $u_F = F/k$. La ecuación que rige el movimiento de la masa de izquierda a derecha es

$$m\ddot{u} + ku = -F \tag{2.4.3}$$

que tiene como solución

$$u(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t - u_F \tag{2.4.4}$$

Las constantes A_1, B_1, A_2 y B_2 dependen de las condiciones iniciales de cada medio ciclo de movimiento sucesivo; $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y la constante μ_F puede interpretarse como la deformación estática del resorte debido a la fuerza de fricción F. Cada una de las dos ecuaciones diferenciales es lineal, pero el problema general es no lineal debido a que la ecuación que gobierna el movimiento cambia cada medio ciclo.

Estudiemos el movimiento del sistema de la figura 2.4.1 iniciando con algunas condiciones iniciales dadas y continuando hasta que el movimiento cesa. En el tiempo $t = 0$, la masa se desplaza una distancia $u(0)$ a la derecha y se libera desde el reposo, de modo que $\dot{u}(0) = 0$. Para el primer medio ciclo de movimiento, la ecuación (2.4.2) se aplica con las constantes A_1 y B_1 determinadas a partir de las condiciones iniciales en $t = 0$:

$$A_1 = u(0) - u_F \qquad B_1 = 0$$

Al sustituir esto en la ecuación (2.4.2) se obtiene

$$u(t) = [u(0) - u_F] \cos \omega_n t + u_F \qquad 0 \le t \le \pi/\omega_n \tag{2.4.5}$$

Lo anterior se grafica en la figura 2.4.2; se trata de una función coseno con amplitud igual a $u(0) - u_F$, la cual está desplazada en la dirección u positiva en u_F. La ecuación (2.4.5) es válida hasta que la velocidad se hace cero de nuevo en $t = \pi/\omega_n = T_n/2$ (figura 2.4.2); en este instante $u = -u(0) + 2u_F$.

Iniciando desde esta posición extrema izquierda, la masa se mueve hacia la derecha con su movimiento descrito por la ecuación (2.4.4). Las constantes A_2 y B_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales de este medio ciclo:

$$A_2 = u(0) - 3u_F \qquad B_2 = 0$$

Si se sustituye esto en la ecuación (2.4.4) resulta

$$u(t) = [u(0) - 3u_F] \cos \omega_n t - u_F \qquad \pi/\omega_n \le t \le 2\pi/\omega_n \tag{2.4.6}$$

Lo anterior se representa en la figura 2.4.2, que es una función coseno con amplitud reducida igual a $u(0) - 3u_F$ y desplazada en la dirección negativa de u en u_F. La ecuación (2.4.6) es válida hasta que la velocidad se hace cero de nuevo en $t = 2\pi/\omega_n = T_n$ (figura 2.4.2); en este instante de tiempo $u = u(0) - 4u_F$.

En $t = 2\pi/\omega_n$ el movimiento se invierte y está descrito por la ecuación (2.4.2), que después de evaluar las constantes A_1 y B_1 se convierte en

$$u(t) = [u(0) - 5u_F] \cos \omega_n t + u_F \qquad 2\pi/\omega_n \le t \le 3\pi/\omega_n \tag{2.4.7}$$

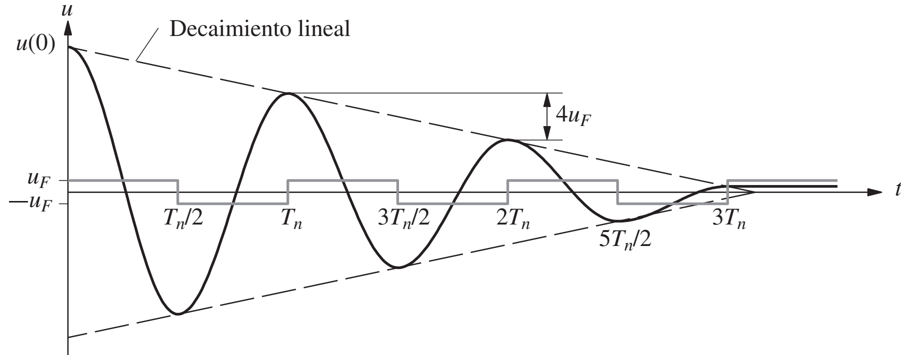


Figura 2.4.2 Vibración libre de un sistema con fricción de Coulomb.

Ésta es una función coseno con su amplitud aún más reducida hasta $u(0) - 5u_F$ y desplazada, como antes, en la dirección u positiva en u_F.

El tiempo requerido para cada medio ciclo es π/ω_n, y la duración de un ciclo completo, el periodo natural de vibración, es

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{2.4.8}$$

Observe que el periodo natural de un sistema con amortiguamiento de Coulomb es el mismo que para un sistema sin amortiguamiento. En contraste, el amortiguamiento viscoso tenía el efecto de alargar el periodo natural [ecuación (2.2.6)].

En cada ciclo de movimiento, la amplitud se reduce en $4u_F$; es decir, los desplazamientos u_i y u_{i+1} en máximos sucesivos se relacionan mediante

$$u_{i+1} = u_i - 4u_F \tag{2.4.9}$$

Por lo tanto, las envolventes de las curvas de tiempo-desplazamiento son líneas rectas, como se muestra en la figura 2.4.2, en vez de las funciones exponenciales para los sistemas con amortiguamiento viscoso.

¿Cuándo se detiene la vibración libre de un sistema con fricción de Coulomb? En cada ciclo la amplitud se reduce en $4u_F$. El movimiento se detiene al final del medio ciclo para el que la amplitud es inferior a u_F. En ese punto, la fuerza del resorte que actúa sobre la masa es menor que la fuerza de fricción, $ku < F$, y el movimiento cesa. En la figura 2.4.2 esto ocurre al final del tercer ciclo. La posición de reposo final de la masa se desplaza desde su posición de equilibrio original y representa una deformación permanente en la que la fuerza de fricción y la fuerza del resorte se anulan. Por lo general, una sacudida o golpe pequeño al sistema hará que éste se mueva lo suficiente para restablecer el equilibrio.

El amortiguamiento en las estructuras reales debe estar relacionado en parte con la fricción de Coulomb, ya que sólo este mecanismo puede detener el movimiento en vibración libre. Si el amortiguamiento fuera sólo viscoso, en teoría el movimiento continuaría por siempre, aunque con amplitudes infinitesimalmente pequeñas. Éste es un punto académico, pero es básico para la comprensión de los mecanismos de amortiguamiento.

Los diversos mecanismos de amortiguamiento que existen en las estructuras reales rara vez se modelan en forma individual. En particular, las fuerzas de fricción de Coulomb que deben existir no se consideran de manera explícita, a menos que se hayan incorporado

dispositivos de fricción en la estructura. Incluso con tales dispositivos es posible utilizar amortiguamientos viscosos equivalentes para obtener resultados aproximados de la respuesta dinámica (capítulo 3).

Ejemplo 2.8

Un pequeño edificio consta de cuatro marcos de acero, cada uno con un dispositivo de fricción, que soportan una losa de concreto reforzado, como se muestra de manera esquemática en la figura E2.8a. La fuerza normal a través de cada una de las placas de fricción cargada por el resorte se iguala a 2.5% del peso de la losa (figura E2.8c). En la figura E2.8d se presenta un registro del movimiento del edificio en vibración libre a lo largo del eje x. Determine el coeficiente efectivo de fricción.

Solución

1. *Supuestos:* (a) el peso de la estructura es insignificante en comparación con la losa. (b) La disipación de energía debida a otros mecanismos que no son de fricción es insignificante, una hipótesis razonable porque la amplitud de movimiento disminuye linealmente con el tiempo (figura E2.8d).

2. *Determine T_n y u_F.*

$$T_n = \frac{4.5}{9} = 0.5 \text{ seg} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$$

$$4u_F = \frac{5.5 - 0.1}{9} = 0.6 \text{ pulg} \qquad u_F = 0.15 \text{ pulg}$$

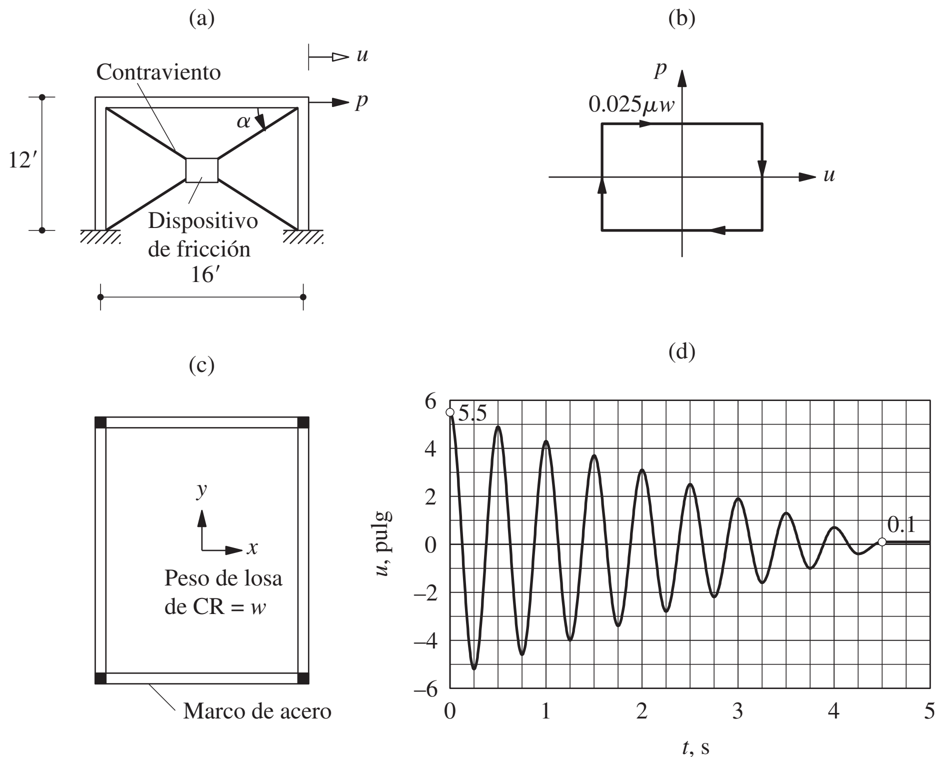


Figura E2.8

3. *Determine el coeficiente de fricción*. La fuerza de fricción a lo largo de cada contraviento es $\mu(0.025w)$ y su componente en la dirección lateral $(0.025\mu w)$ cos α. La fuerza de fricción total en la dirección lateral debida a los cuatro contravientos, dos en cada uno de los dos marcos, es

$$F = 4(0.025\mu w)\cos\alpha = (0.1\mu w)\left(\frac{16}{20}\right) = 0.08\mu w$$

$$u_F = \frac{F}{k} = \frac{0.08\mu w}{k} = \frac{0.08\mu m g}{k} = \frac{0.08\mu g}{\omega_n^2}$$

$$\mu = \frac{u_F\omega_n^2}{0.08g} = \frac{0.15(4\pi)^2}{0.08g} = 0.767$$

PROBLEMAS

2.1 Una mesa pesada se apoya sobre patas de acero planas (figura P2.1). Su periodo natural de vibración lateral es de 0.5 segundos. Cuando se sujeta una placa de 50 libras a su superficie, el periodo natural de vibración lateral se alarga a 0.75 segundos. ¿Cuáles son el peso y la rigidez lateral del sistema?

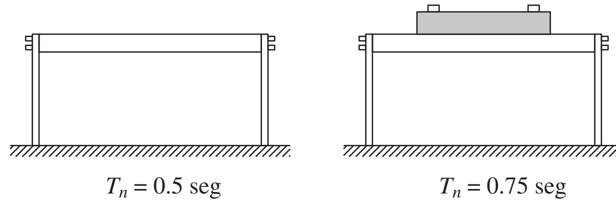


Figura P2.1

2.2 Un electroimán que pesa 400 libras y está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de 100 lb/pulg (figura P2.2a), levanta 200 libras de desechos de acero (figura P2.2b). Determine la ecuación que describe el movimiento cuando la corriente eléctrica se apaga y el acero se deja caer (figura P2.2c).

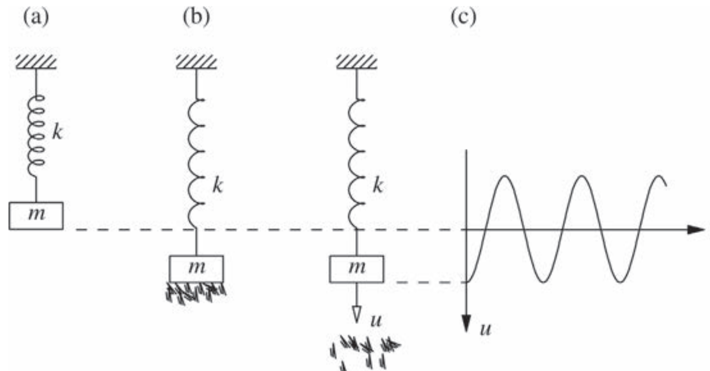


Figura P2.2

2.3 Una masa m está en reposo, soportada en parte por un resorte y en parte por topes (figura P2.3). En la posición que se muestra, la fuerza del resorte es $mg/2$. En el momento $t = 0$ los topes se rotan, liberando la masa de manera repentina. Determine el movimiento de la masa.

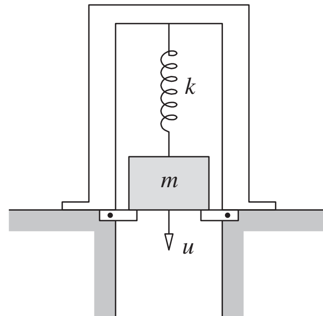


Figura P2.3

2.4 El peso del bloque de madera que se muestra en la figura P2.4 es de 10 libras y la rigidez del resorte es de 100 lb/pulg. Una bala que pesa 0.5 libras se dispara sobre el bloque a una velocidad de 60 pies/seg y se incrusta en éste. Determine el movimiento resultante $u(t)$ del bloque.

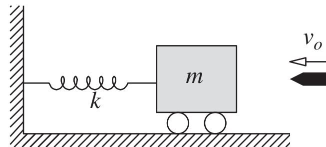


Figura P2.4

2.5 Una masa m_1 cuelga de un resorte k y está en equilibrio estático. Una segunda masa m_2 cae a través de una altura h y se pega a m_1 sin rebote (figura P2.5). Determine el movimiento subsecuente $u(t)$ medido desde la posición de equilibrio estático de m_1 y k.

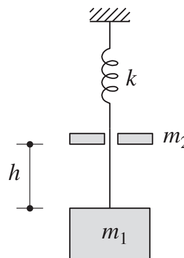


Figura P2.5

2.6 El embalaje para un instrumento puede modelarse como se muestra en la figura P2.6, en donde el instrumento de masa m se restringe por medio de resortes con rigidez total k dentro de un contenedor; $m = 10$ lb/g y $k = 50$ lb/pulg. El contenedor se cae por accidente desde una altura de 3 pies sobre el suelo. Si se supone que no hay rebote al contacto, determine la deformación máxima del embalaje dentro de la caja y la aceleración máxima del instrumento.

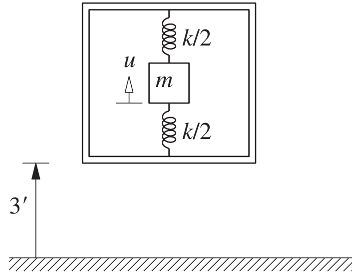


Figura P2.6

2.7 Imagine un clavadista que pesa 200 libras al final de un trampolín con un voladizo de 3 pies. El clavadista oscila a una frecuencia de 2 hertz. ¿Cuál es la rigidez a flexión *EI* del trampolín?

2.8 Demuestre que el movimiento de un sistema críticamente amortiguado debido al desplazamiento inicial $u(0)$ y a la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ es

$$u(t) = \{u(0) + [\dot{u}(0) + \omega_n u(0)]\, t\}\, e^{-\omega_n t}$$

2.9 Demuestre que el movimiento de un sistema amortiguado por encima de su nivel crítico debido al desplazamiento inicial $u(0)$ y a la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ es

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1 e^{-\omega'_D t} + A_2 e^{\omega'_D t}\right)$$

donde $\omega'_D = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ y

$$A_1 = \frac{-\dot{u}(0) + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n u(0)}{2\omega'_D}$$

$$A_2 = \frac{\dot{u}(0) + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n u(0)}{2\omega'_D}$$

2.10 Deduzca la ecuación para la respuesta en desplazamiento de un sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso en respuesta a la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ para tres casos: **(a)** sistemas subamortiguados; **(b)** sistemas críticamente amortiguados; y **(c)** sistemas sobreamortiguados. Grafique $u(t) \div \dot{u}(0)/\omega_n$ versus con t/T_n para $\zeta = 0.1$, 1 y 2.

2.11 Para un sistema con fracción de amortiguamiento ζ, determine el número de ciclos de vibración libre requeridos para reducir la amplitud de desplazamiento hasta 10% de la amplitud inicial; la velocidad inicial es cero.

2.12 ¿Cuál es la relación entre amplitudes de vibración sucesivas si se sabe que la fracción de amortiguamiento viscoso es **(a)** $\zeta = 0.01$, **(b)** $\zeta = 0.05$ o **(c)** $\zeta = 0.25$?

2.13 El sistema que soporta al tanque del ejemplo 2.6 se agranda con el objetivo de incrementar su resistencia sísmica. La rigidez lateral del sistema modificado es el doble de la del sistema original. Si el amortiguamiento no se ve afectado (éste puede ser un supuesto poco realista), para el tanque modificado determine **(a)** el periodo de vibración natural T_n y **(b)** la fracción de amortiguamiento ζ.

2.14 El sistema de suspensión vertical de un automóvil se idealiza como un sistema de 1GDL amortiguado viscosamente. Bajo el peso de 3000 libras del automóvil, el sistema de suspensión experimenta una deflexión de 2 pulgadas. La suspensión está diseñada para ser críticamente amortiguada.

(a) Calcule los coeficientes de amortiguamiento y rigidez de la suspensión.
(b) Con cuatro pasajeros de 160 libras en el automóvil, ¿cuál es la fracción de amortiguamiento efectiva?
(c) Calcule la frecuencia de vibración natural para el caso (b).

2.15 Las propiedades de rigidez y amortiguamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador deben determinarse mediante una prueba de vibración libre; la masa está dada como m = 0.1 lb-s^2/pulg. En esta prueba, la masa se desplaza 1 pulgada por medio de un gato hidráulico y repentinamente se libera. Al final de 20 ciclos completos, el tiempo es de 3 segundos y la amplitud es de 0.2 pulgadas. Determine la rigidez y el amortiguamiento.

2.16 Una máquina que pesa 250 libras está montada sobre un sistema de soporte que consta de cuatro resortes y cuatro amortiguadores. Se mide la deflexión vertical del sistema de soporte bajo el peso de la máquina y es de 0.8 pulgadas. Los amortiguadores están diseñados para reducir la amplitud de la vibración vertical hasta un octavo de la amplitud inicial, después de dos ciclos completos de vibración libre. Determine las siguientes propiedades del sistema: **(a)** la frecuencia natural no amortiguada, **(b)** la fracción de amortiguamiento y **(c)** la frecuencia natural amortiguada. Comente el efecto que tiene el amortiguamiento sobre la frecuencia natural.

2.17 Determine el periodo de vibración natural y la fracción de amortiguamiento del modelo de un marco de aluminio (figura 1.1.4a), a partir del registro en aceleración de su vibración libre mostrado en la figura 1.1.4b.

2.18 Muestre que la frecuencia de vibración natural del sistema de la figura E1.6a es $\omega'_n = \omega_n(1 - w/w_{cr})^{1/2}$, donde ω_n es la frecuencia de vibración natural calculada sin tomar en cuenta la acción de la gravedad, y w_{cr} es el peso de pandeo.

2.19 Una fuerza impulsiva aplicada sobre la losa del techo del edificio del ejemplo 2.8, le da una velocidad inicial de 20 pulg/seg a la derecha. ¿Cuánto se moverá la losa hacia la derecha? ¿Cuál es el desplazamiento máximo de la losa en su oscilación de retorno a la izquierda?

2.20 En la figura P2.20 se muestra un sistema de 1GDL que consta de un peso, un resorte y un dispositivo de fricción. Este dispositivo se desliza con una fuerza igual a 10% del peso, y el periodo de vibración natural del sistema es de 0.25 segundos. Si a este sistema se le da un desplazamiento inicial de 2 pulgadas y se libera, ¿cuál será la amplitud del desplazamiento después de seis ciclos? ¿En cuántos ciclos el sistema regresará al reposo?

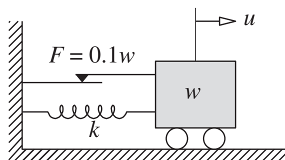


Figura P2.20

3

Respuesta a las excitaciones armónicas y periódicas

AVANCE

La respuesta de los sistemas de 1GDL ante una excitación armónica es un tema clásico en la dinámica estructural, no sólo porque dichas excitaciones se encuentran en los sistemas ingenieriles (por ejemplo, la fuerza debida a la maquinaria rotatoria con una masa excéntrica), sino también porque la comprensión de la respuesta de las estructuras ante una excitación armónica proporciona una visión de la forma en que el sistema responderá a otros tipos de fuerzas. Además, la teoría de la vibración armónica forzada tiene varias aplicaciones útiles en la ingeniería sísmica.

En la parte A de este capítulo se presentan los resultados básicos para la respuesta de los sistemas de 1GDL a una fuerza armónica, incluyendo los conceptos de la *respuesta estacionaria*, la *curva de respuesta en la frecuencia* y la *resonancia*. El tema de la parte B son las aplicaciones de estos resultados a la evaluación experimental de la frecuencia natural de vibración y la fracción de amortiguamiento de una estructura, al aislamiento de la vibración y al diseño de instrumentos para la medición de vibraciones; también se incluye el concepto de *amortiguamiento viscoso equivalente*. Este concepto se utiliza en la parte C para obtener soluciones aproximadas a la respuesta de los sistemas con amortiguamiento independiente de la velocidad o con fricción de Coulomb; después se demuestra que estos resultados son buenas aproximaciones a las soluciones “exactas”. En la parte D se presenta un procedimiento para determinar la respuesta de los sistemas de 1GDL ante una excitación periódica. El procedimiento deseado se obtiene a partir de una representación en series de Fourier de la excitación, combinada con los resultados para la respuesta ante las excitaciones armónicas.

PARTE A: SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: RESULTADOS BÁSICOS

3.1 VIBRACIÓN ARMÓNICA DE SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Una fuerza armónica es $p(t) = p_o$ sen ωt o $p_o \cos \omega t$, donde p_o es la *amplitud* o valor máximo de la fuerza y su frecuencia ω se denomina *frecuencia de excitación* o *frecuencia de forzamiento*; $T = 2\pi/\omega$ es el *periodo de excitación* o *periodo de forzamiento* (figura 3.1.1a). Se presentará con detalle la respuesta de los sistemas de 1GDL ante una fuerza sinusoidal, junto con algunos comentarios breves sobre la respuesta ante una fuerza cosenoidal, debido a que los conceptos involucrados son similares en los dos casos.

Si se establece $p(t) = p_o$ sen ωt en la ecuación (1.5.2), se obtiene la ecuación diferencial que controla la vibración forzada armónica del sistema, que en los sistemas sin amortiguamiento se especifica como

$$m\ddot{u} + ku = p_o \operatorname{sen} \omega t \tag{3.1.1}$$

Esta ecuación debe resolverse para el desplazamiento o deformación $u(t)$ sometido a las condiciones iniciales

$$u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{3.1.2}$$

donde $u(0)$ y $\dot{u}(0)$ son el desplazamiento y la velocidad en el instante de tiempo cuando se aplica la fuerza. La solución particular de esta ecuación diferencial es (vea la deducción 3.1)

$$u_p(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad \omega \neq \omega_n \tag{3.1.3}$$

La solución complementaria de la ecuación (3.1.1) es la respuesta a la vibración libre determinada en la ecuación (d) de la deducción 2.1:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t \tag{3.1.4}$$

y la solución completa es la suma de las soluciones complementaria y particular:

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t \tag{3.1.5}$$

Las constantes A y B se determinan al imponer las condiciones iniciales, ecuación (3.1.2), para obtener el resultado final (vea la deducción 3.1):

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_o}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \operatorname{sen} \omega_n t}_{\text{transitorio}}$$

$$+ \underbrace{\frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t}_{\text{estado estacionario}} \tag{3.1.6a}$$

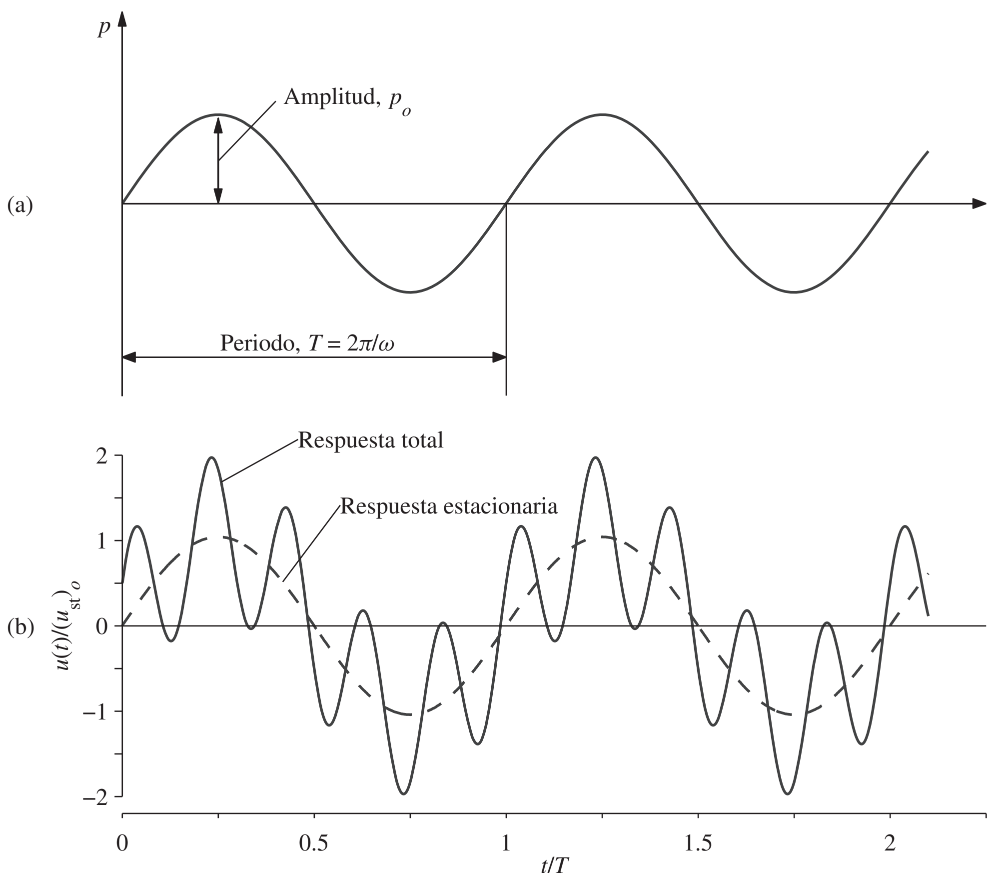


Figura 3.1.1 (a) Fuerza armónica; (b) respuesta del sistema no amortiguado ante una fuerza armónica; $\omega/\omega_n = 0.2$, $u(0) = 0.5p_o/k$, y $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$.

Se ha graficado la ecuación (3.1.6a) para $\omega/\omega_n = 0.2$, $u(0) = 0.5p_o/k$ y $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$ con línea continua en la figura 3.1.1. El término sen ωt en esta ecuación es la solución particular de la ecuación (3.1.3) y se muestra con línea discontinua.

En la ecuación (3.1.6a) y la figura 3.1.1 se muestra que $u(t)$ contiene dos componentes de vibración distintos: (1) el término sen ωt, que proporciona una oscilación con la frecuencia de excitación o forzamiento, y (2) los términos sen $\omega_n t$ y cos $\omega_n t$, que dan una oscilación con la frecuencia natural del sistema. El primero de éstos es la *vibración forzada* o la *vibración de estado estacionario*, que está presente debida a la fuerza aplicada, independientemente de las condiciones iniciales. El segundo es la *vibración libre* o *vibración transitoria*, que depende del desplazamiento y la velocidad iniciales. Ésta existe incluso si $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, en cuyo caso la ecuación (3.1.6a) se define como

$$u(t) = \frac{p_o}{k}\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}\left(\text{sen}\,\omega t - \frac{\omega}{\omega_n}\,\text{sen}\,\omega_n t\right) \tag{3.1.6b}$$

El componente transitorio se muestra como la diferencia entre las líneas continua y discontinua de la figura 3.1.1, donde se ve que continúa indefinidamente. Ésta es sólo una solución académica, porque el amortiguamiento inevitablemente presente en los sistemas reales hace que la vibración libre decaiga con el tiempo (sección 3.2). Es por tal razón que este componente se denomina *vibración transitoria*.

La respuesta dinámica en estado estacionario, una oscilación sinusoidal con la frecuencia de la excitación, puede expresarse como

$$u(t) = (u_{\mathrm{st}})_o \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \operatorname{sen} \omega t \tag{3.1.7}$$

Si se hace caso omiso de los efectos dinámicos representados por el término de aceleración en la ecuación (3.1.1), se obtiene la deformación estática (indicada por el subíndice "st") en cada instante:

$$u_{\mathrm{st}}(t) = \frac{p_o}{k} \operatorname{sen} \omega t \tag{3.1.8}$$

El valor máximo de la deformación estática es

$$(u_{\mathrm{st}})_o = \frac{p_o}{k} \tag{3.1.9}$$

que puede interpretarse como la deformación estática producida por la amplitud p_o de la fuerza; por razones de brevedad, se referirá a $(u_{\mathrm{st}})_o$ como la *deformación estática*. El factor que está entre paréntesis en la ecuación (3.1.7) se grafica en la figura 3.1.2 contra ω/ω_n, la relación de la frecuencia de excitación sobre la frecuencia natural. Para $\omega/\omega_n < 1$ o $\omega < \omega_n$ este factor es positivo, lo que indica que $u(t)$ y $p(t)$ tienen el mismo signo algebraico (es decir, cuando la fuerza de la figura 1.2.1a actúa hacia la derecha, el sistema también se

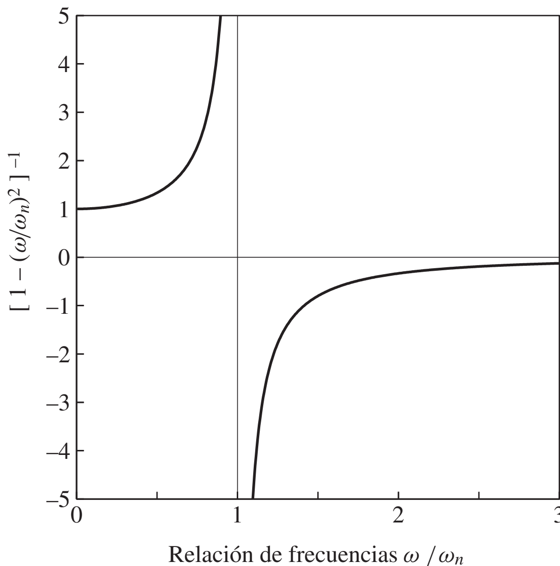


Figura 3.1.2

desplazará a la derecha). Se dice que el desplazamiento está *en fase* con la fuerza aplicada. Para $\omega/\omega_n > 1$ o $\omega > \omega_n$ este factor es negativo, lo que indica que $u(t)$ y $p(t)$ tienen signos algebraicos opuestos (es decir, cuando la fuerza actúa hacia la derecha, el sistema se desplazará a la izquierda). Se dice que el desplazamiento está *fuera de fase* en relación con la fuerza aplicada.

Para describir de manera matemática esta noción de fase se reescribe la ecuación (3.1.7) en términos de la amplitud u_o del desplazamiento vibratorio $u(t)$ y del *ángulo de fase* ϕ:

$$u(t) = u_o \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = (u_{\text{st}})_o R_d \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \qquad (3.1.10)$$

donde

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \frac{1}{\left| 1 - (\omega/\omega_n)^2 \right|} \quad \text{y} \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases} \qquad (3.1.11)$$

Para $\omega < \omega_n$, $\phi = 0°$, lo que implica que el desplazamiento varía con sen ωt, en fase con la fuerza aplicada. Para $\omega > \omega_n$, $\phi = 180°$, lo que indica que el desplazamiento varía con −sen ωt, fuera de fase con relación a la fuerza. Este ángulo de fase se muestra en la figura 3.1.3 como una función de la relación de frecuencias ω/ω_n.

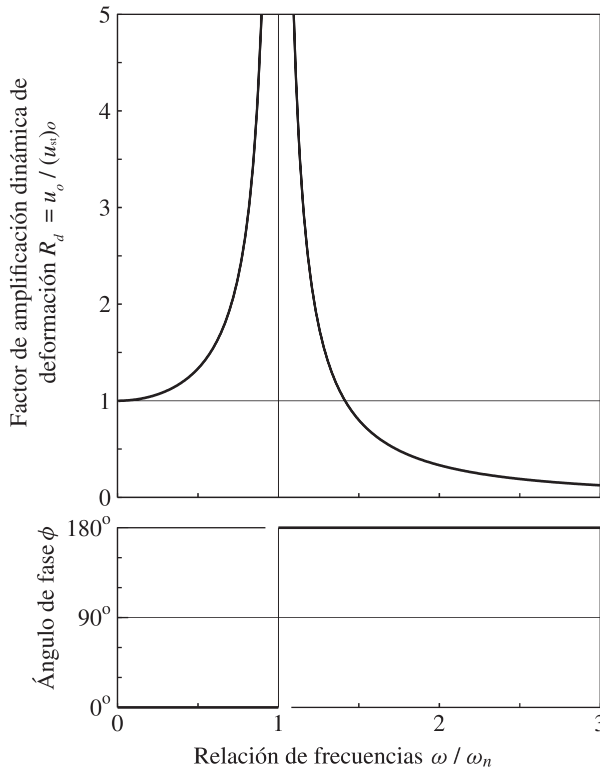


Figura 3.1.3 Factor de amplificación dinámica de deformación y ángulo de fase para un sistema no amortiguado excitado por una fuerza armónica.

El *factor de amplificación dinámica de deformación* (o *de desplazamiento*) R_d es la razón de la amplitud u_o de la deformación dinámica (o vibratoria) sobre la deformación estática $(u_{st})_o$. En la figura 3.1.3, que se muestra la ecuación (3.1.11a) para R_d graficada en función de la relación de frecuencias ω/ω_n, se pueden hacer varias observaciones: si ω/ω_n es pequeña (es decir, si la fuerza "varía lentamente"), R_d es sólo un poco más grande que 1 y la amplitud de la deformación dinámica es en esencia igual a la deformación estática. Si $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ (es decir, si ω es mayor que $\omega_n\sqrt{2}$), $R_d < 1$ y la amplitud de la deformación dinámica es menor que la deformación estática. A medida que ω/ω_n aumenta más allá de $\sqrt{2}$, R_d se hace más pequeña y se aproxima a cero cuando $\omega/\omega_n \to \infty$, lo que implica que la deformación vibratoria debida a una fuerza que "varía rápidamente" es muy pequeña. Si ω/ω_n es cercana a 1 (es decir, si ω es cercana a ω_n), R_d es mucho mayor que 1, lo que implica que la amplitud de la deformación dinámica es mucho mayor que la deformación estática.

La *frecuencia de resonancia* se define como la frecuencia de excitación en la que R_d es máxima. Para un sistema no amortiguado, la frecuencia resonante es ω_n y R_d es infinito en esta frecuencia. Sin embargo, la deformación vibratoria no se vuelve infnita de inmediato, sino poco a poco, como se demuestra a continuación.

Si $\omega = \omega_n$, la solución dada por la ecuación (3.1.6b) ya no es válida. En este caso la elección de la función C sen ωt para una solución particular falla, debido a que también es una parte de la solución complementaria. Ahora, la solución particular es

$$u_p(t) = -\frac{p_o}{2k}\omega_n t \cos \omega_n t \qquad \omega = \omega_n \tag{3.1.12}$$

y la solución completa para condiciones iniciales en reposo, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ es (vea la deducción 3.2)

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_o}{k}(\omega_n t \cos \omega_n t - \operatorname{sen} \omega_n t) \tag{3.1.13a}$$

o

$$\frac{u(t)}{(u_{\rm st})_o} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T_n}\cos\frac{2\pi t}{T_n} - \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T_n}\right) \tag{3.1.13b}$$

Este resultado se representa mediante una gráfica en la figura 3.1.4, en la cual se muestra que el tiempo empleado para completar un ciclo de vibración es T_n. Los máximos locales de $u(t)$, que se producen en el instante $t = (j - 1/2)T_n$, son $\pi(j - 1/2)(u_{\rm st})_o$–$j = 1, 2, 3, \ldots$y los mínimos locales, que ocurren en el instante $t = jT_n$, son $-\pi j(u_{\rm st})_o$–$j = 1, 2, 3, \ldots$ En cada ciclo, la amplitud de la deformación aumenta en

$$|\,u_{j+1}\,| - |\,u_j\,| = (u_{\rm st})_o[\pi(j+1) - \pi j] = \frac{\pi p_o}{k}$$

La amplitud de la deformación crece de manera indefinida, pero se vuelve infinita sólo después de un tiempo infinitamente largo.

Éste es un resultado académico y debe interpretarse apropiadamente para las estructuras reales. A medida que la deformación continúa aumentando, en algún punto del tiempo el sistema fallaría si fuera frágil. Por otro lado, el sistema presentaría fluencia si fuera dúctil, su rigidez se reduciría y su "frecuencia natural" ya no sería igual a la frecuencia forzada; asimismo, la ecuación (3.1.13) o la figura. 3.1.4 ya no serían válidas.

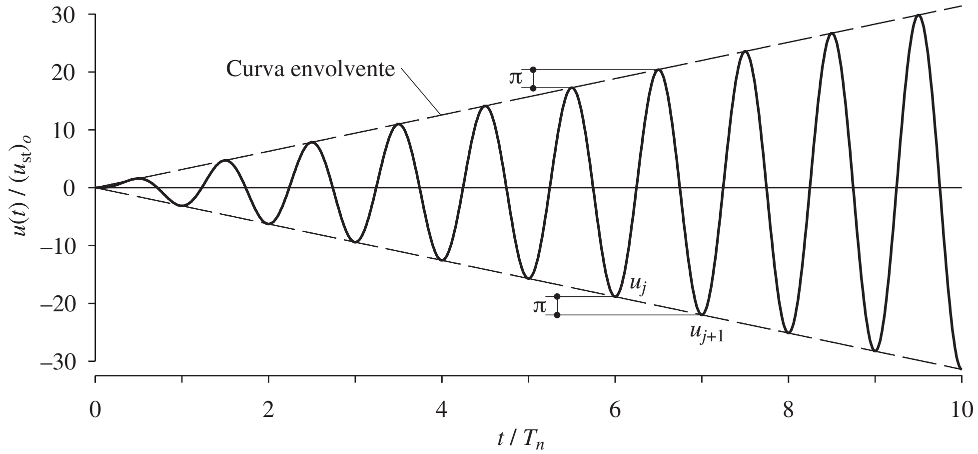


Figura 3.1.4 Respuesta de un sistema no amortiguado ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

Deducción 3.1

La solución particular de la ecuación (3.1.1), una ecuación diferencial lineal de segundo orden, tiene la forma

$$u_p(t) = C \operatorname{sen} \omega t \tag{a}$$

Si esto se diferencia dos veces resulta

$$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 C \operatorname{sen} \omega t \tag{b}$$

Al sustituir las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación diferencial (3.1.1) se llega a una solución para C:

$$C = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{c}$$

que se combina con la ecuación (a) para obtener la solución particular presentada en la ecuación (3.1.3).

Para determinar las constantes A y B de la ecuación (3.1.5), ésta se diferencia:

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t + \frac{p_o}{k} \frac{\omega}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \cos \omega t \tag{d}$$

La evaluación de las ecuaciones (3.1.5) y (d) en $t = 0$ da

$$u(0) = A \qquad \dot{u}(0) = \omega_n B + \frac{p_o}{k} \frac{\omega}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{e}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene

$$A = u(0) \qquad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_o}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{f}$$

que se sustituyen en la ecuación (3.1.5) para obtener la ecuación (3.1.6a).

Deducción 3.2

Si $\omega = \omega_n$, la solución particular de la ecuación (3.1.1) tiene la forma

$$u_p(t) = Ct \cos \omega_n t \tag{a}$$

Si se sustituye la ecuación (a) en la ecuación (3.1.1) y se resuelve para C resulta

$$C = -\frac{p_o}{2k}\omega_n \tag{b}$$

que se combina con la ecuación (a) para obtener la solución particular, ecuación (3.1.12).

Así, la solución completa es

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t - \frac{p_o}{2k}\omega_n t \cos \omega_n t \tag{c}$$

y la velocidad correspondiente es

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \operatorname{sen} \omega_n t + \omega_n B \cos \omega_n t - \frac{p_o}{2k}\omega_n \cos \omega_n t + \frac{p_o}{2k}\omega_n^2 t \operatorname{sen} \omega_n t \tag{d}$$

Al evaluar las ecuaciones (c) y (d) en el instante $t = 0$ y al resolver las ecuaciones algebraicas resultantes, se obtiene

$$A = u(0) \qquad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} + \frac{p_o}{2k}$$

Si se especifica para las condiciones iniciales en reposo resulta

$$A = 0 \qquad B = \frac{p_o}{2k}$$

que se sustituyen en la ecuación (c) para obtener la ecuación (3.1.13a).

3.2 VIBRACIÓN ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

3.2.1 Respuestas en estado estacionario y transitorias

Si se incluye el amortiguamiento viscoso, la ecuación diferencial que controla la respuesta de los sistemas de 1GDL ante una fuerza armónica es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_o \operatorname{sen} \omega t \tag{3.2.1}$$

Esta ecuación debe solucionarse sometida a las condiciones iniciales

$$u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{3.2.2}$$

La solución particular de esta ecuación diferencial es (a partir de la deducción 3.3)

$$u_p(t) = C \operatorname{sen} \omega t + D \cos \omega t \tag{3.2.3}$$

donde

$$C = \frac{p_o}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$
$$D = \frac{p_o}{k} \frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{3.2.4}$$

La solución complementaria de la ecuación (3.2.1) es la respuesta en vibración libre, dada por la ecuación (f) de la deducción 2.2:

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_D t + B \operatorname{sen} \omega_D t)$$

donde $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. La solución completa de la ecuación (3.2.1) es

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\,\text{sen}\,\omega_D t)}_{\text{transitoria}} + \underbrace{C\,\text{sen}\,\omega t + D\cos\omega t}_{\text{estacionaria}} \tag{3.2.5}$$

donde las constantes A y B pueden determinarse mediante los procedimientos estándar (por ejemplo, vea la deducción 3.1) en términos del desplazamiento inicial $u(0)$ y la velocidad inicial $\dot{u}(0)$ Como se señaló en la sección 3.1, $u(t)$ contiene dos componentes de vibración distintos: la *vibración forzada* (términos de la frecuencia de excitación ω) y la *vibración libre* (términos de la frecuencia natural ω_n).

La ecuación (3.2.5) se grafica en la figura 3.2.1 para $\omega/\omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0.5p_o/k$ y $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$ la respuesta total se muestra usando la línea continua y la respuesta forzada por medio de la línea discontinua. La diferencia entre las dos es la respuesta libre, que decae exponencialmente con el tiempo a una tasa que depende de ω/ω_n y ζ; en algún momento, la respuesta en vibración libre se vuelve insignificante, por lo que se le llama *respuesta transitoria*; compare lo anterior con el caso del sin decaimiento para sistemas no amortiguados de la figura 3.1.1. Después de un tiempo, la respuesta forzada permanece y, por lo tanto, se le llama *respuesta estacionaria* y el resto de este capítulo se centrará en ella (después de la sección 3.2.2). Sin embargo, debe reconocerse que la máxima deformación puede ocurrir antes de que el sistema haya alcanzado el estado estacionario, vea la figura 3.2.1.

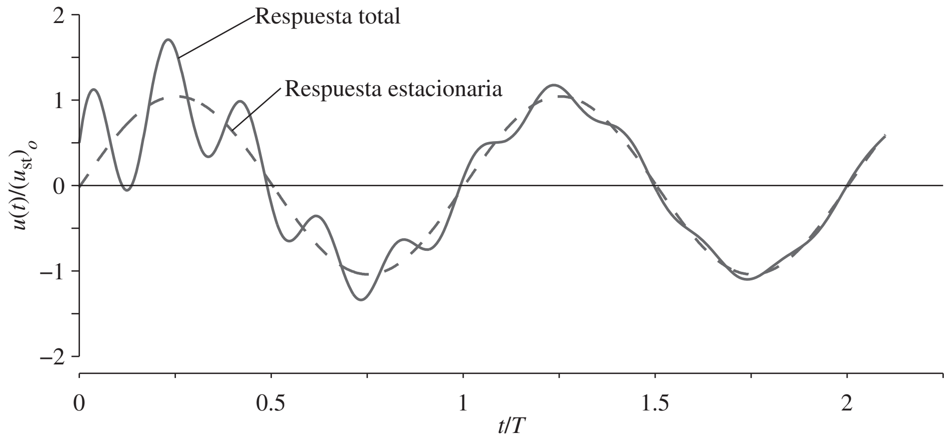


Figura 3.2.1 Respuesta de un sistema amortiguado ante una fuerza armónica; $\omega/\omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0.5p_o/k$, y $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$.

Deducción 3.3

Al dividir la ecuación (3.2.1) entre m se obtiene

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_o}{m}\,\text{sen}\,\omega t \tag{a}$$

La solución particular de la ecuación (a) tiene la forma

$$u_p(t) = C\,\text{sen}\,\omega t + D\cos\omega t \tag{b}$$

Al sustituir la ecuación (b) y sus primera y segunda derivadas en la ecuación (a) resulta

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)C - 2\zeta\omega_n\omega D]\,\text{sen}\,\omega t + [2\zeta\omega_n\omega C + (\omega_n^2 - \omega^2)D]\cos\omega t = \frac{p_o}{m}\,\text{sen}\,\omega t \tag{c}$$

Para que la ecuación (c) sea válida para toda t, los coeficientes de los términos de seno y coseno en los dos lados de la ecuación deben ser iguales. Este requisito proporciona dos ecuaciones en C y D que, después de dividirlas entre ω_n^2 y de usar la relación $k = \omega_n^2 m$ se convierten en

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]C - \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)D = \frac{p_o}{k} \tag{d}$$

$$\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)C + \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]D = 0 \tag{e}$$

Si se resuelven las dos ecuaciones algebraicas (d) y (e), se llega a la ecuación (3.2.4).

3.2.2 Respuesta para $\omega = \omega_n$

En esta sección se examina el papel del amortiguamiento en la rapidez con la que se alcanza la respuesta de estado estacionario y en la limitación de la magnitud de esta respuesta cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural. Para $\omega = \omega_n$, la ecuación (3.2.4) da $C = 0$ y $D = -(u_{st})_o/2\zeta$; para $\omega = \omega_n$ y condiciones iniciales cero, es posible determinar las constantes A y B en la ecuación (3.2.5): $A = (u_{st})_o/2\zeta$ y $B = (u_{st})_o/2\sqrt{1-\zeta^2}$ Con estas soluciones para A, B, C y D, la ecuación (3.2.5) se convierte en

$$u(t) = (u_{st})_o\frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}\,\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right] \tag{3.2.6}$$

Este resultado se grafica en la figura 3.2.2 para un sistema con $\zeta = 0.05$. Una comparación entre la figura 3.2.2 para sistemas amortiguados y la figura 3.1.4 para sistemas sin amortiguamiento muestra que el amortiguamiento reduce cada pico y restringe la respuesta al valor límite:

$$u_o = \frac{(u_{st})_o}{2\zeta} \tag{3.2.7}$$

Para los sistemas ligeramente amortiguados, el término sinusoidal de la ecuación (3.2.6) es pequeño y $\omega_D \simeq \omega_n$; así

$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{st})_o\frac{1}{2\zeta}(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{función envolvente}}\cos\omega_n t \tag{3.2.8}$$

La deformación varía con el tiempo como una función coseno; es decir, su amplitud aumenta con el tiempo de acuerdo con la función envolvente que se muestra mediante líneas discontinuas en la figura 3.2.2.

La amplitud de la deformación en estado estacionario de un sistema ante una fuerza armónica, con $\omega = \omega_n$, y la velocidad a la que se alcanza el estado estacionario están muy influenciadas por el amortiguamiento.

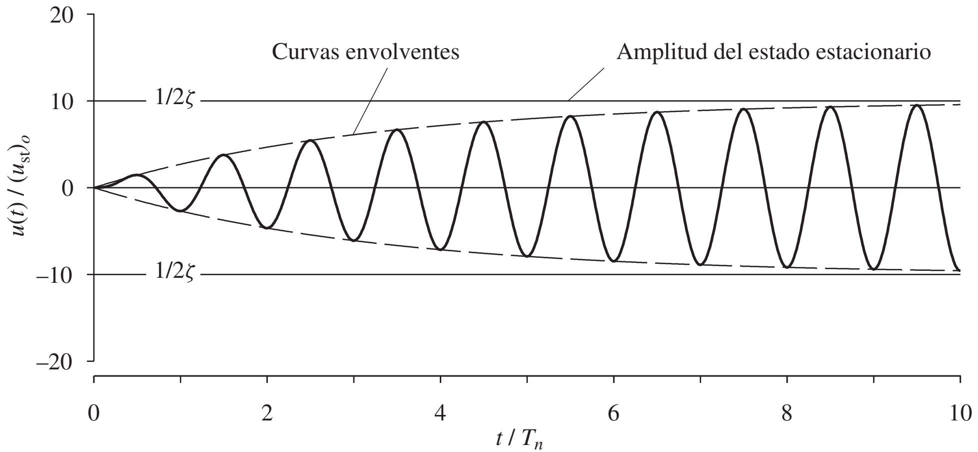


Figura 3.2.2 Respuesta de un sistema amortiguado con $\zeta = 0.05$ ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

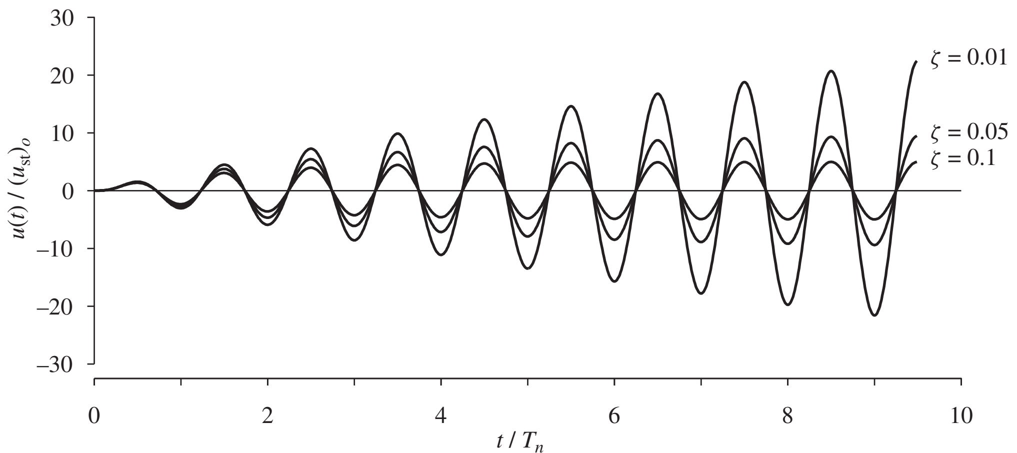


Figura 3.2.3 Respuesta de tres sistemas ($\zeta = 0.01$, 0.05 y 0.1) ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

La importante influencia de la fracción de amortiguamiento sobre la amplitud se ve en la figura 3.2.3, donde la ecuación (3.2.6) se representa mediante tres fracciones de amortiguamiento: $\zeta = 0.01$, 0.05 y 0.1. Para estudiar cómo la respuesta se convierte en el estado estacionario, se analiza el u_j pico después de j ciclos de vibración. Es posible escribir una relación entre u_j y j si se sustituye $t = jT_n$ en la ecuación (3.2.8), estableciendo $\cos \omega_n t = 1$ y se usa la ecuación (3.2.7) para obtener

$$\frac{|u_j|}{u_o} = 1 - e^{-2\pi\zeta j} \tag{3.2.9}$$

Esta relación se representa en la figura 3.2.4 para $\zeta = 0.01$, 0.02, 0.05, 0.10 y 0.20. Los puntos discretos se unen mediante curvas para identificar tendencias, pero sólo los valores enteros de j son significativos.

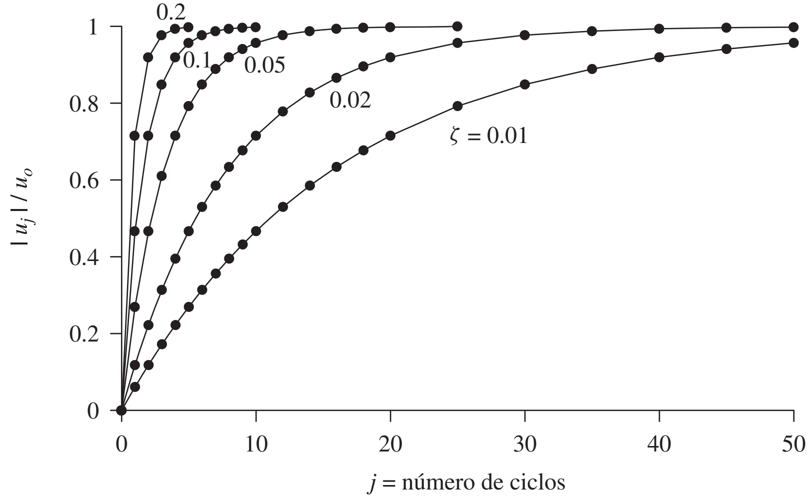


Figura 3.2.4 Variación de la amplitud de la respuesta de acuerdo con el número de ciclos de una fuerza armónica con frecuencia $\omega = \omega_n$.

Entre más pequeño sea el amortiguamiento, mayor será el número de ciclos necesarios para alcanzar un determinado porcentaje de u_o, la amplitud del estado estacionario. Por ejemplo, el número de ciclos necesarios para alcanzar el 95% de u_o es 48 para $\zeta = 0.01$, 24 para $\zeta = 0.02$, 10 para $\zeta = 0.05$, 5 para $\zeta = 0.10$, y 2 para $\zeta = 0.20$.

3.2.3 Deformación máxima y cambio de fase

La deformación en el estado estacionario del sistema debida a una fuerza armónica, la cual se describe mediante las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4), puede reescribirse como

$$u(t) = u_o \operatorname{sen}(\omega t - \phi) = (u_{st})_o R_d \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.2.10}$$

donde la amplitud de la respuesta $u_o = \sqrt{C^2 + D^2}$ y $\phi = \tan^{-1}(-D/C)$. Al sustituir C y D se obtiene el *factor de amplificación dinámica de deformación*:

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{3.2.11}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{3.2.12}$$

La ecuación (3.2.10) se representa mediante una gráfica en la figura 3.2.5 para tres valores de ω/ω_n y un valor fijo de $\zeta = 0.20$. Se identifican los valores de R_d y ϕ calculados con base en las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.12). También se muestra por medio de líneas discontinuas la deformación estática (ecuación 3.1.8) debida a $p(t)$, que varía con el tiempo tal como lo hace la fuerza aplicada, a excepción de la constante k. Se observa que el movimiento de estado estacionario ocurre en el periodo de excitación $T = 2\pi/\omega$, pero con un retraso de tiempo $= \phi/2\pi$; ϕ se llama *ángulo de fase* o *cambio de fase*.

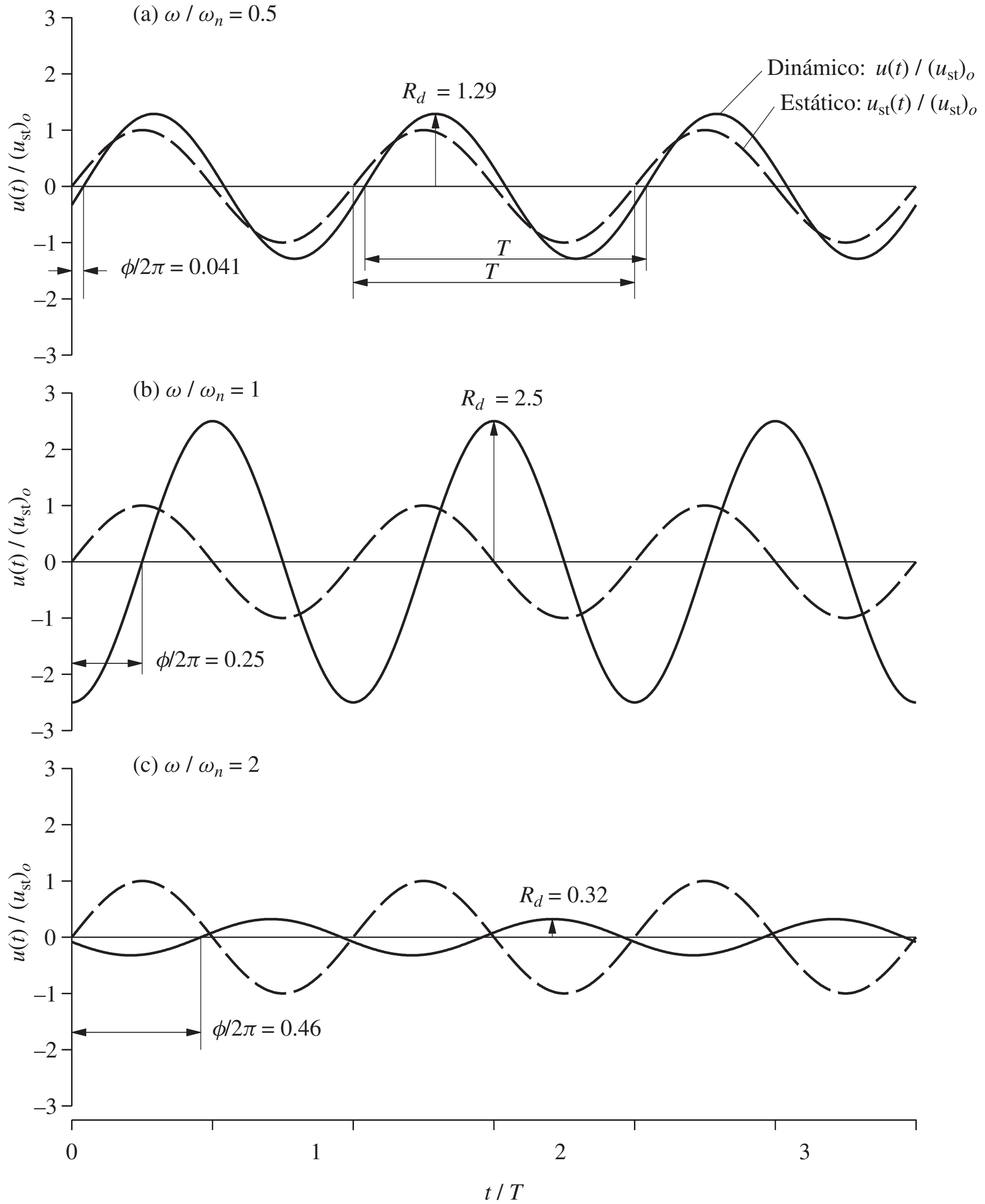


Figura 3.2.5 Respuesta estacionaria de los sistemas amortiguados ($\zeta = 0.2$) ante una fuerza sinusoidal para tres valores de la relación de frecuencias: (a) $\omega/\omega_n = 0.5$, (b) $\omega/\omega_n = 1$, (c) $\omega/\omega_n = 2$.

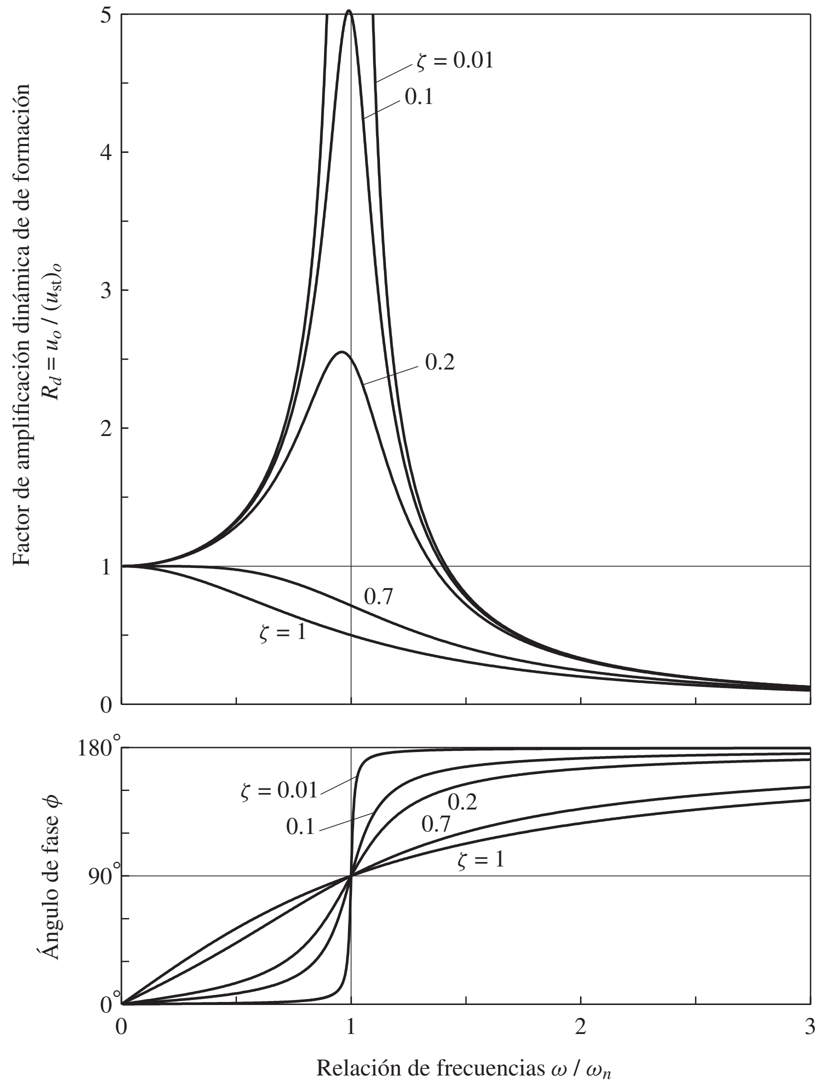


Figura 3.2.6 Factor de amplificación dinámica de deformación y ángulo de fase de un sistema amortiguado excitado por una fuerza armónica.

Una gráfica de la amplitud de una respuesta contra la frecuencia de excitación se denomina *curva de respuesta en la frecuencia*. En la figura 3.2.6 se presenta dicha gráfica para la deformación u, donde el factor de amplificación dinámica de deformación R_d (obtenido de la ecuación 3.2.11) se representa gráficamente como una función de ω/ω_n para unos cuantos valores de ζ; todas las curvas están por debajo de la curva $\zeta = 0$ de la figura 3.1.3. El amortiguamiento reduce a R_d y por consiguiente a la amplitud de la deformación en todas las frecuencias de excitación.

La magnitud de esta reducción es muy dependiente de la frecuencia de excitación, y se analiza a continuación para tres regiones de la escala de excitación-frecuencia:

1. Si la relación de frecuencias $\omega/\omega_n \ll 1$ (es decir, $T \gg T_n$, lo que implica que la fuerza "varía lentamente"), R_d es sólo un poco mayor que 1 y es independiente del amortiguamiento. Así

$$u_o \simeq (u_{\text{st}})_o = \frac{p_o}{k} \tag{3.2.13}$$

Este resultado implica que la amplitud de la respuesta dinámica es en esencia la misma que la deformación estática y está controlada por la rigidez del sistema.

2. Si $\omega/\omega_n \gg 1$ (es decir, $T \ll T_n$, lo que implica que la fuerza "varía rápidamente"), R_d tiende a cero a medida que ω/ω_n aumenta y no se ve afectada por el amortiguamiento. Para los valores grandes de ω/ω_n, el término $(\omega/\omega_n)^4$ es dominante en la ecuación (3.2.11), la cual puede aproximarse mediante

$$u_o \simeq (u_{\text{st}})_o \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_o}{m\omega^2} \tag{3.2.14}$$

Este resultado implica que la respuesta está controlada por la masa del sistema.

3. Si $\omega/\omega_n \simeq 1$ (es decir, la frecuencia de excitación es cercana a la frecuencia natural del sistema), R_d es muy sensible al amortiguamiento y, para los valores más pequeños de amortiguamiento, R_d puede ser mucho mayor que 1, lo que implica que la amplitud de la respuesta dinámica puede ser mucho mayor que la deformación estática. Si $\omega = \omega_n$, la ecuación (3.2.11) da

$$u_o = \frac{(u_{\text{st}})_o}{2\zeta} = \frac{p_o}{c\omega_n} \tag{3.2.15}$$

Este resultado implica que la respuesta está controlada por el amortiguamiento del sistema.

El ángulo de fase ϕ, que define el tiempo entre la respuesta y la fuerza, varía con ω/ω_n como se muestra en la figura 3.2.6, y se examina a continuación para las mismas tres regiones de la escala de frecuencia de la excitación:

1. Si $\omega/\omega_n \ll 1$ (es decir, la fuerza "varía lentamente"), ϕ está cerca de 0° y el desplazamiento está en fase con la fuerza aplicada, como en la figura 3.2.5a. Cuando la fuerza en la figura 1.2.1a actúa hacia la derecha, el sistema también se desplaza a la derecha.

2. Si $\omega/\omega_n \gg 1$ (es decir, la fuerza "varía rápidamente"), ϕ está cerca de 180° y el desplazamiento está esencialmente en fase opuesta a la fuerza aplicada, como en la figura 3.2.5c. Cuando la fuerza actúa hacia la derecha, el sistema se desplaza hacia la izquierda.

3. Si $\omega/\omega_n = 1$ (es decir, la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural), $\phi = 90°$ para todos los valores de ζ, y el desplazamiento alcanza sus picos cuando la fuerza pasa a través de los ceros, como en la figura 3.2.5b.

Ejemplo 3.1

La amplitud u_o del desplazamiento de un sistema de 1GDL debido a una fuerza armónica se conoce para dos frecuencias de excitación. En $\omega = \omega_n$, $u_o = 5$ pulg; en $\omega = 5\omega_n$, $u_o = 0.02$ pulg. Estime la fracción de amortiguamiento del sistema.

Solución En $\omega = \omega_n$, a partir de la ecuación (3.2.15),

$$u_o = (u_{st})_o \frac{1}{2\zeta} = 5 \tag{a}$$

En $\omega = 5\omega_n$, a partir de la ecuación (3.2.14),

$$u_o \simeq (u_{st})_o \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} = \frac{(u_{st})_o}{25} = 0.02 \tag{b}$$

De la ecuación (B), $(u_{st})_o = 0.5$ pulg. Al sustituir en la ecuación (a) se obtiene $\zeta = 0.05$.

3.2.4 Factores de amplificación dinámica

En esta sección se presentan los factores de respuesta de deformación (o desplazamiento), de velocidad y de aceleración que son adimensionales y definen la amplitud de estas tres cantidades de respuesta. Por conveniencia, se repite el desplazamiento en estado estacionario de la ecuación (3.2.10):

$$\frac{u(t)}{p_o/k} = R_d \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.2.16}$$

donde el *factor de respuesta de deformación* R_d es la relación de la amplitud u_o de la deformación dinámica (o vibratoria) sobre la deformación estática $(u_{st})_o$; vea la ecuación (3.2.11).

Al diferenciar la ecuación (3.2.16) se obtiene una ecuación para la respuesta de velocidad:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_o/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \tag{3.2.17}$$

donde el *factor de amplificación dinámica de velocidad* R_v se relaciona con R_d mediante

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{3.2.18}$$

Al diferenciar la ecuación (3.2.17) se obtiene una ecuación para la respuesta de aceleración:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_o/m} = -R_a \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.2.19}$$

donde el *factor de amplificación dinámica de aceleración* R_a se relaciona con R_d mediante

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{3.2.20}$$

Observe en la ecuación (3.2.19) que R_a es la relación de la amplitud de la aceleración vibratoria sobre la aceleración debida a la fuerza p_o que actúa sobre la masa.

En la figura 3.2.7 los factores de amplificación dinámica R_d, R_v y R_a se representan como funciones de ω/ω_n. Las gráficas de R_v y R_a son nuevas, pero la de R_d es igual a la presentada en la figura 3.2.6. El factor de amplificación dinámica de deformación R_d es uno en $\omega/\omega_n = 0$, tiene un pico en $\omega/\omega_n < 1$ y tiende a cero cuando $\omega/\omega_n \to \infty$. El factor de amplificación dinámica de velocidad R_v es cero en $\omega/\omega_n = 0$, tiene un pico en $\omega/\omega_n = 1$ y tiende a cero cuando $\omega/\omega_n \to \infty$. El factor de amplificación dinámica de aceleración R_a es cero en $\omega/\omega_n = 0$, tiene un pico en $\omega/\omega_n > 1$ y se aproxima a uno cuando $\omega/\omega_n \to \infty$. Si $\zeta > 1/\sqrt{2}$, no se presenta ningún pico para R_d y R_a.

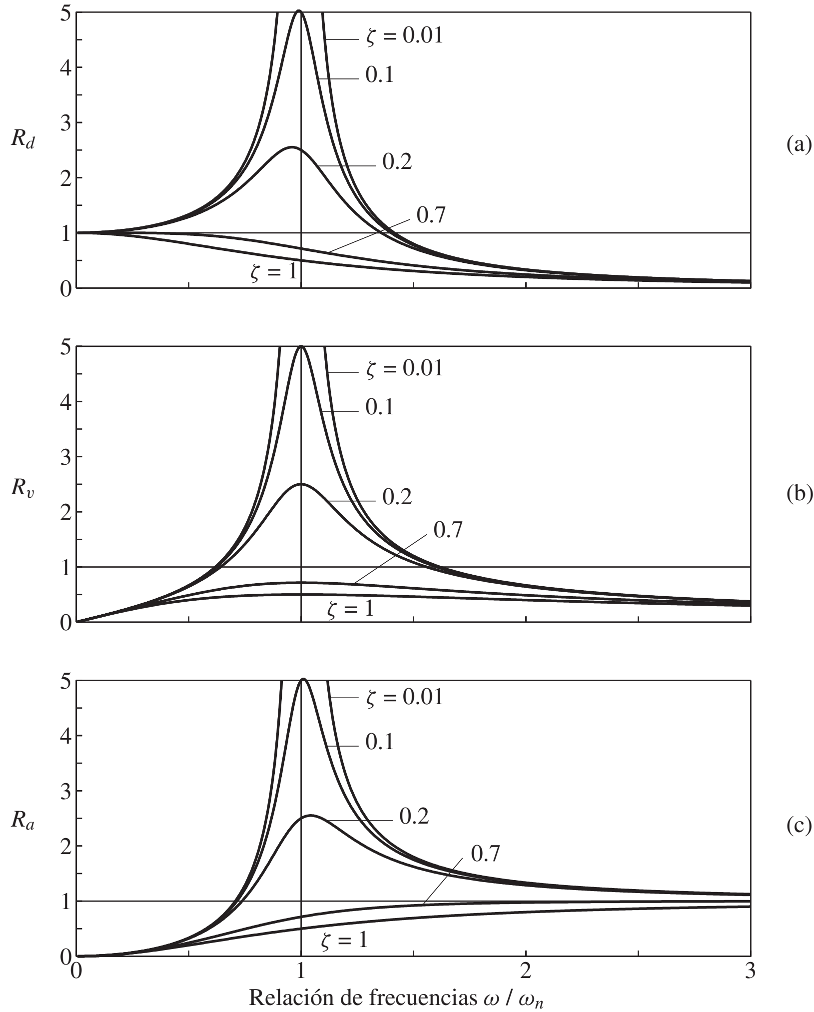


Figura 3.2.7 Factores de respuesta de deformación, velocidad y aceleración de un sistema amortiguado excitado por una fuerza armónica.

Las relaciones simples entre los factores de amplificación dinámica

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{3.2.21}$$

hacen posible presentar los tres factores en una sola gráfica. Los datos de R_v-ω/ω_n en la gráfica lineal de la figura 3.2.7b se representan de nuevo como se muestra en la figura 3.2.8 en una gráfica en escala tetralogarítmica. Los valores de R_d y R_a pueden leerse en las escalas logarítmicas orientadas diagonalmente, las cuales son diferentes a la escala vertical para R_v. Esta presentación compacta hace posible sustituir las tres gráficas lineales de la figura 3.2.7

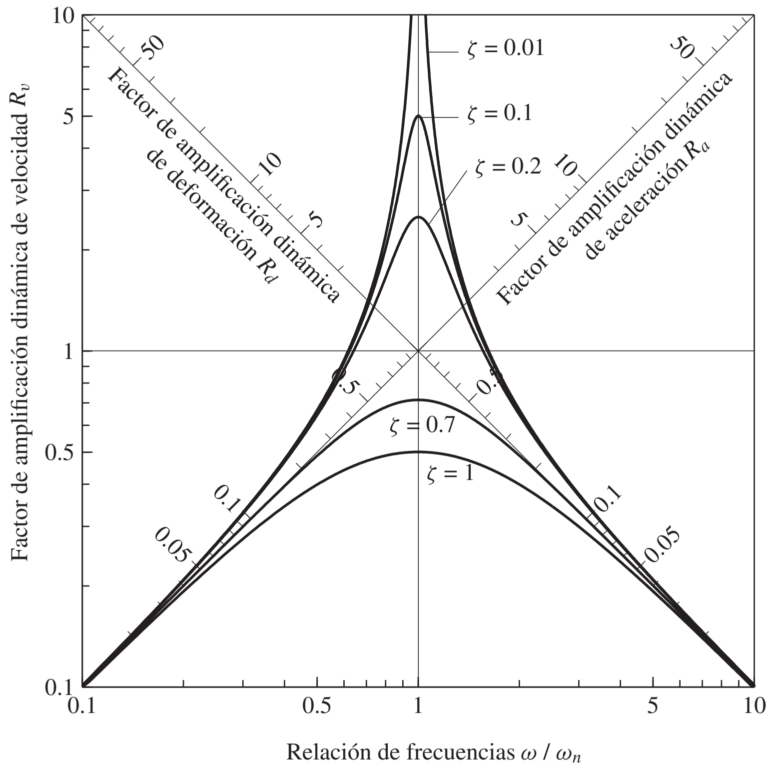


Figura 3.2.8 Gráfica en escala tetralogarítmica para los factores de respuesta de deformación, velocidad y aceleración de un sistema amortiguado excitado por una fuerza armónica.

por una sola representación. Los conceptos subyacentes a la construcción de esta gráfica en escala tetralogarítmica se presentan en el apéndice 3.

3.2.5 Frecuencias resonantes y respuestas resonantes

Una *frecuencia resonante* se define como la frecuencia de excitación en la que se presenta la amplitud más grande de la respuesta. En la figura 3.2.7 se muestra que los picos en las curvas de respuesta en la frecuencia para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración se producen en frecuencias ligeramente diferentes. Estas frecuencias resonantes pueden determinarse al igualar a cero la primera derivada de R_d, R_v y R_a con respecto a ω/ω_n; para $\zeta < 1/\sqrt{2}$ son:

Frecuencia resonante del desplazamiento: $\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
Frecuencia resonante de la velocidad: ω_n
Frecuencia resonante de la aceleración: $\omega_n \div \sqrt{1-2\zeta^2}$

Para un sistema sin amortiguamiento, las tres frecuencias resonantes son idénticas e iguales a la frecuencia natural ω_n del sistema. La intuición podría sugerir que las frecuencias

resonantes de un sistema amortiguado deben estar en su frecuencia natural $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, pero esto no sucede; aunque la diferencia es pequeña. Para el grado de amortiguamiento que se incorpora en las estructuras, por lo general muy por debajo de 20%, las diferencias entre las tres frecuencias resonantes y la frecuencia natural son pequeñas.

Los tres factores de amplificación dinámica en sus frecuencias resonantes respectivas son

$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad R_v = \frac{1}{2\zeta} \qquad R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.2.22}$$

3.2.6 Ancho de banda

Una propiedad importante de la curva de respuesta en la frecuencia para R_d se muestra en la figura 3.2.9, donde se define el *ancho de banda*. Si ω_a y ω_b son las frecuencias de excitación

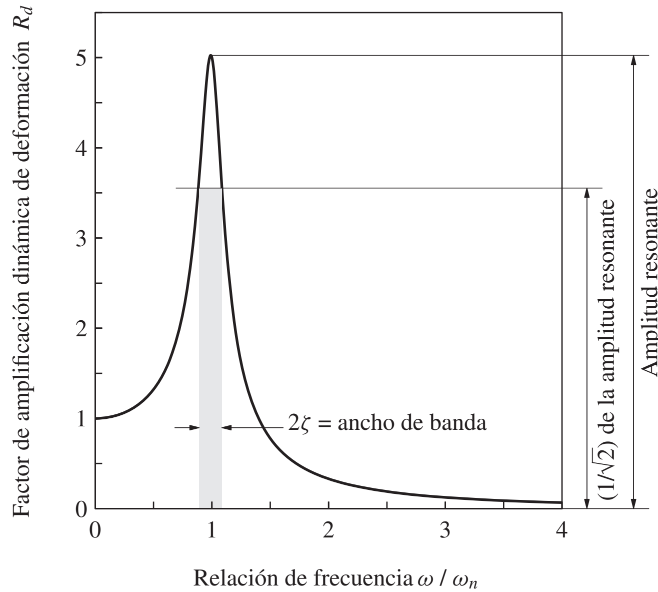


Figura 3.2.9 Definición del ancho de banda.

a cada lado de la frecuencia resonante en la que la amplitud u_o es $1/\sqrt{2}$ veces la amplitud resonante, entonces para una ζ pequeña

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} = 2\zeta \tag{3.2.23}$$

Este resultado, obtenido en la deducción 3.4, puede reescribirse como

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \qquad \text{o} \qquad \zeta = \frac{f_b - f_a}{2f_n} \tag{3.2.24}$$

donde $f = \omega/2\pi$ es la frecuencia cíclica. Este resultado importante permite la evaluación del amortiguamiento a partir de pruebas de vibración forzada, sin conocer la fuerza aplicada (sección 3.4).

Deducción 3.4

Si se iguala R_d de la ecuación (3.2.11) con $1/\sqrt{2}$ veces la amplitud resonante de R_d obtenida mediante la ecuación (3.2.22), por definición, las frecuencias de excitación ω_a y ω_b satisfacen la condición

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{a}$$

Si se invierten ambos lados, se elevan al cuadrado y se reordenan los términos resulta

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1-\zeta^2) = 0 \tag{b}$$

La ecuación (b) es una ecuación cuadrática en $(\omega/\omega_n)^2$, cuyas raíces son

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = (1-2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \tag{c}$$

donde el signo positivo da la raíz más grande ω_b y el signo negativo corresponde a la raíz más pequeña ω_a.

Para las fracciones de amortiguamiento pequeñas representativas de las estructuras en la práctica, los dos términos que contienen ζ^2 pueden eliminarse y

$$\frac{\omega}{\omega_n} \simeq (1 \pm 2\zeta)^{1/2} \tag{d}$$

Si se toma sólo el primer término de la expansión de la serie de Taylor a la derecha se obtiene

$$\frac{\omega}{\omega_n} \simeq 1 \pm \zeta \tag{e}$$

Al restar la raíz más pequeña de la más grande resulta

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \simeq 2\zeta \tag{f}$$

3.2.7 Respuesta en estado estacionario ante una fuerza cosenoidal

La ecuación diferencial que debe resolverse es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_o \cos \omega t \tag{3.2.25}$$

La solución particular dada por la ecuación (3.2.3) sigue siendo aplicable, pero en este caso las constantes C y D son

$$\begin{aligned} C &= \frac{p_o}{k}\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \\ D &= \frac{p_o}{k}\frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Éstas se determinan mediante el procedimiento de la deducción 3.3. La respuesta estacionaria dada por las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.26) puede expresarse como

$$u(t) = u_o \cos(\omega t - \phi) = (u_{\text{st}})_o R_d \cos(\omega t - \phi) \tag{3.2.27}$$

donde la amplitud u_o, el factor de amplificación dinámica de deformación R_d y el ángulo de fase ϕ son los mismos que se dedujeron en la sección 3.2.3 para una fuerza sinusoidal. Esta similitud de las respuestas estacionarias para las dos fuerzas armónicas no es sorprendente puesto que las dos excitaciones son iguales a excepción de un cambio de tiempo.

PARTE B: SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: APLICACIONES

3.3 RESPUESTA ANTE UN GENERADOR DE VIBRACIÓN

Los generadores de vibración (o máquinas de agitación) se desarrollaron para proporcionar una fuente de excitación armónica apropiada para probar estructuras a escala real. En esta sección se presentan los resultados teóricos para la respuesta estacionaria de un sistema de 1GDL ante una fuerza armónica causada por un generador de vibraciones. Estos resultados proporcionan una base para evaluar la frecuencia natural y el amortiguamiento de una estructura a partir de datos experimentales (sección 3.4).

3.3.1 Generador de vibración

En la figura 3.3.1 se muestra un generador de vibración que tiene la forma de dos cestas planas que giran en direcciones opuestas alrededor de un eje vertical. Al colocar cantidades diferentes de pesos de plomo en las cestas, es posible alterar las magnitudes de las masas giratorias. Las dos masas $m_e/2$ con direcciones de giro opuestas se muestran de manera esquemática en la figura 3.3.2 como masas concentradas con excentricidad $= e$; sus localizaciones en el momento $t = 0$ se muestran en (a) y en algún tiempo t en (b). Los componentes x de las fuerzas de inercia de las masas en rotación se anulan y los componentes y se combinan para producir una fuerza

$$p(t) = (m_e e \omega^2) \operatorname{sen} \omega t \tag{3.3.1}$$

Si se atornilla el generador de vibraciones a la estructura que debe excitarse, esta fuerza puede ser transmitida a la estructura. La amplitud de la fuerza armónica es proporcional al cuadrado de la frecuencia de excitación ω. Por lo tanto, la generación de la fuerza en frecuencias bajas resulta difícil y poco práctica si se desea obtener la respuesta estática de una estructura.

3.3.2 Respuesta estructural

Si se supone que la masa excéntrica m_e es pequeña en comparación con la masa m de la estructura, la ecuación que controla el movimiento de un sistema de 1GDL excitado por un generador de vibración es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \left(m_e e \omega^2\right) \operatorname{sen} \omega t \tag{3.3.2}$$

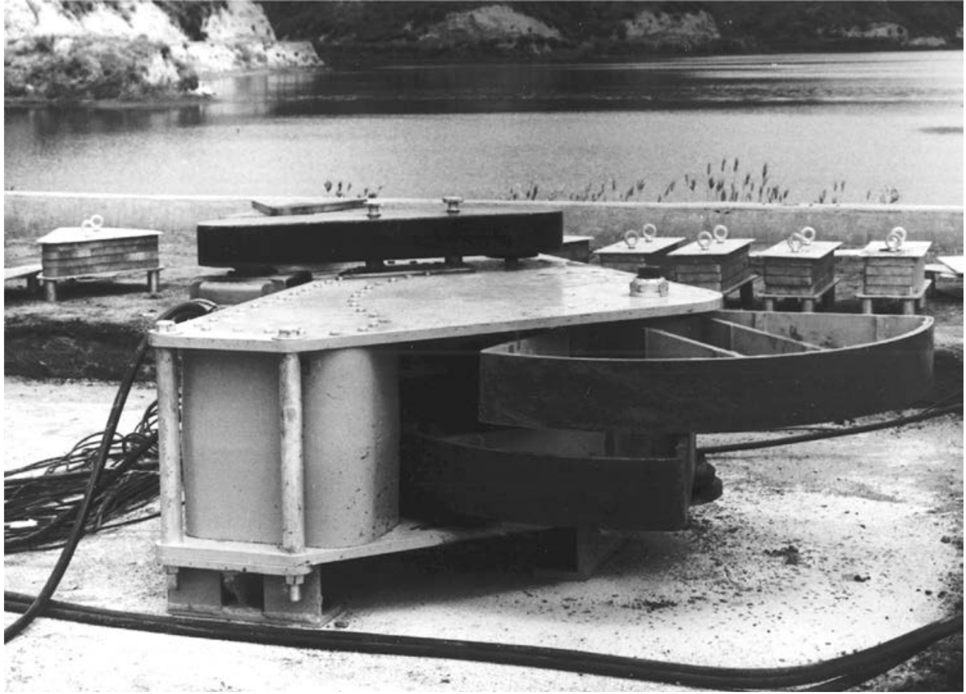


Figura 3.3.1 Generador de vibración con peso excéntrico y giro en oposición.

Las amplitudes del desplazamiento y la aceleración en estado estacionario de un sistema de 1GDL están dadas por los valores máximos de las ecuaciones (3.2.16) y (3.2.19) con $p_o = m_e e\omega^2$.

Así,

$$u_o = \frac{m_e e}{k}\omega^2 R_d = \frac{m_e e}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{3.3.3}$$

$$\ddot{u}_o = \frac{m_e e}{m}\omega^2 R_a = \frac{m_e e\omega_n^2}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_a \tag{3.3.4}$$

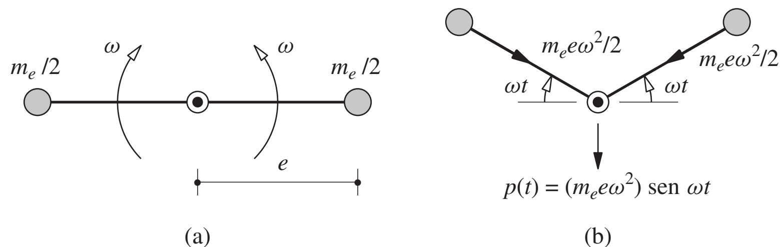


Figura 3.3.2 Generador de vibración: (a) posición inicial, (b) posición y fuerzas en el tiempo *t*.

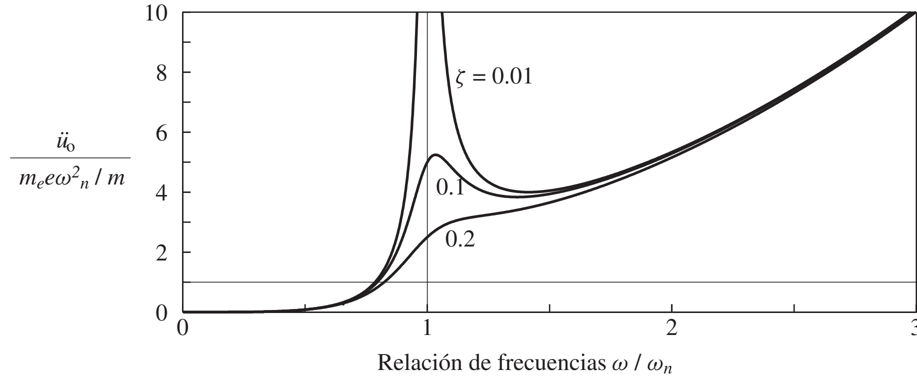


Figura 3.3.3

En la figura 3.3.3 la amplitud de la aceleración de la ecuación (3.3.4) se grafica como una función de la relación de frecuencias ω/ω_n. Para las frecuencias de excitación ω mayores que la frecuencia natural ω_n del sistema, la aceleración aumenta rápidamente a medida que se incrementa ω porque la amplitud de la fuerza de excitación, ecuación (3.3.1), es proporcional a ω^2.

3.4 FRECUENCIA NATURAL Y AMORTIGUAMIENTO A PARTIR DE PRUEBAS ARMÓNICAS

La teoría de la vibración armónica forzada, que se presentó en las secciones anteriores de este capítulo, proporciona una base para determinar la frecuencia natural y el amortiguamiento de la estructura a partir de su respuesta medida ante la acción de un generador de vibración. El amortiguamiento medido proporciona los datos de una propiedad estructural importante que no puede calcularse a partir del diseño de la estructura. El valor medido de la frecuencia natural es la propiedad "real" de una estructura contra la que pueden compararse los valores calculados a partir de las propiedades de rigidez y masa de idealizadas. Estas investigaciones han proporcionado mejores procedimientos para desarrollar idealizaciones estructurales que son representativas de las estructuras reales.

3.4.1 Pruebas de resonancia

El concepto de las pruebas de resonancia se basa en el resultado de la ecuación (3.2.15), reescrita como

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{(u_{\text{st}})_o}{(u_o)_{\omega=\omega_n}} \tag{3.4.1}$$

La fracción de amortiguamiento ζ se calcula a partir de los valores determinados experimentalmente de $(u_{\text{st}})_o$ y u_o en una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural del sistema.† Por lo general, se mide la amplitud de la aceleración y $u_o = \ddot{u}_o/\omega^2$. Esto parece

†En sentido estricto, ésta no es la frecuencia resonante; vea la sección 3.2.5.

sencillo, excepto que el verdadero valor de la frecuencia natural ω_n se desconoce. La frecuencia natural se detecta mediante experimentos utilizando el resultado anterior de que el ángulo de fase es de 90° si $\omega = \omega_n$. Así, la estructura se excita a una frecuencia de excitación ω, el ángulo de fase se mide y la frecuencia de excitación se ajusta poco a poco hasta que el ángulo de fase sea de 90°.

Si es posible obtener el desplazamiento debido a la fuerza estática p_o (la amplitud de la fuerza armónica), la ecuación (3.4.1) proporciona la fracción de amortiguamiento. Como se mencionó con anterioridad, es difícil y poco práctico que un generador de vibración produzca una fuerza en frecuencias bajas para obtener una fuerza estática significativa. Una alternativa consiste en medir la respuesta estática por otros medios; por ejemplo, jalando la estructura. En este caso, la ecuación (3.4.1) debe modificarse para reconocer cualquier diferencia en la fuerza aplicada en la prueba estática con relación a la amplitud de la fuerza armónica.

3.4.2 Curva de respuesta en la frecuencia

Debido a la dificultad para obtener la respuesta estática estructural utilizando un generador de vibración, la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento de una estructura suelen determinarse mediante la obtención experimental de una curva de respuesta en la frecuencia. El generador de vibración se opera a una frecuencia seleccionada, la respuesta estructural se observa hasta que la parte transitoria se amortigua y se mide la amplitud de la aceleración en estado estacionario. La frecuencia del generador de vibración se ajusta a un nuevo valor y las mediciones se repiten. La frecuencia de excitación se modifica en un intervalo que incluye la frecuencia natural del sistema. Una curva de respuesta en la frecuencia en la forma de amplitud de aceleración contra frecuencia puede representarse directamente a partir de los datos medidos. Esta curva corresponde a una fuerza con amplitud proporcional a ω^2 y tiene un aspecto similar a la curva de respuesta en la frecuencia que se muestra en la figura 3.3.3. Si cada amplitud de aceleración medida se divide entre ω^2, se obtiene la curva de

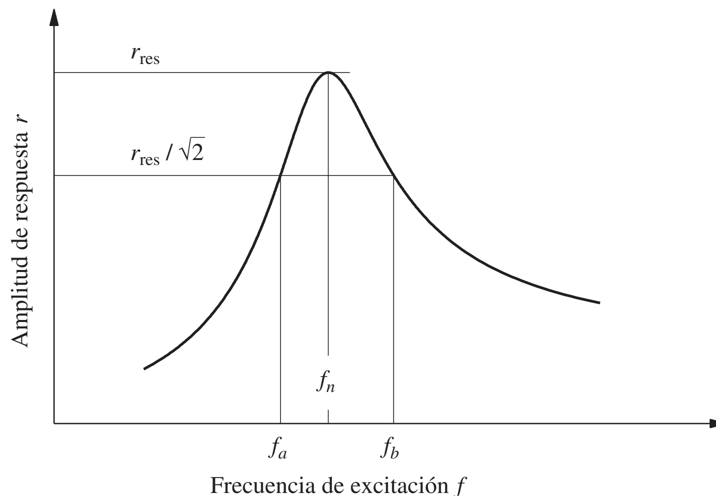


Figura 3.4.1 Evaluación del amortiguamiento a partir de la curva de respuesta en la frecuencia.

respuesta en la frecuencia para una fuerza de amplitud constante. Esta curva de los datos medidos se parecería a la curva de la figura 3.2.7c. Si las aceleraciones medidas se dividen entre ω^4, la curva de desplazamiento en la frecuencia resultante para una fuerza de amplitud constante sería una versión experimental de la curva de la figura 3.2.7a.

La frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento pueden determinarse a partir de cualquiera de las versiones de las curvas de respuesta en la frecuencia obtenidas a partir de experimentos y que se muestran en las figuras 3.3.3, 3.2.7c y 3.2.7a. Para el intervalo práctico de amortiguamiento, la frecuencia natural f_n es igual a la frecuencia de excitación en la resonancia. La fracción de amortiguamiento se calcula mediante la ecuación (3.2.24) usando las frecuencias f_a y f_b, determinadas, como se ilustra en la figura. 3.4.1, a partir de la curva experimental que se muestra de manera esquemática. Aunque esta ecuación se deriva de la curva de desplazamiento en la frecuencia para una fuerza armónica de amplitud constante, es aproximadamente válida para las otras curvas de respuesta ya mencionadas, siempre y cuando la estructura esté un poco amortiguada.

Ejemplo 3.2

El marco de plexiglás de la figura 1.1.4 está montado sobre una mesa vibradora que puede aplicar movimientos armónicos en la base a las frecuencias y amplitudes especificadas. En cada frecuencia de excitación ω, se registran las amplitudes de aceleración $\ddot{u}_{go}$ y $\ddot{u}_o^t$ de la mesa y la parte superior del marco, respectivamente. En la figura E3.2 se calcula la transmisibilidad $\mathrm{TR} = \ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go}$ y se grafican los datos. Determine la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento del marco de plexiglás para estos datos.

Solución El pico de la curva de respuesta en la frecuencia se produce en los 3.59 Hz. Suponiendo que el amortiguamiento es pequeño, la frecuencia natural $f_n = 3.59$ Hz.

El valor pico de la curva de transmisibilidad es 12.8. Ahora dibuje una línea horizontal en $12.8/\sqrt{2} = 9.05$ como se muestra. Esta línea interseca la curva de respuesta en la frecuencia en $f_b = 3.74$ Hz y $f_a = 3.44$ Hz. Por lo tanto, de la ecuación (3.2.24),

$$\zeta = \frac{3.74 - 3.44}{2\,(3.59)} = 0.042 = 4.2\%$$

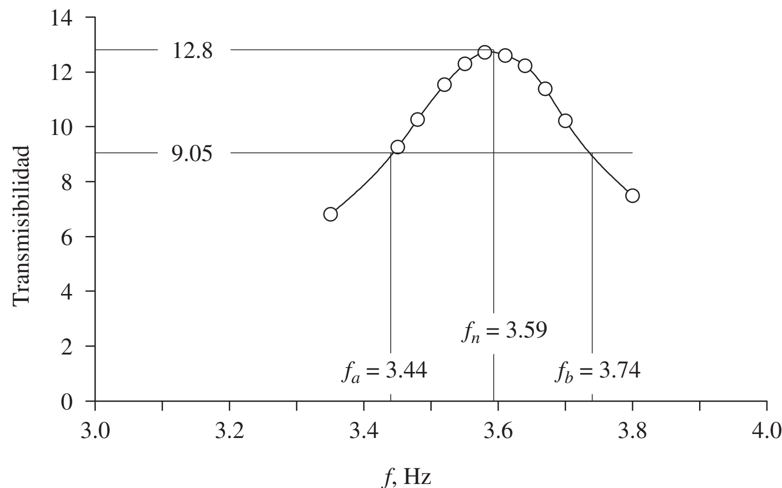


Figura E3.2

Este valor de amortiguamiento es ligeramente mayor que el 3.96% determinado a partir de una prueba de vibración libre en el modelo del ejemplo 2.5.

Observe que se ha utilizado la ecuación 3.2.24 para determinar la fracción de amortiguamiento del sistema a partir de su curva de transmisibilidad (TR), mientras que esta ecuación se había deducido de la curva de respuesta en la frecuencia. Esta aproximación es apropiada porque en las frecuencias de excitación en el intervalo de f_a a f_b, los valores numéricos de TR y R_d son cercanos; lo anterior se deja para que lo verifique el lector después de que se presente una ecuación para TR en la sección 3.6.

3.5 TRANSMISIÓN DE FUERZA Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Considere el sistema de masa-resorte-amortiguador que se muestra en el recuadro izquierdo de la figura 3.5.1, sometido a una fuerza armónica. La fuerza transmitida a la base es

$$f_T = f_S + f_D = ku(t) + c\dot{u}(t) \tag{3.5.1}$$

Si se sustituye la ecuación (3.2.10) por $u(t)$ y la ecuación (3.2.17) por $\dot{u}(t)$, y se usa la ecuación (3.2.18), se obtiene

$$f_T(t) = (u_{\text{st}})_o R_d \left[k \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + c\omega \cos(\omega t - \phi)\right] \tag{3.5.2}$$

Figura 3.5.1 Transmisibilidad para una excitación armónica. Las transmisibilidades de la fuerza y del movimiento del terreno son idénticas.

El valor máximo de $f_T(t)$ en t es

$$(f_T)_o = (u_{st})_o R_d \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

que, después de usar $(u_{st})_o = p_o/k$ y $\zeta = c/2m\omega_n$, puede expresarse como

$$\frac{(f_T)_o}{p_o} = R_d \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Al sustituir la ecuación (3.2.11) por R_d resulta una ecuación para la razón de la fuerza máxima transmitida sobre la amplitud p_o de la fuerza aplicada, que se conoce como la *transmisibilidad* (TR) del sistema:

$$\text{TR} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2} \tag{3.5.3}$$

Observe que si el resorte es rígido, $\omega_n = 3 \propto$ y TR $= 1$, lo que implica que $(f_T)_0 = p_0$.

En la figura 3.5.1 la transmisibilidad se grafica como una función de la relación de frecuencias ω/ω_n para varios valores de la fracción de amortiguamiento ζ. Se han elegido las escalas logarítmicas a fin de resaltar las curvas para valores grandes de ω/ω_n, la región de interés. Mientras el amortiguamiento disminuye la amplitud de movimiento en todas las frecuencias de excitación (figura 3.2.6), el amortiguamiento disminuye la fuerza transmitida sólo si $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$. Para que la fuerza transmitida sea menor que la fuerza aplicada, es decir, TR < 1, la rigidez del sistema de soporte y, por lo tanto, la frecuencia natural deben ser lo suficientemente pequeñas como para que $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$. No se desea amortiguamiento en el sistema de soporte, puesto que, en este intervalo de frecuencias, el amortiguamiento aumenta la fuerza transmitida. Lo anterior implica una compensación entre un resorte muy flexible para reducir la fuerza transmitida y un desplazamiento estático aceptable.

Si la fuerza aplicada se origina en una máquina rotatoria, su frecuencia puede variar, ya que comienza a girar y aumenta su velocidad para llegar a la frecuencia de operación. En este caso, debe hacerse la compensación al elegir un sistema de soporte flexible para disminuir al mínimo la fuerza transmitida. Es necesario tener suficiente amortiguamiento para limitar la fuerza transmitida al pasar a través de la resonancia, pero no tanto como para aumentar significativamente la fuerza transmitida en las velocidades de operación. Por fortuna, el caucho natural es un material muy satisfactorio y se usa con frecuencia para aislar la vibración.

3.6 RESPUESTA ANTE EL MOVIMIENTO DEL TERRENO Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

En esta sección se determina la respuesta de un sistema de 1GDL (vea el recuadro derecho de la figura 3.5.1) para un movimiento armónico del terreno:

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{go} \operatorname{sen} \omega t \tag{3.6.1}$$

La ecuación que controla esta excitación es la (1.7.4), donde la función de excitación es $p_{ef}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = -m\ddot{u}_{go}$ sen ωt, igual que la ecuación (3.2.1) para una fuerza armónica aplicada pero reemplazando p_o por $-m\ddot{u}_{go}$. Si se hace esta sustitución en las ecuaciones (3.1.9) y (3.2.10), resulta

$$u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{go}}{k} R_d \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.6.2}$$

La aceleración de la masa es

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t) \tag{3.6.3}$$

Si se sustituye la ecuación (3.6.1) y se obtiene la segunda derivada de la ecuación (3.6.2), resulta una ecuación para $\ddot{u}^t(t)$, a partir de la cual es posible determinar la amplitud o el valor máximo $\ddot{u}_o^t$ (vea la deducción 3.5):

$$\text{TR} = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2} \tag{3.6.4}$$

La relación de aceleración $\ddot{u}_o^t$ transmitida a la masa y la amplitud $\ddot{u}_{go}$ de la aceleración del suelo también se conoce como la *transmisibilidad* (TR) del sistema. A partir de las ecuaciones (3.6.4) y (3.5.3), es evidente que la capacidad de transmisión para el problema de excitación del terreno es igual que para el problema de la fuerza aplicada.

Por lo tanto, la figura 3.5.1 también proporciona la relación $\ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go}$ como una función de la relación de frecuencias ω/ω_n. Si la frecuencia de excitación ω es mucho menor que la frecuencia natural ω_n del sistema $\ddot{u}_o^t \simeq \ddot{u}_{go}$ (es decir, la masa se mueve de manera rígida con el terreno y ambos experimentan la misma aceleración). Si la frecuencia de excitación ω es mucho mayor que la frecuencia natural ω_n del sistema, $\ddot{u}_o^t \simeq 0$ (es decir, la masa se mantiene inmóvil mientras el terreno debajo de ella se está moviendo). Éste es el concepto básico subyacente al aislamiento de una masa a partir de una base móvil, mediante el uso de un sistema de apoyo muy flexible. Por ejemplo, existen edificios que se han montado sobre apoyos de caucho natural para aislarlos de la vibración vertical transmitida por el terreno (por lo general con frecuencias que van de los 25 a los 50 Hz) debido al tráfico ferroviario.

Antes de cerrar esta sección se mencionan, sin hacer una deducción, los resultados de un problema relacionado. Si el movimiento del terreno se define como $u_g(t) = u_{go}$ sen ωt, puede demostrarse que la amplitud u_o^t del desplazamiento total $u^t(t)$ de la masa está dada por

$$\text{TR} = \frac{u_o^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2} \tag{3.6.5}$$

Al comparar esto con la ecuación (3.6.4), se observa que la transmisibilidad es idéntica para los desplazamientos y las aceleraciones.

Ejemplo 3.3

Un instrumento sensible con peso de 100 lb debe instalarse en una ubicación donde la aceleración vertical es de 0.1 g a una frecuencia de 10 Hz. Este instrumento está montado sobre una plataforma de caucho con una rigidez de 80 lb/pulg y un amortiguamiento tal que la fracción de amortiguamiento para el sistema es de 10%. **(a)** ¿Qué aceleración se transmite al instrumento? **(b)** Si el instrumento sólo puede tolerar una aceleración de 0.005 g, sugiera una solución suponiendo que se va a utilizar la misma plataforma de caucho. Proporcione los resultados numéricos.

Solución **(a)** *Determine la TR.*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{80}{100/386}} = 17.58 \text{ rad/seg}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi(10)}{17.58} = 3.575$$

Si se sustituye esto en la ecuación (3.6.4) resulta

$$\text{TR} = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} = \sqrt{\frac{1 + [2(0.1)(3.575)]^2}{[1 - (3.575)^2]^2 + [2(0.1)(3.575)]^2}} = 0.104$$

Por lo tanto, $\ddot{u}_o^t = (0.104)\ddot{u}_{go} = (0.104)0.1\text{g} = 0.01\text{g}$.

(b) *Determine la masa añadida para reducir la aceleración*. La aceleración transmitida puede reducirse al aumentar ω/ω_n, lo cual requiere reducir ω_n mediante el montaje del instrumento sobre la masa m_b. Suponga que se añade una masa $m_b = 150$ lb/g, la masa total = 250 lb/g, y

$$\omega_n' = \sqrt{\frac{80}{250/386}} = 11.11 \text{ rad/seg} \qquad \frac{\omega}{\omega_n'} = 5.655$$

Si se desea determinar la fracción de amortiguamiento para el sistema con la masa añadida, es necesario conocer la fracción de amortiguamiento de la plataforma de caucho:

$$c = \zeta(2m\omega_n) = 0.1(2)\left(\frac{100}{386}\right)17.58 = 0.911 \text{ lb-seg/pulg}$$

Entonces

$$\zeta' = \frac{c}{2(m + m_b)\omega_n'} = \frac{0.911}{2(250/386)11.11} = 0.063$$

Al sustituir ω/ω'_n y ζ' en la ecuación (3.6.4) se obtiene $\ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go} = 0.04$, $\ddot{u}_o^t = 0.004\text{g}$, que es satisfactorio debido a que es menor que 0.005g.

En vez de seleccionar una masa añadida mediante el juicio, es posible establecer una ecuación cuadrática para la masa desconocida, que dará $\ddot{u}_o^t = 0.005\text{g}$.

Ejemplo 3.4

Un automóvil viaja a lo largo de una carretera elevada con varios claros en la que está apoyada cada 100 pies. La deformación a largo plazo ha resultado en una deflexión de 6 pulg en el centro de cada tramo (figura E3.4a). El perfil de la carretera puede aproximarse como sinusoidal con una amplitud de 3 pulg y un periodo de 100 pies. El sistema de 1GDL mostrado es una idealización simple de un automóvil, apropiada para una "primera aproximación" al estudio de la calidad de conducción del vehículo. Cuando está cargado en su totalidad, el peso del automóvil es de 4 kips. La rigidez del sistema de suspensión del automóvil es de 800 lb/pulg y su fracción de amortiguamiento viscoso es tal que el amortiguamiento del sistema es de 40%. Determine

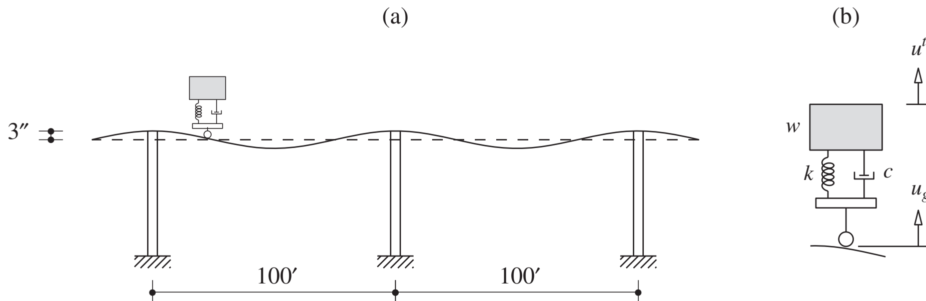


Figura E3.4

(a) la amplitud u_o^t del movimiento vertical $u^t(t)$ cuando el automóvil viaja a 40 mph y **(b)** la velocidad del vehículo que podría producir una condición resonante para u_o^t.

Solución Si se supone que los neumáticos son demasiado rígidos y se mantienen en contacto con la carretera, el problema puede idealizarse como se muestra en la figura E3.4b. El desplazamiento vertical de los neumáticos es $u_g(t) = u_{go}$ sen ωt, donde $u_{go} = 3$ pulg. La frecuencia de excitación $\omega = 2\pi/T$, donde el periodo de excitación $T = L/v$, el tiempo tomado por el automóvil para cruzar el tramo; por lo tanto, $\omega = 2\pi v/L$.

(a) *Determine* $u^t{}_o$

$$v = 40 \text{ mph} = 58.67 \text{ pie/s} \qquad \omega = \frac{2\pi(58.67)}{100} = 3.686 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800}{4000/386}} = 8.786 \text{ rad/s} \qquad \frac{\omega}{\omega_n} = 0.420$$

Al sustituir estos datos en la ecuación (3.6.5) resulta

$$\frac{u_o^t}{u_{go}} = \left\{ \frac{1 + [2(0.4)(0.420)]^2}{[1 - (0.420)^2]^2 + [2(0.4)(0.420)]^2} \right\}^{1/2} = 1.186$$

$$u_o^t = 1.186u_{go} = 1.186(3) = 3.56 \text{ pulg}$$

(b) *Determine la velocidad en la resonancia*. Si ζ es pequeña, la resonancia se producirá aproximadamente en $\omega/\omega_n = 1$. Sin embargo, las suspensiones de los automóviles tienen un amortiguamiento pesado para reducir la vibración. En este caso, $\zeta = 0.4$ y para tales amortiguamientos grandes la frecuencia resonante es muy diferente de ω_n. Por definición, la resonancia se produce para u_o^t cuando TR (o TR^2) es máxima en toda ω. Si se sustituye $\zeta = 0.4$ en la ecuación (3.6.5) y se introduce $\beta = \omega/\omega_n$ se obtiene

$$\text{TR}^2 = \frac{1 + 0.64\beta^2}{(1 - 2\beta^2 + \beta^4) + 0.64\beta^2} = \frac{1 + 0.64\beta^2}{\beta^4 - 1.36\beta^2 + 1}$$

$$\frac{d(\text{TR})^2}{d\beta} = 0 \Rightarrow \beta = 0.893 \Rightarrow \omega = 0.893\omega_n = 0.893(8.786) = 7.846 \text{ rad/s}$$

La resonancia se produce en esta frecuencia de excitación, lo que implica una velocidad de

$$v = \frac{\omega L}{2\pi} = \frac{(7.846)100}{2\pi} = 124.9 \text{ pie/seg} = 85 \text{ mph}$$

Ejemplo 3.5

Repita el inciso (a) del ejemplo 3.4 si el vehículo está vacío (sólo ocupado por el conductor), con un peso total de 3 kips.

Solución Como la fracción de amortiguamiento c no cambia, pero sí lo hace la masa m, es necesario volver a calcular la fracción de amortiguamiento para un vehículo vacío a partir de

$$c = 2\zeta_f\sqrt{km_f} = 2\zeta_e\sqrt{km_e}$$

donde los subíndices f y e indican las condiciones de lleno y vacío, respectivamente. Así

$$\zeta_e = \zeta_f\left(\frac{m_f}{m_e}\right)^{1/2} = 0.4\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} = 0.462$$

Para un vehículo vacío

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800}{3000/386}} = 10.15 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{3.686}{10.15} = 0.363$$

Si se sustituye ω/ω_n y ζ en la ecuación (3.6.5), resulta

$$\frac{u_o^t}{u_{go}} = \left\{\frac{1 + [2(0.462)(0.363)]^2}{[1-(0.363)^2]^2 + [2(0.462)(0.363)]^2}\right\}^{1/2} = 1.133$$

$$u_o^t = 1.133u_{go} = 1.133(3) = 3.40 \text{ pulg}$$

Deducción 3.5

La ecuación (3.6.2) se reescribe primero como una combinación lineal de funciones seno y coseno. Esto puede lograrse mediante la sustitución de las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.12) por R_d y ϕ, respectivamente, o al reemplazar p_o en la ecuación (3.2.4) por $-m\ddot{u}_{go}$ y sustituirlo en la ecuación (3.2.3). En cualquiera de las dos formas el desplazamiento relativo es

$$u(t) = \frac{-m\ddot{u}_{go}}{k}\left\{\frac{[1-(\omega/\omega_n)^2]\operatorname{sen}\omega t - [2\zeta(\omega/\omega_n)]\cos\omega t}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}\right\} \tag{a}$$

Si esto se diferencia dos veces y se sustituye en la ecuación (3.6.3) junto con la ecuación (3.6.1) resulta

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}_{go}(C_1 \operatorname{sen}\omega t + D_1 \cos\omega t) \tag{b}$$

donde

$$C_1 = \frac{1-(\omega/\omega_n)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \qquad D_1 = \frac{-2\zeta(\omega/\omega_n)^3}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{c}$$

La amplitud de la aceleración es

$$\ddot{u}_o^t = \ddot{u}_{go}\sqrt{C_1^2 + D_1^2} \tag{d}$$

Este resultado, después de sustituir para C_1 y D_1 de la ecuación (c) y simplificar algunos términos, conduce a la ecuación (3.6.4).

3.7 INSTRUMENTOS PARA MEDIR VIBRACIONES

La medición de vibraciones es de gran interés en muchos aspectos de la ingeniería estructural. Por ejemplo, la medición de los movimientos del terreno durante un sismo proporciona datos básicos para la ingeniería sísmica y los registros de los movimientos resultantes en una estructura dan una idea de cómo responden las estructuras durante los sismos. Aunque los instrumentos de medición sean muy sofisticados y complejos, el elemento básico de estos instrumentos es en cierta forma un transductor. En su forma más simple, un transductor es un sistema de masa-resorte-amortiguador montado dentro de un marco rígido que está unido a la superficie de la cual se desea medir el movimiento. En la figura 3.7.1 se muestra un dibujo esquemático de un instrumento para registrar el movimiento horizontal

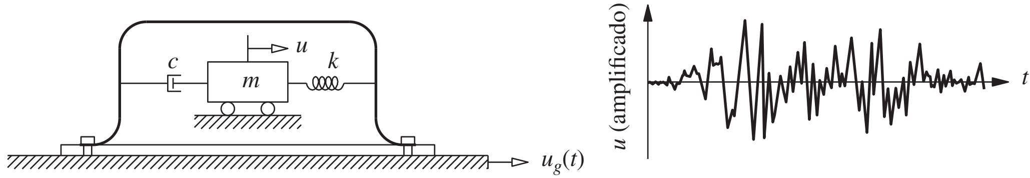


Figura 3.7.1 Dibujo esquemático de un instrumento para medir vibraciones y registrar el movimiento.

de un punto de apoyo; se requieren tres transductores distintos para medir los tres componentes del movimiento. Cuando la masa del transductor se somete al movimiento del punto de apoyo, ésta se mueve en relación con el marco y este desplazamiento relativo se registra después de amplificarlo en cierta medida. El objetivo de esta breve presentación consiste en analizar el principio subyacente en el diseño de los instrumentos para medir vibraciones, de modo que el desplazamiento relativo medido proporcione el movimiento del soporte deseado (aceleración o de desplazamiento).

3.7.1 Medición de la aceleración

Por lo general, el movimiento que se medirá varía arbitrariamente con el tiempo y puede incluir muchos componentes armónicos que cubren un amplio intervalo de frecuencias. Sin embargo, resulta instructivo considerar primero la medición de un movimiento armónico sencillo descrito por la ecuación (3.6.1). El desplazamiento de la masa del instrumento con respecto al marco en movimiento está dado por la ecuación (3.6.2), que puede reescribirse como

$$u(t) = -\left(\frac{1}{\omega_n^2} R_d\right) \ddot{u}_g\left(t - \frac{\phi}{\omega}\right) \tag{3.7.1}$$

La $u(t)$ registrada es la aceleración básica modificada por un factor de $-R_d/\omega_n^2$ con un desfase ϕ/ω. Como se muestra en la figura 3.2.6, R_d y ϕ varían con la frecuencia de excitación ω, pero ω_n^2 es una constante del instrumento e independiente del movimiento del soporte.

El objetivo del diseño del instrumento es hacer que R_d y ϕ/ω sean tan independientes de la frecuencia de excitación como sea posible, porque entonces cada componente armónico de la aceleración se registra con el mismo factor de modificación y con el mismo tiempo de retraso. Por lo tanto, aunque el movimiento registrado esté integrado por muchos componentes armónicos, la $u(t)$ registrada tendrá la misma forma que el movimiento del soporte con un cambio constante del tiempo. Este cambio constante del tiempo sólo mueve la escala de tiempo un poco, lo que, en general, no es importante. De acuerdo con la figura 3.7.2 (que es una gráfica ampliada de la figura 3.2.6 con valores de amortiguamiento adicionales), si $\zeta = 0.7$, entonces, en el intervalo de frecuencia $0 \leq \omega/\omega_n \leq 0.50$, R_d se acerca a 1 (menos de 2.5% de error) y la variación de ϕ con ω es casi lineal, lo que implica que ϕ/ω es constante. Así, un instrumento con una frecuencia natural de 50 Hz y una fracción de amortiguamiento de 0.7 tiene un intervalo de frecuencia útil de 0 a 25 Hz con un error insignificante. Éstas son las propiedades de los instrumentos modernos disponibles en el mercado, diseñados para medir los sismos inducidos por la aceleración del terreno. Como la amplitud medida de $u(t)$ es pro-

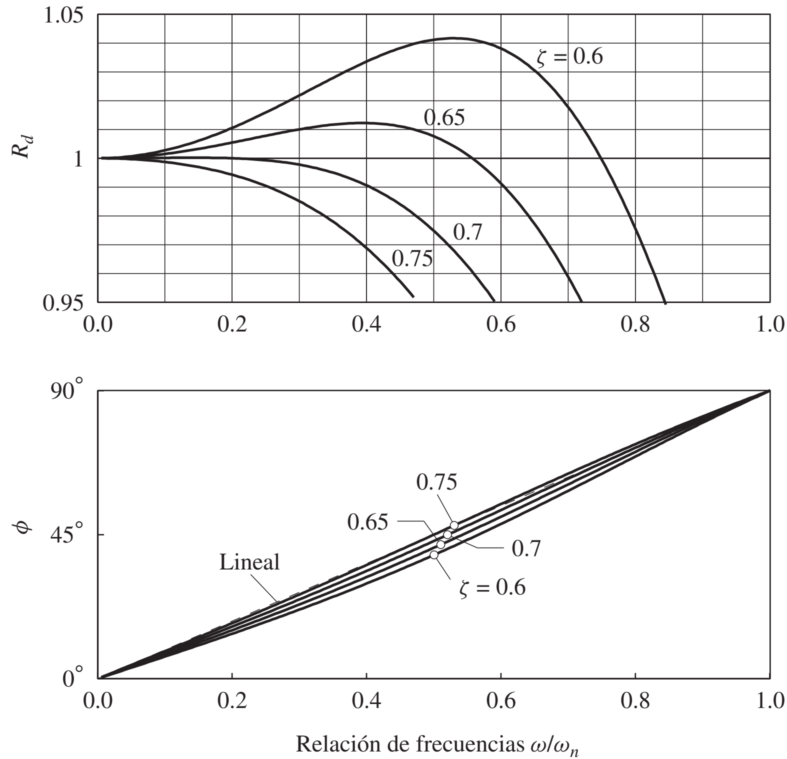


Figura 3.7.2 Variación de R_d y ϕ con la relación de frecuencias ω/ω_n para $\zeta = 0.6$, 0.65, 0.7 y 0.75.

porcional a R_d/ω_n^2, un instrumento de alta frecuencia resultará en un desplazamiento muy pequeño que se magnifica sustancialmente en estos instrumentos para una medición adecuada.

En la figura 3.7.3 se muestra una comparación de la aceleración real del terreno $\ddot{u}_g(t) = 0.1\text{g} \text{ sen } 2\pi ft$ y el desplazamiento relativo medido de $R_d\ddot{u}_g(t - \phi/\omega)$, excepto por la constante del instrumento $-1/\omega^2_n$ en la ecuación (3.7.1). Para las frecuencias de excitación $f = 20$ y 10 Hz, el movimiento medido tiene una amplitud exacta, pero el error en $f = 40$ Hz es notable; y el desfase del tiempo, aunque no es idéntico para las tres frecuencias, es similar. Si la aceleración del terreno es la suma de los tres componentes armónicos, esta figura muestra que el movimiento registrado coincide bastante bien, aunque no perfectamente, con la aceleración del terreno en amplitud y forma.

La precisión del movimiento $u(t)$ registrado puede mejorarse al separar $u(t)$ en sus componentes armónicos y corregir un componente a la vez. Se calcula $\ddot{u}_g(t - \phi/\omega)$ a partir del $u(t)$ medido, utilizando la ecuación (3.7.1) con R_d determinado a partir de la ecuación (3.2.11) y las propiedades conocidas del instrumento ω_n y ζ. Estas correcciones se repiten para cada componente armónico en $u(t)$ y después se sintetizan los componentes corregidos para obtener $\ddot{u}_g(t)$. Estos cálculos pueden llevarse a cabo mediante los procedimientos de la transformada discreta de Fourier, que se presentan en el apéndice A.

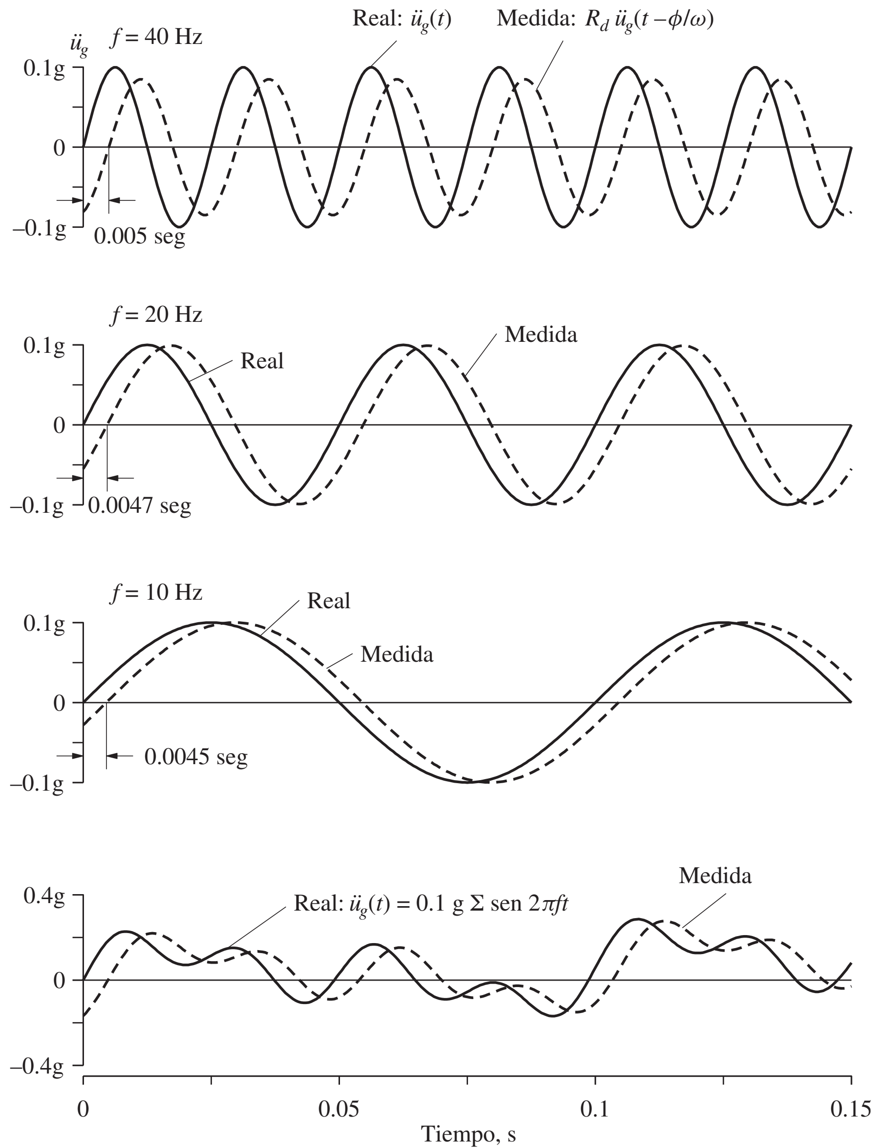


Figura 3.7.3 Comparación de la aceleración real del terreno y el movimiento medido por un instrumento con $f_n = 50$ Hz y $\zeta = 0.7$.

3.7.2 Medición del desplazamiento

Lo ideal es diseñar el transductor de manera que el desplazamiento relativo $u(t)$ mida el desplazamiento $u_g(t)$ del soporte. Esto se consigue haciendo el resorte del transductor tan flexible o la masa del transductor tan grande, o ambos, que la masa permanezca quieta

mientras el soporte subyacente se mueve. Tal instrumento es difícil de manejar debido a la gran masa y al resorte muy flexible, y porque debe ajustarse al desplazamiento previsto del soporte, que puede ser hasta de 36 pulg durante los sismos.

Con el propósito de analizar a mayor profundidad el concepto básico, considere desplazamiento armónico del soporte

$$u_g(t) = u_{go} \operatorname{sen} \omega t \tag{3.7.2}$$

Con la función de excitación $p_{\text{ef}}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = m\omega^2 u_{go}$ sen ωt, la ecuación (1.7.4) controla el desplazamiento relativo de la masa; esta ecuación gobernante es igual a la ecuación (3.2.1) para la fuerza armónica aplicada pero p_o se reemplaza por $m\omega^2 u_{go}$. Si se hace esta sustitución en la ecuación (3.2.10) y se usan las ecuaciones (3.1.9) y (3.2.20), da como resultado

$$u(t) = R_a u_{go} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.7.3}$$

Para frecuencias de excitación ω mucho más grandes que la frecuencia natural ω_n, R_a se acerca a la unidad (figura 3.2.7c), ϕ es cercano a 180° y la ecuación (3.7.3) se convierte en

$$u(t) = -u_{go} \operatorname{sen} \omega t \tag{3.7.4}$$

Este desplazamiento registrado es igual al desplazamiento del soporte (ecuación 3.7.2) excepto por el signo negativo, que suele ser intrascendente. El amortiguamiento del instrumento no es un parámetro crítico, puesto que tiene poco efecto sobre el movimiento registrado si ω/ω_n es muy grande.

3.8 ENERGÍA DISIPADA POR EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Considere el movimiento en estado estacionario de un sistema de 1GDL debido a $p(t) = p_o$ sen ωt. La energía disipada por el amortiguamiento viscoso en un ciclo de vibración armónica es

$$\begin{aligned} E_D &= \int f_D\, du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u})\dot{u}\, dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{u}^2\, dt \\ &= c\int_0^{2\pi/\omega} [\omega u_o \cos(\omega t - \phi)]^2\, dt = \pi c\omega u_o^2 = 2\pi\zeta \frac{\omega}{\omega_n} k u_o^2 \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

La energía disipada es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. No es un valor constante para cualesquiera cantidades dadas de amortiguamiento y amplitud, puesto que la energía disipada aumenta linealmente con la frecuencia de excitación.

En la vibración estacionaria, la energía introducida al sistema debida a la fuerza aplicada es disipada por el amortiguamiento viscoso. La fuerza externa $p(t)$ introduce energía al sistema, que para cada ciclo de vibración es

$$\begin{aligned} E_I &= \int p(t)\, du = \int_0^{2\pi/\omega} p(t)\dot{u}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} [p_o \operatorname{sen} \omega t][\omega u_o \cos(\omega t - \phi)]\, dt = \pi p_o u_o \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

Si se usa la ecuación (3.2.12) para el ángulo de fase, esta ecuación puede reescribirse como (vea la deducción 3.6)

$$E_I = 2\pi\zeta \frac{\omega}{\omega_n} k u_o^2 \tag{3.8.3}$$

Las ecuaciones (3.8.1) y (3.8.3) indican que $E_I = E_D$.

¿Qué pasa con la energía potencial y la energía cinética? Durante cada ciclo de vibración armónica los cambios en la energía potencial (igual a la energía de deformación del resorte) y en la energía cinética son iguales a cero. Esto puede confirmarse de la manera siguiente:

$$E_S = \int f_S\, du = \int_0^{2\pi/\omega} (ku)\dot{u}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} k[u_o \operatorname{sen}(\omega t - \phi)][\omega u_o \cos(\omega t - \phi)]\, dt = 0$$

$$E_K = \int f_I\, du = \int_0^{2\pi/\omega} (m\ddot{u})\dot{u}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} m[-\omega^2 u_o \operatorname{sen}(\omega t - \phi)][\omega u_o \cos(\omega t - \phi)]\, dt = 0$$

Los conceptos de energía anteriores ayudan a explicar el crecimiento de la amplitud del desplazamiento causado por la fuerza armónica con $\omega = \omega_n$, hasta que se alcanza el estado estacionario (figura 3.2.2). Para $\omega = \omega_n$, $\phi = 90°$ y la ecuación (3.8.2) se obtiene

$$E_I = \pi p_o u_o \tag{3.8.4}$$

La energía de entrada varía linealmente con la amplitud del desplazamiento (figura 3.8.1). En contraste, la energía disipada varía cuadráticamente con la amplitud del desplazamiento (ecuación 3.8.1). Como se muestra en la figura 3.8.1, se alcanza el estado estacionario, la entrada de energía por ciclo excede la energía disipada durante el ciclo de amortiguamiento, lo que conduce a una mayor amplitud de desplazamiento en el siguiente ciclo. Con la amplitud del desplazamiento en crecimiento, la energía disipada aumenta más rápido que la energía de entrada. Con el tiempo, las energías de entrada y disipada coincidirán en la amplitud del desplazamiento de estado estacionario u_o, que estará delimitada sin importar cuán pequeño sea el amortiguamiento. Este balance de energía proporciona un medio alter-

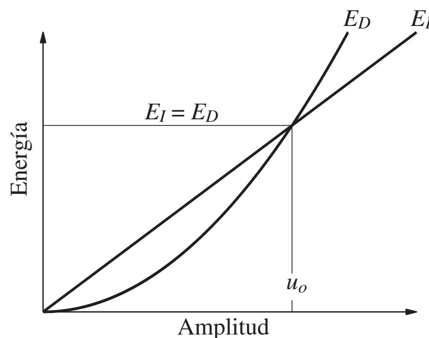


Figura 3.8.1 Energía de entrada E_I y energía disipada E_D en el amortiguamiento viscoso.

nativo para encontrar el u_o debido a la fuerza armónica con $\omega = \omega_n$; al igualar las ecuaciones (3.8.1) y (3.8.4) resulta

$$\pi p_o u_o = \pi c \omega_n u_o^2 \tag{3.8.5}$$

Al despejar u_o se llega a

$$u_o = \frac{p_o}{c\omega_n} \tag{3.8.6}$$

Este resultado concuerda con la ecuación (3.2.7), que se obtiene al resolver la ecuación de movimiento.

A continuación se presenta una interpretación gráfica de la energía disipada por el amortiguamiento viscoso. Para ello, primero se obtiene una ecuación que relaciona la fuerza de amortiguamiento de f_D con el desplazamiento u:

$$\begin{aligned} f_D &= c\dot{u}(t) = c\omega u_o \cos(\omega t - \phi) \\ &= c\omega\sqrt{u_o^2 - u_o^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \phi)} \\ &= c\omega\sqrt{u_o^2 - [u(t)]^2} \end{aligned}$$

Lo anterior puede reescribirse como

$$\left(\frac{u}{u_o}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{c\omega u_o}\right)^2 = 1 \tag{3.8.7}$$

que es la ecuación de la elipse mostrada en la figura 3.8.2a. Observe que la curva f_D–u no es una función de un solo valor, sino un ciclo conocido como *lazo de histéresis*. El área encerrada por la elipse es $\pi(u_o)(c\omega u_o) = \pi c\omega u_o^2$, que es igual a la ecuación (3.8.1). Así, el área dentro del lazo de histéresis proporciona la energía disipada.

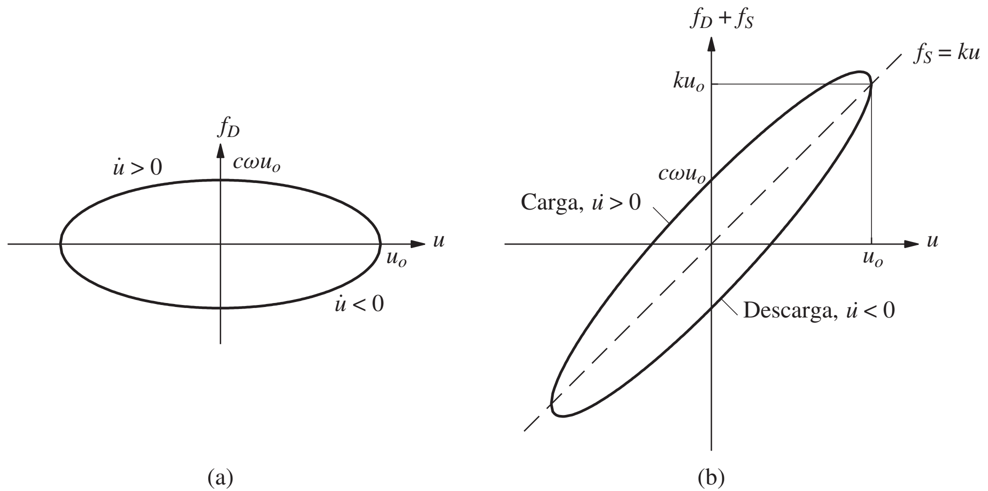


Figura 3.8.2 Lazos de histéresis para (a) un amortiguador viscoso; (b) un resorte y un amortiguador viscoso en paralelo.

Resulta interesante examinar la fuerza de resistencia total (elástica más amortiguamiento) porque ésta es la fuerza que se mide en un experimento:

$$f_S + f_D = ku(t) + c\dot{u}(t)$$
$$= ku + c\omega\sqrt{u_o^2 - u^2} \tag{3.8.8}$$

Una gráfica de $f_S + f_D$ contra u es la elipse de la figura 3.8.2a, rotada como se muestra en la figura 3.8.2b debido al término ku de la ecuación (3.8.8). La energía disipada por el amortiguamiento sigue siendo el área encerrada por la elipse porque el área encerrada por la fuerza elástica de un solo valor, $f_S = ku$, es igual a cero.

El lazo de histéresis asociado con el amortiguamiento viscoso es el resultado de la *histéresis dinámica*, ya que está relacionado con la naturaleza dinámica de la carga. El área del lazo es proporcional a la frecuencia de excitación, lo que implica que la curva de fuerza-deformación se convierte en una curva de un solo valor (sin lazo de histéresis) si la carga cíclica se aplica en forma suficientemente lenta ($\omega = 0$). Una característica distintiva de la histéresis dinámica es que los lazos de histéresis suelen tener una forma elíptica en lugar de una forma puntiaguda, como en la figura 1.3.1c, si están asociados con deformaciones plásticas. En este último caso, los lazos de histéresis se desarrollan incluso bajo cargas cíclicas estáticas; por lo tanto, este fenómeno se conoce como *histéresis estática* porque la curva de fuerza-deformación es insensible a la velocidad de deformación.

Además, cabe mencionar dos medidas del amortiguamiento: la *capacidad específica de amortiguamiento* y el *factor específico de amortiguamiento*. La capacidad específica de amortiguamiento, ED/E_{So}, es la parte fraccionaria de la energía de deformación, $E_{So} = ku_o^2/2$, que se disipa durante cada ciclo de movimiento; tanto la ED como la ES_o se muestran en la figura 3.8.3. El factor específico de amortiguamiento, también conocido como el *factor de pérdida*, se define como

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\frac{E_D}{E_{So}} \tag{3.8.9}$$

Si la energía puede eliminarse a una tasa uniforme durante un ciclo del movimiento armónico simple (tal mecanismo no es realista), ξ podría interpretarse como la pérdida de

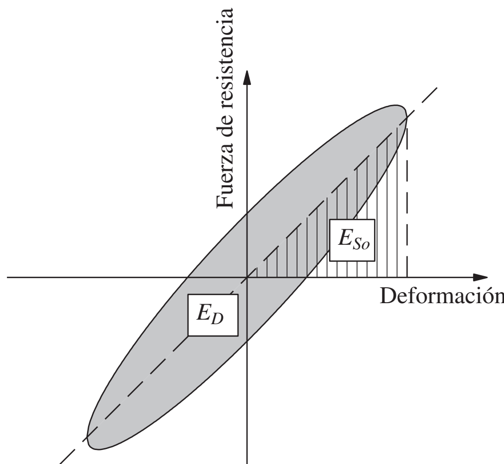


Figura 3.8.3 Definición de la pérdida de energía E_D en un ciclo de vibración armónica y de la energía de deformación máxima ES_o.

energía por radián dividida entre la energía de deformación, E_{So}. Estas dos medidas de amortiguamiento no se utilizan a menudo en la vibración estructural, ya que son más útiles para un amortiguamiento muy ligero (por ejemplo, son útiles al comparar la capacidad de amortiguamiento de los materiales).

Deducción 3.6

La ecuación (3.8.2) proporciona la energía de entrada por ciclo, donde el ángulo de fase, definido por la ecuación (3.2.12), puede expresarse como

$$\operatorname{sen}\phi = \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)R_d = \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)\frac{u_o}{p_o/k}$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.8.2) se obtiene la ecuación (3.8.3).

3.9 AMORTIGUAMIENTO VISCOSO EQUIVALENTE

Como se indicó en la sección 1.4, el amortiguamiento en las estructuras reales suele representarse usando el amortiguamiento viscoso equivalente. Ésta es la forma más simple de amortiguamiento que puede utilizarse, puesto que la ecuación diferencial que rige el movimiento es lineal y, por lo tanto, susceptible de resolverse en forma analítica, como se ha visto en las secciones anteriores de este capítulo y en el capítulo 2. La ventaja de utilizar una ecuación lineal de movimiento suele superar cualquier concesión que deba hacerse al aproximar el amortiguamiento viscoso. En esta sección se determina la fracción de amortiguamiento para el amortiguamiento viscoso, de modo que éste sea equivalente en cierto sentido al efecto combinado de todos los mecanismos de amortiguamiento presentes en la estructura real, los cuales se mencionaron en la sección 1.4.

La definición más sencilla del amortiguamiento viscoso equivalente se basa en la respuesta medida de un sistema ante una fuerza armónica en la frecuencia de excitación ω igual a la frecuencia natural ω_n del sistema. El factor de amortiguamiento ζ_{eq} se calcula a partir de la ecuación (3.4.1) utilizando los valores medidos de u_o y $(u_{st})_o$. Éste es el amortiguamiento viscoso equivalente puesto que representa todos los mecanismos de disipación de energía que existieron en los experimentos.

Otra definición de amortiguamiento viscoso equivalente es la cantidad de amortiguamiento que ofrece el mismo ancho de banda en la curva de respuesta en la frecuencia que el obtenido mediante experimentos para un sistema real. La fracción de amortiguamiento ζ_{eq} se calcula a partir de la ecuación (2.3.24), utilizando las frecuencias de excitación f_a, f_b y f_n (figura 3.4.1) obtenidas a partir de una curva de respuesta en la frecuencia determinada a partir de experimentos.

El método más común para definir el amortiguamiento viscoso equivalente consiste en igualar la energía disipada en un ciclo de vibración de la estructura real y en un sistema viscoso equivalente. Para una estructura real, la relación fuerza-desplazamiento se obtiene a partir de un experimento bajo carga cíclica con un desplazamiento de amplitud u_o; tal relación de forma arbitraria se muestra esquemáticamente en la figura 3.9.1. La energía disipada en la estructura real está dada por el área E_D encerrada por el lazo de histéresis. Si se iguala esto con la energía disipada en el amortiguamiento viscoso, dada por la ecuación (3.8.1) se obtiene

$$4\pi\zeta_{eq}\frac{\omega}{\omega_n}E_{So} = E_D \quad \text{o} \quad \zeta_{eq} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\omega/\omega_n}\frac{E_D}{E_{So}} \tag{3.9.1}$$

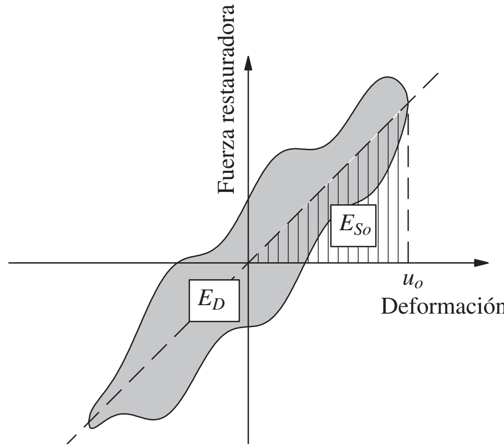


Figura 3.9.1 Energía disipada E_D en un ciclo de vibración armónica determinada a partir de experimentos.

donde la energía de deformación, $E_{So} = ku_o^2/2$, se calcula a partir de la rigidez k determinada mediante experimentos.

El experimento que conduce a la curva de fuerza-deformación de la figura 3.9.1 y, por lo tanto, a E_D debe realizarse en $\omega = \omega_n$, donde la respuesta del sistema es más sensible al amortiguamiento. Así, la ecuación (3.9.1) se especifica como

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{1}{4\pi}\frac{E_D}{E_{So}} \tag{3.9.2}$$

La fracción de amortiguamiento ζ_{eq} determinado a partir de una prueba en $\omega = \omega_n$ no sería correcto en ninguna otra frecuencia de excitación, pero sería una aproximación satisfactoria (sección 3.10.2).

Es muy aceptada la extensión de este procedimiento para modelar el amortiguamiento en sistemas con muchos grados de libertad. A cada modo de vibración natural del sistema (definido en el capítulo 10) se le asigna una fracción de amortiguamiento viscoso equivalente, de modo que la energía disipada en el amortiguamiento viscoso coincida con la energía disipada real en el sistema, cuando éste vibra en ese modo en su frecuencia natural.

En este libro el concepto de amortiguamiento viscoso equivalente se limita a los sistemas vibratorios con amplitudes dentro del límite elástico lineal de la estructura global. La energía disipada en las deformaciones inelásticas de la estructura también se ha modelado como amortiguamiento viscoso equivalente en algunos estudios de investigación. Sin embargo, esta idealización no suele ser satisfactoria para las grandes deformaciones inelásticas que se espera sufran las estructuras durante los sismos fuertes. Es necesario tener en cuenta estas deformaciones inelásticas y la disipación de energía asociada mediante las relaciones no lineales de fuerza-deformación, como las que se muestran en la figura 1.3.4 (vea los capítulos 5 y 7).

Ejemplo 3.6

Un cuerpo que se mueve a través de un fluido experimenta una fuerza de resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad, $f_D = \pm a\dot{u}^2$, , donde el signo positivo se aplica a una $\dot{u}$ positiva y el signo negativo a una $\dot{u}$ negativa. Determine la fracción de amortiguamiento viscoso equivalente c_{eq} para tales fuerzas que actúan sobre un sistema oscilatorio sujeto a un movimiento armónico de amplitud u_o y frecuencia ω. También encuentre su amplitud de desplazamiento en $\omega = \omega_n$.

Solución Si el tiempo se mide a partir de la posición de mayor desplazamiento negativo, el movimiento armónico es

$$u(t) = u_0 \cos \omega t$$

La energía disipada en un ciclo de movimiento es

$$E_D = \int f_D\, du = \int_0^{2\pi/\omega} f_D \dot{u}\, dt = 2\int_0^{\pi/\omega} f_D \dot{u}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/\omega} (a\dot{u}^2)\dot{u}\, dt = 2a\omega^3 u_o^3 \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sen}^3 \omega t\, dt = \tfrac{8}{3} a\omega^2 u_o^3$$

Si se iguala esto con la energía disipada en el amortiguamiento viscoso [ecuación (3.8.1)] resulta

$$\pi c_{\text{eq}} \omega u_o^2 = \frac{8}{3} a\omega^2 u_o^3 \quad \text{o} \quad c_{\text{eq}} = \frac{8}{3\pi} a\omega u_o \tag{a}$$

Al sustituir $\omega = \omega_n$ en la ecuación (a) y el c_{eq} por c en la ecuación (3.2.15) se obtiene

$$u_o = \left(\frac{3\pi}{8a}\frac{p_o}{\omega_n^2}\right)^{1/2} \tag{b}$$

PARTE C: SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO NO VISCOSO

3.10 VIBRACIÓN ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

3.10.1 Amortiguamiento independiente de la frecuencia

Los experimentos en metales estructurales indican que la energía disipada internamente en el esfuerzo cíclico del material es en esencia independiente de la frecuencia cíclica. De manera similar, las pruebas de vibración forzada en estructuras indican que el amortiguamiento viscoso equivalente es aproximadamente el mismo para todos los modos y frecuencias naturales. Así, se hace referencia a este tipo de amortiguamiento como *amortiguamiento lineal independiente de la frecuencia*. Otros términos utilizados para este mecanismo de amortiguamiento interno son *amortiguamiento estructural*, *amortiguamiento material* y *amortiguamiento histerético*. En este libro se prefiere no utilizar estos términos porque los dos primeros no son muy significativos y el tercero es ambiguo porque la histéresis es una característica de todos los materiales o sistemas estructurales que disipan la energía.

El amortiguamiento independiente de la frecuencia se asocia con la histéresis estática debido a la deformación plástica, la deformación plástica localizada, la plasticidad de los cristales que componen el material y el flujo plástico en un intervalo de esfuerzos dentro del límite elástico aparente. A escala microscópica, la falta de homogeneidad en la distribución de esfuerzos en los cristales y la concentración de esfuerzos en las intersecciones de las fronteras entre los cristales producen esfuerzos locales suficientemente grandes como para causar una deformación plástica local, a pesar de que el esfuerzo promedio (nivel macroscópico) puede estar muy por debajo del límite elástico. Este mecanismo de amortiguamiento no incluye la disipación de energía en las deformaciones plásticas macroscópicas que, como se mencionó con anterioridad, se controla mediante una relación no lineal entre la fuerza f_S y la deformación u.

El dispositivo más simple que puede utilizarse para representar el amortiguamiento lineal independiente de la frecuencia durante el movimiento armónico en la frecuencia ω, consiste en suponer que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad e inversamente proporcional a la frecuencia:

$$f_D = \frac{\eta k}{\omega}\dot{u} \tag{3.10.1}$$

donde k es la rigidez de la estructura y η es un coeficiente de amortiguamiento. La energía disipada por este tipo de amortiguamiento en un ciclo de vibración a la frecuencia ω es independiente de ω (figura 3.10.1). Dicha energía está dada por la ecuación (3.8.1) pero remplazando c por $\eta k/\omega$:

$$E_D = \pi\eta k u_o^2 = 2\pi\eta E_{So} \tag{3.10.2}$$

En contraste, la energía disipada en el amortiguamiento viscoso (ecuación 3.8.1) se incrementa linealmente con la frecuencia de excitación, como se muestra en la figura 3.10.1.

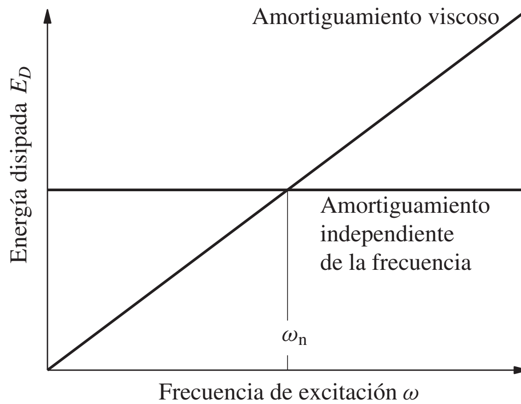


Figura 3.10.1 Energía disipada en el amortiguamiento viscoso y amortiguamiento independiente de la frecuencia.

El amortiguamiento independiente de la frecuencia es fácil de describir si la excitación es armónica y se tiene interés sólo en la respuesta de este sistema en el estado estacionario. Las dificultades surgen al trasladar de nuevo este mecanismo de amortiguamiento al dominio del tiempo. Por lo tanto, éste resulta más útil en el método de análisis en el dominio de la frecuencia(apéndice A).

3.10.2 Respuesta en estado estacionario ante una fuerza armónica

La ecuación que controla el movimiento armónico de un sistema de 1GDL con un amortiguamiento lineal independiente de la frecuencia, el cual se indica mediante un cuadro cruzado en la figura 3.10.2, es la ecuación (3.2.1) pero con el término de amortiguamiento sustituido por la ecuación (3.10.1):

$$m\ddot{u} + \frac{\eta k}{\omega}\dot{u} + ku = p(t) \tag{3.10.3}$$

La solución matemática de esta ecuación es bastante compleja para un $p(t)$ arbitrario. Aquí se considera sólo el movimiento en estado estacionario debido a una función de excitación

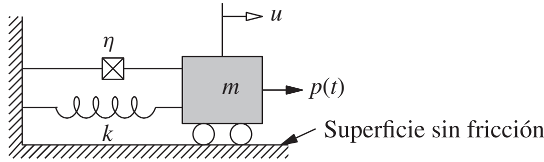


Figura 3.10.2 Sistema de 1GDL con amortiguamiento lineal independiente de la frecuencia.

sinusoidal, $p(t) = p_o$ sen ωt, que se describe mediante

$$u(t) = u_o \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3.10.4}$$

La amplitud u_o y el ángulo de fase ϕ son

$$u_o = (u_{\text{st}})_o \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \eta^2}} \tag{3.10.5}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\eta}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{3.10.6}$$

Estos resultados se obtienen al modificar la fracción del amortiguamiento viscoso en las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.12), para reflejar la fuerza de amortiguamiento asociada con el amortiguamiento independiente de la frecuencia, ecuación (3.10.1). En particular, ζ se sustituyó por

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{\eta k/\omega}{2m\omega_n} = \frac{\eta}{2(\omega/\omega_n)} \tag{3.10.7}$$

En la figura 3.10.3 se muestran, mediante líneas continuas, las gráficas de $u_o/(u_{\text{st}})_o$ y ϕ como funciones de la relación de frecuencias ω/ω_n para las fracciones de amortiguamiento $\eta = 0$, 0.2 y 0.4; las líneas punteadas se describen en la siguiente sección. Al comparar estos resultados con los de la figura 3.2.6 para el amortiguamiento viscoso, existen dos diferencias evidentes: en primer lugar, la resonancia (amplitud máxima) se produce en $\omega = \omega_n$, no en $\omega < \omega_n$. En segundo lugar, el ángulo de fase para $\omega = 0$ es $\phi = \tan^{-1} \eta$ en vez de cero para el amortiguamiento viscoso, lo que implica que el movimiento con amortiguamiento independiente de la frecuencia nunca puede estar en fase con la función de excitación.

Estas diferencias entre la vibración forzada con amortiguamiento independiente de la frecuencia y la vibración forzada con amortiguamiento viscoso no son importantes, pero son la fuente de una cierta dificultad en la conciliación de datos físicos. En la mayoría de las vibraciones amortiguadas, el amortiguamiento no es viscoso y suponer que lo es sin conocer sus características físicas reales representa un cierto error. En la siguiente sección se muestra que este error es pequeño cuando el amortiguamiento real es independiente de la frecuencia.

3.10.3 Solución mediante el amortiguamiento viscoso equivalente

En esta sección se obtiene una solución aproximada para la respuesta armónica de un sistema en estado estacionario con un amortiguamiento independiente de la frecuencia al modelar este mecanismo como amortiguamiento viscoso equivalente.

La coincidencia de las energías disipadas en $\omega = \omega_n$ condujo a la ecuación (3.9.2), donde E_D está dada por la ecuación (3.10.2), lo que a su vez conduce a la fracción de amortiguamiento viscoso equivalente:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{\eta}{2} \tag{3.10.8}$$

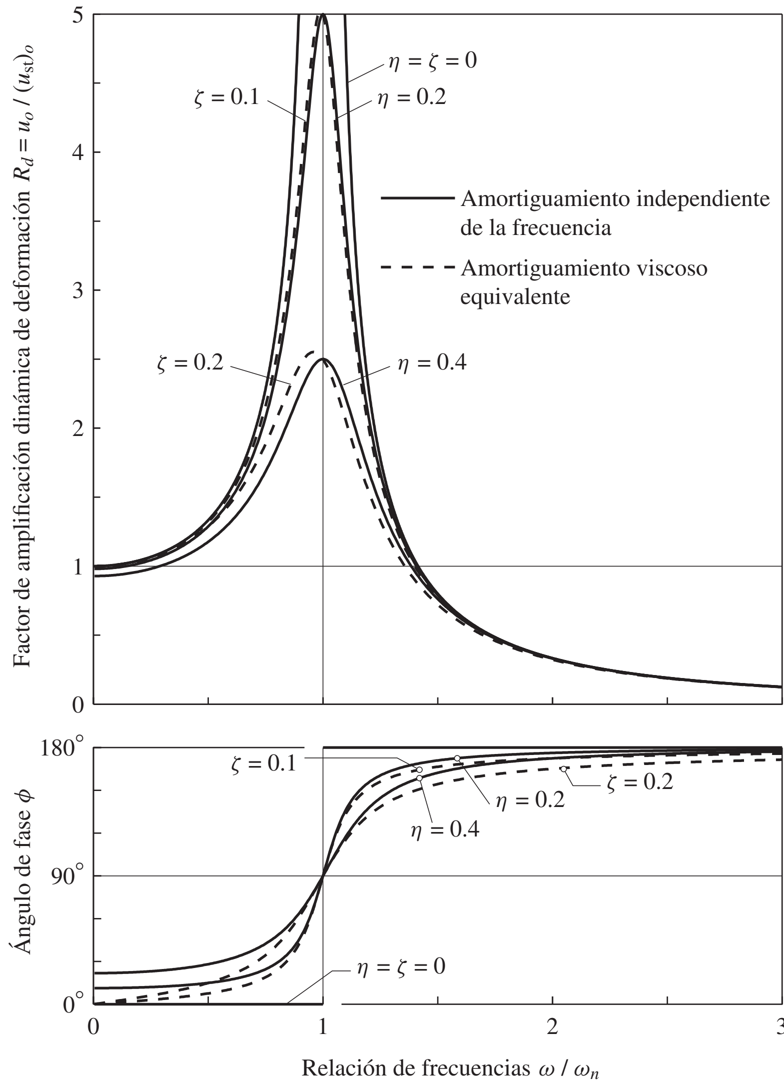


Figura 3.10.3 Respuesta del sistema con amortiguamiento independiente de la frecuencia: soluciones exacta y aproximada usando el amortiguamiento viscoso equivalente.

Si se sustituye esta ζ_{eq} por ζ en las ecuaciones (3.2.10) a (3.2.12), se obtiene la respuesta del sistema. La amplitud u_o y el ángulo de fase ϕ resultantes se muestran mediante líneas discontinuas en la figura 3.10.3. Esta solución aproximada coincide con el resultado exacto en $\omega = \omega_n$ porque se usó el mismo criterio en la selección de ζ_{eq} (figura 3.10.1). En un amplio intervalo de frecuencias de excitación se observa que la solución aproximada es lo suficientemente precisa para muchas aplicaciones de ingeniería. Así, la ecuación (3.10.3) [que es difícil de resolver para la fuerza arbitraria $p(t)$ dado que contiene muchos componentes armónicos de diferentes frecuencias ω] puede sustituirse por la ecuación más simple

(3.2.1) para un sistema con amortiguamiento viscoso equivalente definido por la ecuación (3.10.8). Ésta es la ventaja principal del amortiguamiento viscoso equivalente.

3.11 VIBRACIÓN ARMÓNICA CON FRICCIÓN DE COULOMB

3.11.1 Ecuación de movimiento

En la figura 3.11.1 se muestra un sistema masa-resorte con una fuerza de fricción de Coulomb $F = \mu N$ que se opone al deslizamiento de la masa. Tal como se definió en la sección 2.4, se supone que los coeficientes de fricción estática y cinética son iguales a μ y N es la fuerza normal a través de las superficies deslizantes. La ecuación de movimiento se obtiene al incluir la fuerza de excitación en las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) que controlan la vibración libre del sistema:

$$m\ddot{u} + ku \pm F = p(t) \tag{3.11.1}$$

El signo de la fuerza de fricción cambia con la dirección del movimiento; el signo positivo se aplica si el movimiento es de izquierda a derecha ($\dot{u} > 0$) y el signo negativo es para el movimiento de derecha a izquierda ($\dot{u} < 0$). Cada una de las dos ecuaciones diferenciales es lineal, pero el problema global es no lineal debido a que la ecuación que controla cambia cada medio ciclo de movimiento. Por lo tanto, no es posible encontrar soluciones analíticas exactas, excepto en casos especiales.

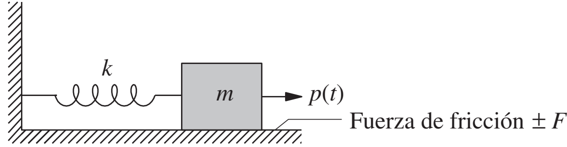


Figura 3.11.1 Sistema de 1GDL con fricción de Coulomb.

3.11.2 Respuesta en estado estacionario ante una fuerza armónica

En 1933, J. P. Den Hartog desarrolló una solución analítica exacta para la respuesta en estado estacionario del sistema de la figura 3.11.1, sometido a una fuerza armónica. El análisis no se incluye aquí, pero sus resultados se muestran mediante líneas continuas en la figura 3.11.2; las líneas discontinuas se describen en la siguiente sección. El desplazamiento de amplitud u_o, normalizado respecto a $(u_{st})_o = p_o/k$, y el ángulo de fase ϕ se representan mediante gráficas como una función de la relación de frecuencias ω/ω_n para tres valores de F/p_o. Si no hay fricción, $F = 0$ y $u_o/(u_{st})_o = (R_d)_{\zeta=0}$, igual que en la ecuación (3.1.11) para un sistema sin amortiguamiento. La fuerza de fricción reduce la amplitud u_o del desplazamiento y la reducción depende de la relación de frecuencias ω/ω_n.

En $\omega = \omega_n$ la amplitud del movimiento no está limitada por la fricción de Coulomb, si

$$\frac{F}{p_o} < \frac{\pi}{4} \tag{3.11.2}$$

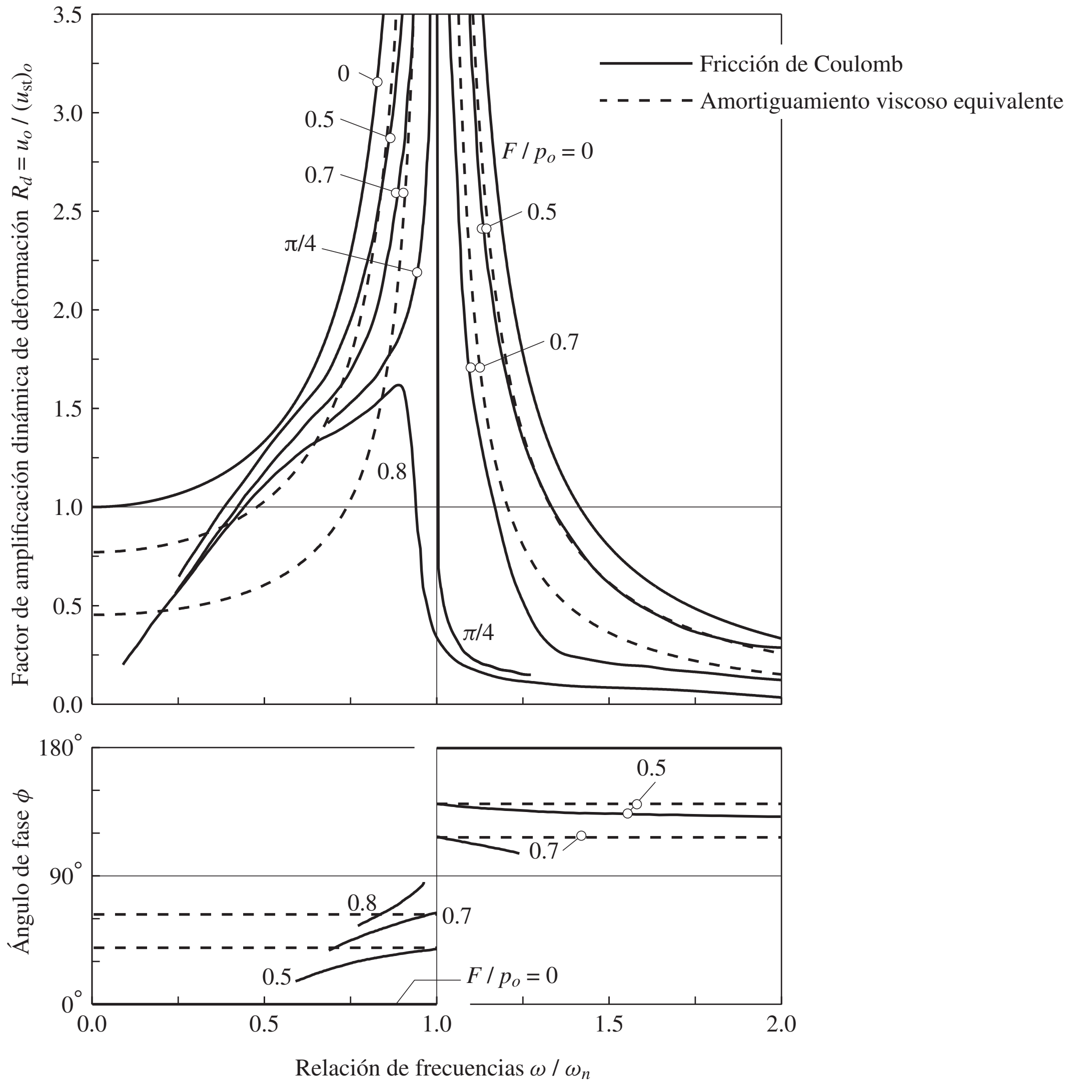


Figura 3.11.2 Factor de amplificación dinámica de deformación y ángulo de fase de un sistema con fricción de Coulomb excitado por una fuerza armónica. Solución exacta de J. P. Den Hartog; la solución aproximada se basa en el amortiguamiento viscoso equivalente.

lo que es sorprendente puesto que $F = (\pi/4)p_o$ representa una fuerza de fricción grande, pero puede explicarse al comparar la energía E_F disipada en la fricción contra la energía de entrada E_I. La energía disipada por la fricción de Coulomb en un ciclo de vibración con desplazamiento de amplitud u_o es el área del lazo de histéresis encerrada por el diagrama de

fuerza de fricción-desplazamiento (figura 3.11.3):

$$E_F = 4Fu_o \tag{3.11.3}$$

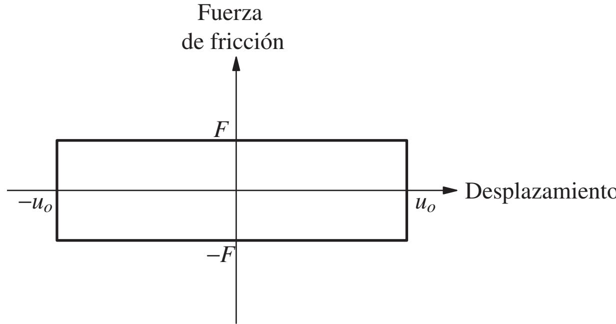


Figura 3.11.3 Lazo de histéresis para la fricción de Coulomb.

Observe que la energía disipada en un ciclo de vibración es proporcional a la amplitud del ciclo. La energía E_I introducida por la fuerza armónica aplicada en $\omega = \omega_n$ también es proporcional a la amplitud del desplazamiento. Si se cumple la ecuación (3.11.2), es posible demostrar que

$$E_F < E_I$$

es decir, la energía disipada en fricción por ciclo es menor que la energía de entrada (figura 3.11.4). Por lo tanto, la amplitud del desplazamiento aumentaría ciclo tras ciclo y crecería sin límite. Este comportamiento es bastante diferente al de los sistemas con amortiguamiento viscoso o amortiguamiento independiente de la frecuencia. Para estas formas de amortiguamiento, tal como se muestra en la sección 3.8, la energía disipada aumenta cuadráticamente con la amplitud del desplazamiento, y la amplitud del desplazamiento está limitada sin importar cuán pequeño sea el amortiguamiento. En conexión con el hecho de que en $\omega = \omega_n$ ocurren amplitudes infinitas si se cumple la ecuación (3.11.2), el ángulo de fase muestra un salto discontinuo en $\omega = \omega_n$ (figura 3.11.2).

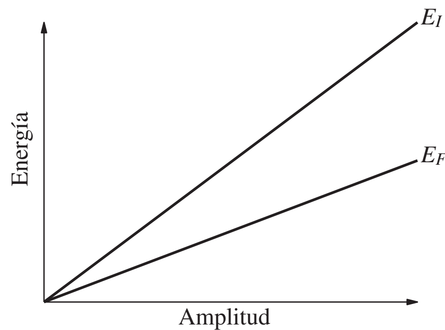


Figura 3.11.4 Energía de entrada E_I y energía disipada por la fricción de Coulomb E_F.

3.11.3 Solución usando el amortiguamiento viscoso equivalente

En esta sección se obtiene una solución aproximada para la respuesta armónica de un sistema con fricción de Coulomb en estado estacionario, al modelar el mecanismo de amortiguamiento, mediante el amortiguamiento viscoso equivalente. Si se sustituye E_F, la energía disipada por la fricción de Coulomb dada por la ecuación (3.11.3), por E_D en la ecuación (3.9.1), se obtiene la fracción de amortiguamiento viscoso equivalente:

$$\zeta_{eq} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega/\omega_n} \frac{u_F}{u_o} \tag{3.11.4}$$

donde $u_F = F/k$. La solución aproximada para la amplitud u_o del desplazamiento se obtiene sustituyendo ζ_{eq} por ζ en la ecuación (3.2.11):

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\left\{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [(4/\pi)(u_F/u_o)]^2\right\}^{1/2}}$$

Esta ecuación contiene u_o también en el lado derecho. Si se eleva al cuadrado y se resuelve algebraicamente, la amplitud normalizada del desplazamiento es

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{\left\{1 - [(4/\pi)(F/p_o)]^2\right\}^{1/2}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{3.11.5}$$

Este resultado aproximado es válido siempre que $F/p_o < \pi/4$. La solución aproximada no puede utilizarse si $F/p_o > \pi/4$, porque entonces la cantidad bajo el radical es negativa y el numerador es imaginario.

Estas soluciones aproximada y exacta se comparan en la figura 3.11.2. Si la fuerza de fricción es lo suficientemente pequeña para permitir un movimiento continuo, este movimiento es sinusoidal y la solución aproximada se encuentra cerca de la solución exacta. Si la fuerza de fricción es grande, resulta un movimiento discontinuo con paradas y arranques, que está muy distorsionado en relación con un sinusoide, y la solución aproximada resulta pobre.

La solución aproximada para el ángulo de fase se obtiene sustituyendo ζ_{eq} por ζ en la ecuación (3.2.12):

$$\tan\phi = \frac{(4/\pi)(u_F/u_o)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Si se sustituye u_o en la ecuación (3.11.5) da

$$\tan\phi = \pm\frac{(4/\pi)(F/p_o)}{\left\{1 - [(4/\pi)(F/p_o)]^2\right\}^{1/2}} \tag{3.11.6}$$

Para un valor dado de F/p_o, la $\tan\phi$ es constante, pero con un valor positivo si $\omega/\omega_n < 1$ y un valor negativo si $\omega/\omega_n > 1$. Esto se muestra en la figura 3.11.2, donde se ve que el ángulo de fase es discontinuo en $\omega = \omega_n$ para la fricción de Coulomb.

Ejemplo 3.7

La estructura del ejemplo 2.7, con dispositivos de fricción, sufre una deflexión de 2 pulg bajo una fuerza lateral de $p = 500$ kips. ¿Cuál sería la amplitud aproximada del movimiento si la fuerza lateral se sustituye por una fuerza armónica $p(t) = 500$ sen ωt, donde el periodo de excitación $T = 1$ s?

Solución Los datos (dados y tomados del ejemplo 2.7) son

$$(u_{st})_o = \frac{p_o}{k} = 2 \text{ pulg} \qquad u_F = 0.15 \text{ pulg}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{T_n}{T} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Se calcula u_o de la ecuación (3.11.5).

$$\frac{F}{p_o} = \frac{F/k}{p_o/k} = \frac{u_F}{(u_{st})_o} = \frac{0.15}{2} = 0.075$$

Al sustituir F/p_o en la ecuación (3.11.5) resulta

$$\frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{\left\{1 - [(4/\pi)0.075]^2\right\}^{1/2}}{1 - (0.5)^2} = 1.327$$

$$u_o = 1.327(2) = 2.654 \text{ pulg}$$

PARTE D: RESPUESTA ANTE UNA EXCITACIÓN PERIÓDICA

Una función periódica es aquella en la que la porción definida en T_0 se repite indefinidamente (figura 3.12.1). Muchas fuerzas son periódicas o casi periódicas. Bajo ciertas condiciones, las fuerzas de la hélice de un barco, la fuerza de la ola en una plataforma marina y las fuerzas del viento inducidas por vórtices en estructuras altas y esbeltas son casi periódicas. Un movimiento sísmico por lo general no se parece a una función periódica. Sin embargo, la excitación producida en la base de un automóvil que viaja sobre una autopista elevada, la cual se ha deformado debido al flujo plástico a largo plazo, puede ser casi periódica.

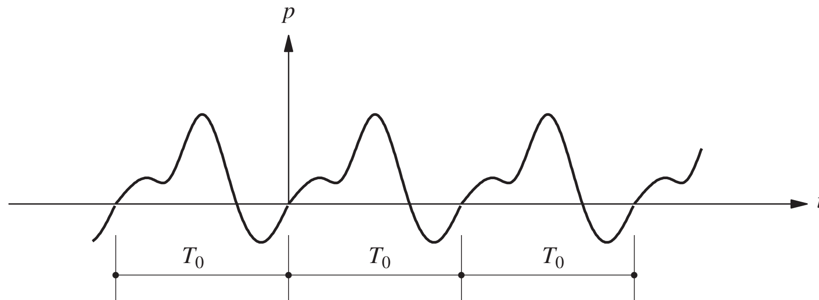


Figura 3.12.1 Excitación periódica.

Se tiene interés en analizar la respuesta ante una excitación periódica por otra razón. El análisis puede extenderse a excitaciones arbitrarias usando técnicas de la transformada discreta de Fourier. Éstas se presentan en el apéndice A.

3.12 REPRESENTACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER

Se dice que una función $p(t)$ es periódica con periodo T_0 si satisface la siguiente relación:

$$p(t + jT_0) = p(t) \qquad j = -\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$$

Una función periódica puede separarse en sus componentes armónicos usando la *serie de Fourier*:

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega_0 t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t \tag{3.12.1}$$

donde el armónico fundamental en la excitación tiene la frecuencia

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{3.12.2}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier pueden expresarse en términos de $p(t)$, puesto que las funciones seno y coseno son ortogonales:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t)\, dt \tag{3.12.3}$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos j\omega_0 t\, dt \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.12.4}$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \operatorname{sen} j\omega_0 t\, dt \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.12.5}$$

El coeficiente a_0 es el valor promedio de $p(t)$; los coeficientes a_j y b_j son las amplitudes de los j-ésimos armónicos de frecuencia $j\omega_0$.

En teoría, se requiere un número infinito de términos para que la serie de Fourier converja a $p(t)$. Sin embargo, en la práctica algunos términos son suficientes para una buena convergencia. En una discontinuidad, la serie de Fourier converge a un valor que es el promedio de los valores inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la discontinuidad.

3.13 RESPUESTA ANTE UNA FUERZA PERIÓDICA

Una excitación periódica implica que ésta ha existido durante mucho tiempo, momento en el cual la respuesta transitoria asociada con el desplazamiento inicial y la velocidad han decaído. Por lo tanto, se tiene interés en encontrar la respuesta en estado estacionario. Del mismo modo que para la excitación armónica, la respuesta de un sistema lineal ante una fuerza periódica puede determinarse mediante la combinación de respuestas a los términos de excitación individuales en la serie de Fourier.

La respuesta de un sistema no amortiguado ante una fuerza constante $p(t) = a_0$ está dada por la ecuación (f) del ejemplo 1.8, en la que el término $\cos \omega t$ decaerá debido al amor-

tiguamiento (vea la sección 4.3), dejando la solución en el estado estacionario.†

$$u_0(t) = \frac{a_0}{k} \tag{3.13.1}$$

La respuesta en estado estacionario de un sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso ante una fuerza cosenoidal armónica $p(t) = a_j \cos(j\omega_0 t)$ está dada por las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.26) pero con ω remplazada por $j\omega_0$:

$$u_j^c(t) = \frac{a_j}{k} \frac{2\zeta\beta_j \operatorname{sen} j\omega_0 t + (1 - \beta_j^2)\cos j\omega_0 t}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \tag{3.13.2}$$

donde

$$\beta_j = \frac{j\omega_0}{\omega_n} \tag{3.13.3}$$

De manera similar, la respuesta en estado estacionario del sistema ante una fuerza sinusoidal $p(t) = b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t$ está dada por las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) pero con ω remplazada por $j\omega_0$:

$$u_j^s(t) = \frac{b_j}{k} \frac{(1 - \beta_j^2) \operatorname{sen} j\omega_0 t - 2\zeta\beta_j \cos j\omega_0 t}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \tag{3.13.4}$$

Si $\zeta = 0$ y una de las $\beta_j = 1$, la respuesta en estado estacionario es ilimitada y no significativa porque la respuesta transitoria nunca decae (vea la sección 3.1); en lo subsecuente, se supone que $\zeta \neq 0$ y que $\beta \neq 1$.

La respuesta en estado estacionario de un sistema con amortiguamiento ante una excitación periódica $p(t)$ es la combinación de las respuestas a los términos individuales de la serie de Fourier:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^c(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^s(t) \tag{3.13.5}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (3.13.1), (3.13.2) y (3.13.4) en (3.13.5), da

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - \beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \left\{ \left[a_j(2\zeta\beta_j) + b_j(1 - \beta_j^2) \right] \operatorname{sen} j\omega_0 t + \left[a_j(1 - \beta_j^2) - b_j(2\zeta\beta_j) \right] \cos j\omega_0 t \right\} \tag{3.13.6}$$

La respuesta $u(t)$ es una función periódica con periodo T_0.

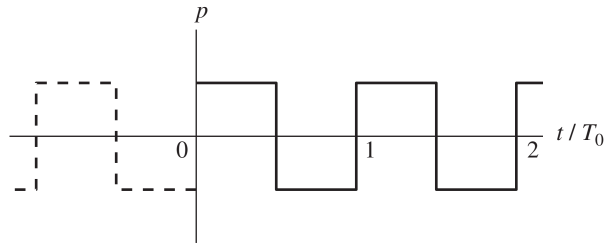
Las contribuciones relativas de los diferentes términos armónicos de la ecuación (3.13.6) dependen de dos factores: (1) las amplitudes a_j y b_j de los componentes armónicos de la función de excitación $p(t)$ y (2) la relación de frecuencias β_j. La respuesta estará dominada por los componentes armónicos para los que β_j se acerca a la unidad (es decir, la frecuencia de excitación $j\omega_0$ es cercana a la frecuencia natural, vea la figura 3.2.6).

†La notación u_0 empleada aquí incluye el subíndice cero consistente con a_0, lo que no debe confundirse con el subíndice "o" de u_o utilizado con anterioridad para indicar el valor máximo de $u(t)$.

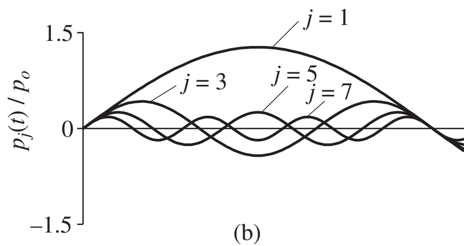
Ejemplo 3.8

La fuerza periódica que se muestra en la figura E3.8a está definida por

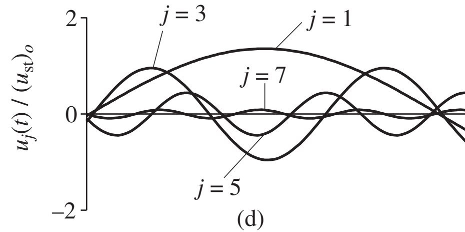
$$p(t) = \begin{cases} p_o & 0 \le t \le T_0/2 \\ -p_o & T_0/2 \le t \le T_0 \end{cases} \quad \text{(a)}$$



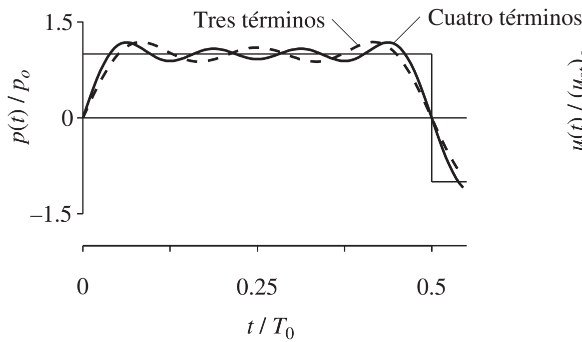
(a)



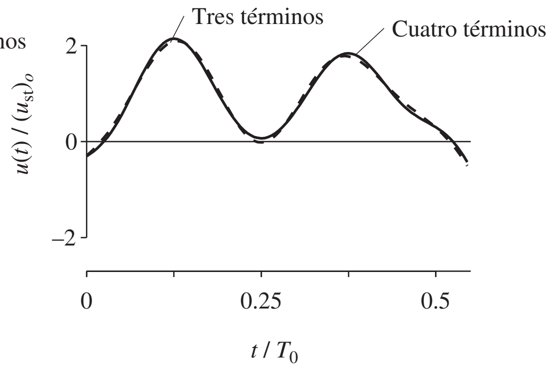
(b)



(d)



(c)



(e)

Figura E3.8

Al sustituir esto en las ecuaciones (3.12.3) a (3.12.5) se obtiene los coeficientes de las series de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t)\, dt = 0 \tag{b}$$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos j\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left[p_o \int_0^{T_0/2} \cos j\omega_0 t\, dt + (-p_o) \int_{T_0/2}^{T_0} \cos j\omega_0 t\, dt \right] = 0 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \operatorname{sen} j\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left[p_o \int_0^{T_0/2} \operatorname{sen} j\omega_0 t\, dt + (-p_o) \int_{T_0/2}^{T_0} \operatorname{sen} j\omega_0 t\, dt \right] \\ &= \begin{cases} 0 & j \text{ par} \\ 4p_o/j\pi & j \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \tag{d}$$

Por lo tanto, la representación en serie de Fourier de $p(t)$ es

$$p(t) = \sum p_j(t) = \frac{4p_o}{\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j} \operatorname{sen} j\omega_0 t \tag{e}$$

Los cuatro primeros términos de esta serie se muestran en la figura E3.8b, donde las frecuencias y las amplitudes relativas 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, y $\frac{1}{7}$ de los cuatro armónicos son evidentes. La suma acumulada de los términos de Fourier se muestran en la figura E3.8c, donde cuatro términos proporcionan una representación razonable de la función de excitación. En $t = T_0/2$, donde $p(t)$ es discontinua, la serie de Fourier converge a cero, el valor promedio de $p(T_0/2)$.

La respuesta de un sistema de 1GDL ante la función de excitación de la ecuación (e) se obtiene al sustituir las ecuaciones (b), (c) y (d) en la ecuación (3.13.6), para obtener

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{(1-\beta_j^2) \operatorname{sen} j\omega_0 t - 2\zeta\beta_j \cos j\omega_0 t}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2} \tag{f}$$

En la figura E3.8d se muestran las respuestas de un sistema de 1GDL con periodo natural $T_n = T_0/4$ y fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$ ante los cuatro primeros términos de carga en la serie de Fourier de la ecuación (e). Se trata de las gráficas de cada término de la ecuación (f) con $\beta_j = j\omega_0/\omega_n = jT_n/T_0 = j/4$. Las amplitudes relativas de estos términos son evidentes. Ninguno de ellos es muy grande debido a que ninguno de los valores de β_j está tan cercano a la unidad; observe que $\beta_j = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$, etcétera. La suma acumulada de los términos de respuesta individuales de la ecuación (f) se muestra en la figura E3.8e, donde se ve que la contribución del cuarto término es pequeña. Los términos más altos serían incluso menores porque las amplitudes de los componentes armónicos de $p(t)$ disminuyen con j y β_j estaría incluso más lejos de la unidad.

LECTURAS ADICIONALES

Blake, R. E., “Basic Vibration Theory”, capítulo 2 en *Shock and Vibration Handbook*, 3a. ed. (ed. C. M. Harris), McGraw-Hill, Nueva York, 1988.

Hudson, D. E., *Reading and Interpreting Strong Motion Accelerograms,* Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1979.

Jacobsen, L. S. y Ayre, R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1958, sección 5.8.

APÉNDICE 3: GRÁFICA DE ESCALA TETRALOGARÍTMICA

R_v se grafica como una función de ω/ω_n en una gráfica con escala log-log [es decir, $\log R_v$ es la ordenada y $\log(\omega/\omega_n)$ es la abscisa]. La ecuación (3.2.21) da

$$\log R_v = \log \frac{\omega}{\omega_n} + \log R_d \tag{A3.1}$$

Si R_d es una constante, la ecuación (A3.1) representa una línea recta con pendiente $+1$. Por lo tanto, las líneas de la cuadrícula que muestran la constante R_d serían líneas rectas con pendiente $+1$ y el eje R_d sería perpendicular a éstas (figura A3.1). La ecuación (3.2.21) también da

$$\log R_v = -\log \frac{\omega}{\omega_n} + \log R_a \tag{A3.2}$$

Si R_a es una constante, la ecuación (A3.2) representa una línea recta con pendiente –1. Las líneas de la cuadrícula que muestran la constante R_a serían líneas rectas con pendiente –1 y el eje R_a sería perpendicular a éstas (figura A3.1).

Con referencia a la figura A3.1, las escalas se establecen de la siguiente manera:

1. Con el punto ($R_v = 1$, $\omega/\omega_n = 1$) como el origen, se dibuja un eje vertical R_v y un eje horizontal ω/ω_n con escalas logarítmicas *iguales*.
2. La marca A sobre el eje R_a se localiza en el punto ($R_v = A^{1/2}$, $\omega/\omega_n = A^{1/2}$) a fin de satisfacer

$$R_a = \frac{\omega}{\omega_n} R_v \tag{A3.3}$$

   R_v y ω/ω_n se toman como iguales porque el eje R_a tiene una pendiente de $+1$. Este procedimiento se muestra para $A = 9$, que conduce a las marcas de escala 3 en los ejes R_v y ω/ω_n.
3. La marca D en el eje R_d se localiza en el punto ($R_v = D^{1/2}$, $\omega/\omega^n = D^{-1/2}$) a fin de satisfacer

$$R_d = R_v \div \frac{\omega}{\omega_n} \tag{A3.4}$$

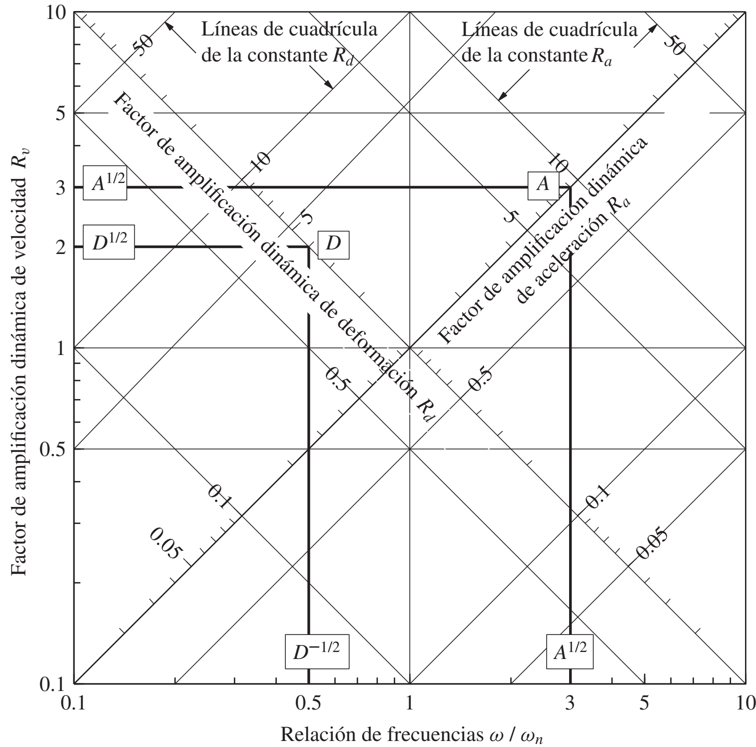


Figura A3.1 Construcción de la gráfica en escala tetralogarítmica.

y la condición de que el eje R_d tiene una pendiente de –1. Este procedimiento se muestra para $D = 4$, lo que conduce a la marca de escala 2 sobre el eje R_v y a la marca de escala $\frac{1}{2}$ sobre el eje ω/ω_n.

Las escalas logarítmicas a lo largo de los ejes R_a y R_d son iguales, pero no son iguales a las escalas R_v y ω/ω_n.

PROBLEMAS

Parte A

3.1 La masa m, la rigidez k y la frecuencia natural ω_n de un sistema de 1GDL no amortiguado se desconocen. Estas propiedades deben determinarse mediante pruebas de excitación armónica. Con una frecuencia de excitación de 4 Hz, la respuesta tiende a aumentar sin límite (es decir, una condición resonante). Enseguida, un peso $\Delta w = 5$ lb se conecta a la masa m y se repite la prueba de resonancia. Esta vez la resonancia se produce en $f = 3$ Hz. Determine la masa y la rigidez del sistema.

3.2 Un sistema de 1GDL se excita mediante una fuerza sinusoidal. En la resonancia, la amplitud de desplazamiento medía 2 pulg. En una frecuencia de excitación de un décimo de la frecuencia natural del sistema, la amplitud de desplazamiento medía 0.2 pulg. Estime la fracción de amortiguamiento del sistema.

3.3 En una prueba de vibración forzada bajo excitación armónica se observó que la amplitud de movimiento en la resonancia era exactamente cuatro veces la amplitud a una frecuencia de excitación 20% más alta que la frecuencia de resonancia. Determine la fracción de amortiguamiento del sistema.

3.4 Una máquina se apoya sobre cuatro resortes de acero cuyos amortiguamientos pueden despreciarse. La frecuencia natural de la vibración vertical del sistema máquina-resorte es de 200 ciclos por minuto. La máquina genera una fuerza vertical $p(t) = p_0$ sen ωt. La amplitud del desplazamiento vertical de estado estacionario resultante para la máquina es $u_o = 0.2$ pulg cuando la máquina está funcionando a 20 revoluciones por minuto (rpm), 1.042 pulg a 180 rpm y 0.0248 pulg a 600 rpm. Calcule la amplitud del movimiento vertical de la máquina si los resortes de acero se sustituyen por cuatro aisladores de caucho que proporcionan la misma rigidez, pero introducen un amortiguamiento equivalente a $\zeta = 25\%$ para el sistema. Comente la eficacia de los aisladores a diferentes velocidades de la máquina.

3.5 Un aparato de aire acondicionado que pesa 1200 lb se atornilla en medio de dos vigas paralelas de acero simplemente apoyadas (figura P3.5). El claro libre de las vigas es de 8 pies. El segundo momento del área de la sección transversal de cada viga es de 10 pulg^4. El motor de la unidad funciona a 300 rpm y, a esta velocidad, produce una fuerza vertical desbalanceada de 60 lb. Desprecie el peso de las vigas y suponga 1% de amortiguamiento viscoso en el sistema; para el acero $E = 30{,}000$ ksi. Considere la fuerza desbalanceada y determine las amplitudes de la deflexión en estado estacionario y la aceleración de estado estacionario (en g's) para las vigas en sus puntos medios.

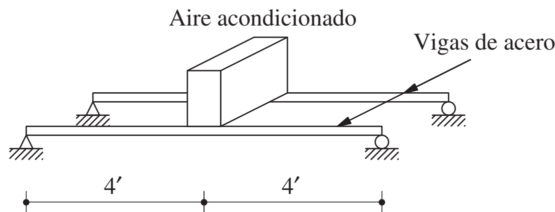


Figura P3.5

3.6 **(a)** Demuestre que la respuesta en estado estacionario de un sistema de 1GDL a una fuerza cosenoidal, $p(t) = p_o \cos \omega t$, está dada por

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right] \cos \omega t + [2\zeta(\omega/\omega_n)] \operatorname{sen} \omega t}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

(b) Demuestre que la deformación máxima debida a la fuerza cosenoidal es igual a la resultante de una fuerza sinusoidal.

3.7 **(a)** Demuestre que $\omega_r = \omega_n(1 - 2\zeta^2)^{1/2}$ es la frecuencia resonante para la amplitud del desplazamiento de un sistema de 1GDL.

(b) Determine la amplitud del desplazamiento en la resonancia.

3.8 **(a)** Demuestre que $\omega_r = \omega_n(1 - 2\zeta^2)^{-1/2}$ es la frecuencia resonante para la amplitud de la aceleración de un sistema de 1GDL.

(b) Determine la amplitud de la aceleración en la resonancia.

3.9 **(a)** Demuestre que $\omega_r = \omega_n$ es la frecuencia resonante para la amplitud de la velocidad de un sistema de 1GDL.

(b) Determine la amplitud de la velocidad en la resonancia.

Parte B

3.10 El techo de un edificio de un piso, hecho de concreto reforzado, tiene una masa de 500 kips/g y su frecuencia natural es de 4 Hz. Este edificio se excita mediante un generador de vibraciones con dos pesos, cada uno de 50 lb, que giran alrededor de un eje vertical con una excentricidad de 12 pulg. Cuando el generador de vibraciones funciona a la frecuencia natural del edificio, la amplitud de la aceleración del techo mide 0.02g. Determine el amortiguamiento de la estructura.

3.11 La amplitud de la aceleración en estado estacionario de una estructura se midió a varias frecuencias de excitación. La aceleración fue ocasionada por un generador de vibraciones con masa excéntrica. Los datos recopilados son los siguientes:

Frecuencia (Hz)	Aceleración (10^{-3}g)	Frecuencia (Hz)	Aceleración (10^{-3}g)
1.337	0.68	1.500	7.10
1.378	0.90	1.513	5.40
1.400	1.15	1.520	4.70
1.417	1.50	1.530	3.80
1.438	2.20	1.540	3.40
1.453	3.05	1.550	3.10
1.462	4.00	1.567	2.60
1.477	7.00	1.605	1.95
1.487	8.60	1.628	1.70
1.493	8.15	1.658	1.50
1.497	7.60		

Determine la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento de la estructura.

3.12 Considere una máquina industrial de masa m apoyada sobre aisladores tipo resorte con rigidez total k. La máquina funciona a una frecuencia de f hertz con un desbalance de fuerza p_o.

(a) Determine una expresión que proporcione la fracción de la fuerza transmitida a la base como una función de la frecuencia de excitación f y la deflexión estática $\delta_{st} = mg/k$. Considere sólo la respuesta de estado estacionario.

(b) Determine la deflexión estática δ_{st} para que la fuerza transmitida sea un 10% de p_o si $f = 20$ Hz.

3.13 Para el automóvil del ejemplo 3.4 determine la amplitud de la fuerza desarrollada en el resorte del sistema de suspensión cuando el automóvil está viajando a 40 mph.

3.14 Determine la velocidad del automóvil del ejemplo 3.4 que produciría una condición resonante para la fuerza del resorte en el sistema de suspensión.

3.15 Se instalará un bloque de aislamiento de vibraciones en un laboratorio para que la vibración producida por las operaciones de la fábrica que se encuentra junto no moleste a ciertos experimentos (figura P3.15). Si el bloque de aislamiento pesa 2000 lb y el piso circundante y el

cimiento vibran a 1500 ciclos por minuto, determine una rigidez del sistema de aislamiento tal que el movimiento del bloque de aislamiento se limite a 10% de la vibración del piso; desprecie el amortiguamiento.

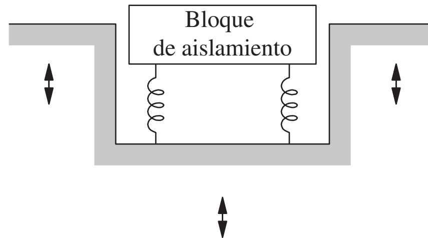


Figura P3.15

3.16 Un sistema de 1GDL está sometido al desplazamiento $u_g(t) = u_{go}$ sen ωt del soporte. Demuestre que la amplitud u_o^t del desplazamiento total de la masa está dada por la ecuación (3.6.5).

3.17 La frecuencia natural de un acelerómetro es de 50 Hz y su amortiguamiento es de 70%. Calcule la aceleración registrada como una función del tiempo si la aceleración de entrada es $\ddot{u}_g(t) =$ 0.1g sen $2\pi ft$ para $f = 10$, 20 y 40 Hz. En la figura 3.7.3 se presentó una comparación de las aceleraciones de entrada y registradas. El acelerómetro está calibrado para leer correctamente la aceleración de entrada a valores muy bajos de la frecuencia de excitación. ¿Cuál sería el error en la amplitud medida para cada una de las frecuencias de excitación dadas?

3.18 Un acelerómetro tiene una frecuencia natural $f_n = 25$ Hz y una fracción de amortiguamiento $\zeta = 60\%$. Escriba una ecuación para la respuesta $u(t)$ del instrumento como una función del tiempo si la aceleración de entrada es $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{go}$ sen $2\pi ft$. Dibuje la relación $\omega_n^2 u_o/\ddot{u}_{go}$ como una función de f/f_n. El acelerómetro está calibrado para leer correctamente la aceleración de entrada a valores muy bajos de la frecuencia de excitación. Determine el intervalo de frecuencias para las que la amplitud de la aceleración puede medirse con una precisión de $\pm 1\%$. Identifique este intervalo de frecuencias en la gráfica mencionada.

3.19 La frecuencia natural de un acelerómetro es $f_n = 50$ Hz y su fracción de amortiguamiento es $\zeta = 70\%$. Resuelva el problema 3.18 para este acelerómetro.

3.20 Si se utiliza un instrumento de medición del desplazamiento para determinar las amplitudes de vibración a frecuencias mucho más altas que su propia frecuencia natural, ¿cuál sería el amortiguamiento óptimo del instrumento para una máxima precisión?

3.21 Un medidor de desplazamiento tiene una frecuencia natural $f_n = 0.5$ Hz y una fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.6$. Determine el intervalo de frecuencias para las que la amplitud del desplazamiento puede medirse con una precisión de $\pm 1\%$.

3.22 Repita el problema 3.21 para $\zeta = 0.7$.

3.23 Demuestre que la energía disipada cada ciclo para el amortiguamiento viscoso puede expresarse como

$$E_D = \frac{\pi p_o^2}{k} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

3.24 Demuestre que el factor de pérdida ξ para el amortiguamiento viscoso es independiente de la amplitud y proporcional a la frecuencia.

Parte C

3.25 El sistema de 1GDL de la figura P2.20 tiene las siguientes propiedades: $w = 500$ kips, $F = 50$ kips y $T_n = 0.25$ s. Determine un valor aproximado para la amplitud del desplazamiento debido a una fuerza armónica con amplitud de 100 kips y periodo de 0.30 s.

Parte D

3.26 Un sistema de 1GDL con periodo natural T_n y fracción de amortiguamiento ζ se somete a la fuerza periódica mostrada en la figura P3.26, con una amplitud p_o y un periodo T_0.

(a) Expanda la función de excitación en su serie de Fourier.

(b) Determine la respuesta en estado estacionario de un sistema no amortiguado. ¿Para qué valores de T_0 la solución es indeterminada?

(c) Para $T_0/T_n = 2$, determine y grafique la respuesta a cada término de la serie de Fourier. ¿Cuántos términos se requieren para obtener una convergencia razonable de la serie a la solución?

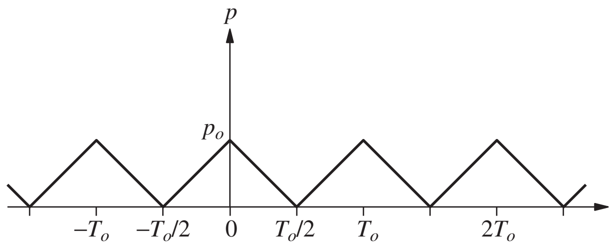


Figura P3.26

4

Respuesta a excitaciones arbitrarias, escalonadas y de pulso

AVANCE

En muchas situaciones prácticas la excitación dinámica no es ni armónica ni periódica. Por lo tanto, se tiene interés en estudiar la respuesta dinámica de los sistemas de 1GDL a excitaciones que varían arbitrariamente con el tiempo. Un procedimiento general para los sistemas lineales, la integral de Duhamel, se deduce en la parte A de este capítulo. Dicho procedimiento se utiliza en la parte B para estudiar la respuesta de los sistemas a las fuerzas escalonadas, las fuerzas linealmente crecientes y las fuerzas con incremento de magnitud finito. Estos resultados demuestran cómo se ve afectada la respuesta dinámica del sistema por la variación de la carga en el tiempo.

En la parte C se considera una clase importante de excitaciones que constan de un solo pulso. Se estudia la variación en el tiempo de la respuesta a tres diferentes fuerzas de pulso y se presenta el concepto del espectro de choque para mostrar mediante gráficas la respuesta máxima como una función de t_d/T_n, la razón de la duración del pulso sobre el periodo de vibración natural del sistema. Después se demuestra que la respuesta a pulsos cortos es en esencia independiente de la forma del pulso y que la respuesta puede determinarse utilizando sólo su área. La mayoría de los análisis y los resultados presentados se refieren a los sistemas sin amortiguamiento, debido a que el efecto de éste sobre la respuesta a una excitación de pulso no suele ser importante, lo que se demuestra hacia el final del capítulo.

PARTE A: RESPUESTA A FUERZAS QUE VARÍAN ARBITRARIAMENTE EN EL TIEMPO

En esta sección se desarrolla un procedimiento general para analizar la respuesta de un sistema de 1GDL sometido a una fuerza $p(t)$ que varía arbitrariamente con el tiempo. Es

resultado permitirá evaluar en forma analítica la respuesta a las fuerzas descritas mediante funciones simples de tiempo.

Se busca la solución de la ecuación diferencial de movimiento

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(0) = 0 \qquad \dot{u}(0) = 0$$

En el desarrollo de la solución general, $p(t)$ se interpreta como una secuencia de impulsos de duración infinitesimal y la respuesta del sistema a $p(t)$ es la suma de las respuestas a los impulsos individuales. Estas respuestas individuales pueden escribirse por conveniencia en términos de la respuesta del sistema a un impulso unitario.

4.1 RESPUESTA A UN IMPULSO UNITARIO

Una fuerza muy grande que actúa durante un tiempo muy corto, pero con un tiempo integral que es finito, se denomina fuerza *impulsiva*. En la figura 4.1.1 se muestra la fuerza $p(t) = 1/\varepsilon$, con una duración de tiempo ε que inicia en el instante de tiempo $t = \tau$. A medida que ε se acerca a cero, la fuerza se vuelve infinita; sin embargo, la *magnitud del impulso*, que se define mediante la integral en el tiempo de $p(t)$, sigue siendo igual a la unidad. Tal fuerza en el caso limitante $\varepsilon \rightarrow 0$ se llama *impulso unitario*. La *función delta de Dirac* $\delta(t - \tau)$ define matemáticamente un impulso unitario centrado en $t = \tau$.

De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, si una fuerza p actúa sobre un cuerpo de masa m, la razón de cambio de la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la fuerza aplicada, es decir,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u}) = p \tag{4.1.1}$$

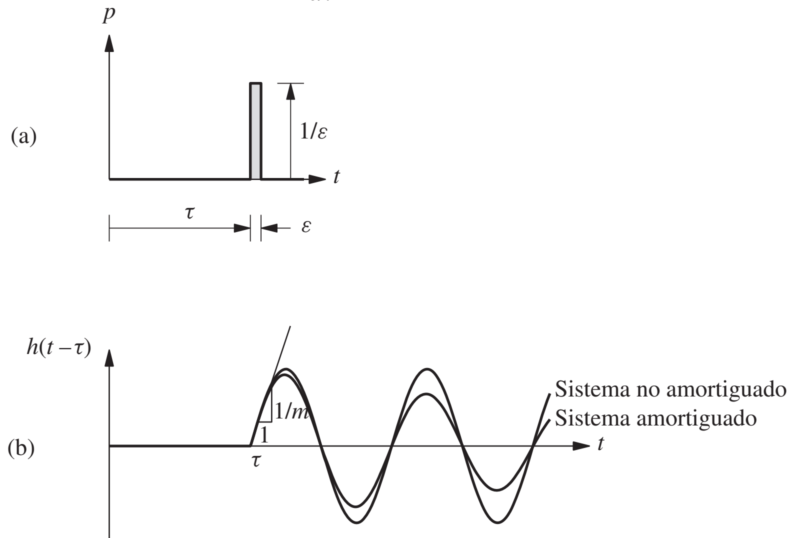


Figura 4.1.1 (a) Impulso unitario, (b) respuesta al impulso unitario.

Para una masa constante, esta ecuación se convierte en

$$p = m\ddot{u} \tag{4.1.2}$$

Si se integran ambos lados con respecto a t resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} p\,dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\,\Delta\dot{u} \tag{4.1.3}$$

La integral en el lado izquierdo de esta ecuación es la magnitud del impulso. El producto de la masa y la velocidad es la *cantidad de movimiento*. Así la ecuación (4.1.3) indica que la magnitud del impulso es igual al cambio en la cantidad de movimiento.

Este resultado también se aplica a un sistema de masa-resorte-amortiguador de 1GDL si el resorte o amortiguador no tiene ningún efecto. Tal es el caso aquí, puesto que la fuerza impulsiva actúa durante un tiempo de duración infinitesimal. Así, un impulso unitario en $t = \tau$ imparte a la masa, m, la velocidad (a partir de la ecuación 4.1.3)

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} \tag{4.1.4}$$

pero el desplazamiento es cero antes de, y hasta ocurrido, el impulso:

$$u(\tau) = 0 \tag{4.1.5}$$

Un impulso unitario ocasiona una vibración libre del sistema de 1GDL debido a la velocidad y al desplazamiento inicial dados por las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5). Si se sustituyen éstas en la ecuación (2.2.4), se obtiene la respuesta de los sistemas viscosamente amortiguados:

$$h(t-\tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}[\omega_D(t-\tau)] \qquad t \geq \tau \tag{4.1.6}$$

Esta *función de respuesta al impulso unitario*, indicada por $h(t-\tau)$, se muestra en la figura 4.1.1b, junto con el caso especial de $\zeta = 0$.

Si la excitación es un impulso unitario del movimiento del suelo, con base en la ecuación (1.7.6), $p_{ef}(t) = -m\delta(t-\tau)$; entonces, la ecuación (4.1.4) se convierte en $\dot{u}(\tau) = -1$ y la ecuación (4.1.6) cambia a

$$h(t-\tau) = -\frac{1}{\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}[\omega_D(t-\tau)] \qquad t \geq \tau \tag{4.1.7}$$

4.2 RESPUESTA A UNA FUERZA ARBITRARIA

Una fuerza $p(t)$ que varía en forma arbitraria con el tiempo puede representarse como una secuencia de impulsos demasiado cortos (figura 4.2.1). La respuesta de un sistema dinámico lineal a uno de estos impulsos, aquél en el tiempo τ con magnitud $p(\tau)\,d\tau$, es esta magnitud multiplicada por la función de respuesta al impulso unitario:

$$du(t) = [p(\tau)\,d\tau]h(t-\tau) \qquad t > \tau \tag{4.2.1}$$

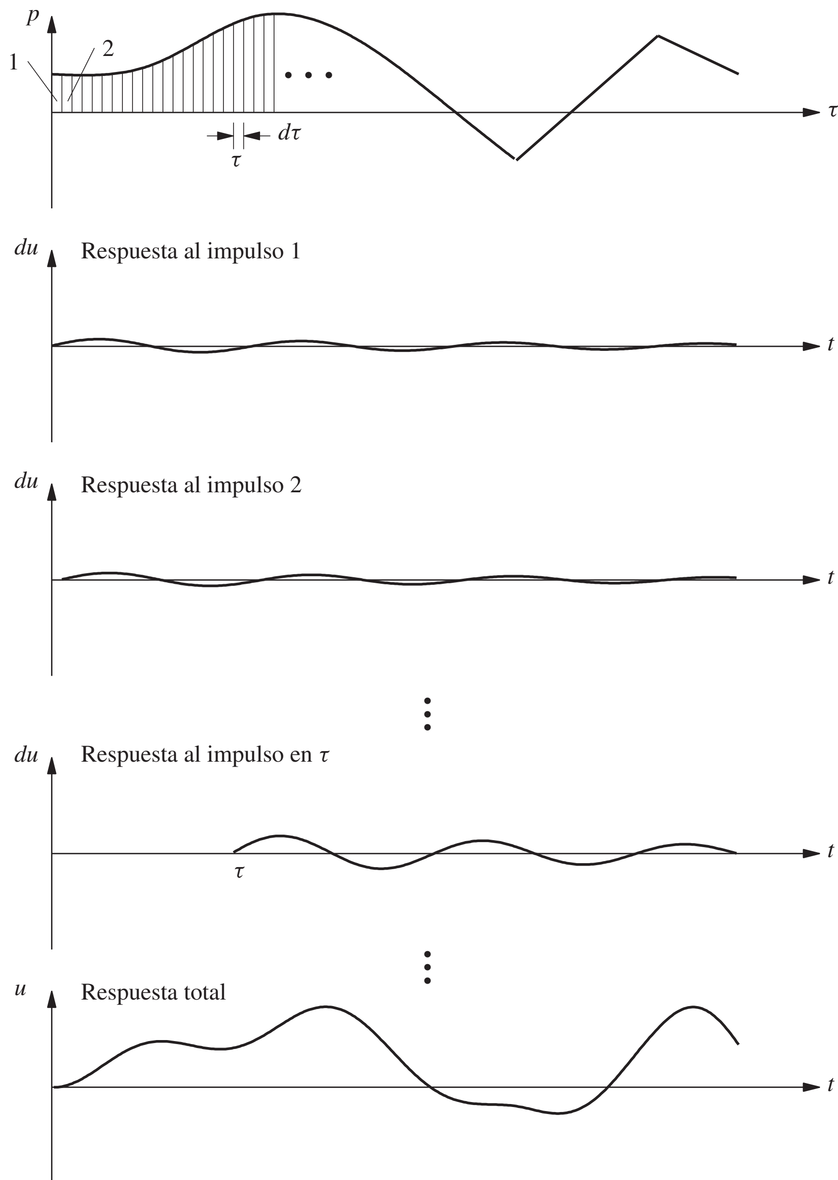


Figura 4.2.1 Explicación esquemática de la integral de convolución.

La respuesta del sistema en el tiempo t es la suma de las respuestas a todos los impulsos hasta ese momento (figura 4.2.1). Así

$$u(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{4.2.2}$$

Esto se conoce como la *integral de convolución*, un resultado general que es aplicable a cualquier sistema dinámico lineal.

Si se especifica la ecuación (4.2.2) para el sistema de 1GDL al sustituir la ecuación (4.1.7) por la función de respuesta al impulso unitario, resulta la *integral de Duhamel*:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}[\omega_D(t-\tau)]\, d\tau \qquad (4.2.3)$$

Para un sistema no amortiguado este resultado se simplifica como

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \operatorname{sen}[\omega_n(t-\tau)]\, d\tau \qquad (4.2.4)$$

En este resultado están implícitas las condiciones iniciales “en reposo” $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = 0$. Si el desplazamiento y la velocidad iniciales son $u(0)$ y $\dot{u}(0)$, la respuesta resultante en vibración libre dada por las ecuaciones (2.2.4) y (2.1.3) debe añadirse a las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4), respectivamente. Recuerde que en la sección 1.10.2 se había usado la ecuación (4.2.4), donde se introdujeron cuatro métodos para resolver la ecuación de movimiento.

La integral de Duhamel proporciona un resultado general para evaluar la respuesta de un sistema lineal de 1GDL a una fuerza arbitraria. Este resultado se restringe a los sistemas lineales, puesto que se basa en el principio de superposición. Por lo tanto, no es aplicable a estructuras que se deforman más allá de su límite elástico lineal. Si $p(\tau)$ es una función simple, es posible evaluar la integral en forma cerrada y la integral de Duhamel representa una alternativa al método clásico de solución de ecuaciones diferenciales (sección 1.10.1). Si $p(\tau)$ es una función complicada que se describe numéricamente, la evaluación de la integral requiere métodos numéricos. Sin embargo, dichos métodos no se presentan en este libro, debido a que no son muy eficaces. Los métodos más eficaces para la solución numérica de una ecuación de movimiento se presentan en el capítulo 5.

PARTE B: RESPUESTA A FUERZAS ESCALONADA Y CRECIENTE

4.3 FUERZA ESCALONADA

Una *fuerza escalonada* salta de repente de cero a p_o y se mantiene constante en ese valor (figura 4.3.1b). Se desea determinar la respuesta de un sistema de 1GDL no amortiguado (figura 4.3.1a) que inicia desde el reposo a la fuerza escalonada:

$$p(t) = p_o \qquad (4.3.1)$$

La ecuación de movimiento se resolvió (sección 1.10.2) utilizando la integral de Duhamel para obtener

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o(1 - \cos\omega_n t) = (u_{\text{st}})_o\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T_n}\right) \qquad (4.3.2)$$

donde $(u_{\text{st}})_o = p_o/k$, la deformación estática debida a la fuerza p_o.

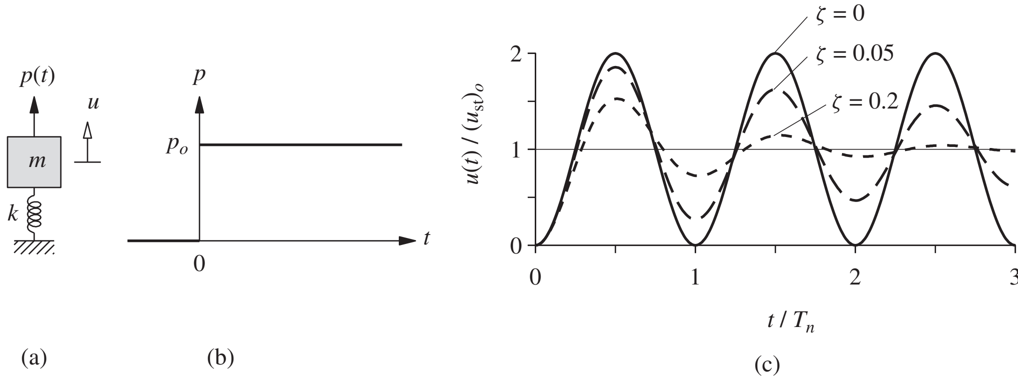


Figura 4.3.1 (a) Sistema de 1GDL; (b) fuerza escalonada; (c) respuesta dinámica.

En la figura 4.3.1c se grafica la deformación normalizada o el desplazamiento normalizado, $u(t)/(u_{st})_o$, contra el tiempo normalizado, t/T_n. Se observa que el sistema oscila en su periodo natural alrededor de una nueva posición de equilibrio, que se desplaza una distancia $(u_{st})_o$ desde la posición de equilibrio original de $u = 0$. El desplazamiento máximo puede determinarse al diferenciar la ecuación (4.3.2) e igualar $\dot{u}(t)$ a cero, lo que resulta en ω_n sen $\omega_n t = 0$. Los valores t_o de t que satisfacen esta condición son

$$\omega_n t_o = j\pi \quad \text{o} \quad t_o = \frac{j}{2} T_n \tag{4.3.3}$$

donde j es un número entero impar; los enteros pares corresponden a los valores mínimos de $u(t)$. El valor máximo u_o de $u(t)$ está dado por la ecuación (4.3.2) evaluada en $t = t_o$; estos máximos son todos iguales:

$$u_o = 2(u_{st})_o \tag{4.3.4}$$

Así, una fuerza aplicada repentinamente produce el doble de la deformación que podría haber causado una fuerza aplicada lentamente.

La respuesta de un sistema con amortiguamiento puede determinarse al sustituir la ecuación (4.3.1) en la ecuación (4.2.3) y evaluar la integral de Duhamel para obtener

$$u(t) = (u_{st})_o \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\omega_D t \right) \right] \tag{4.3.5}$$

Sin embargo, para el análisis de sistemas amortiguados, el método clásico (sección 1.10.1) puede resultar más sencillo que la evaluación de la integral de Duhamel. La ecuación diferencial que debe solucionarse es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_o \tag{4.3.6}$$

Su solución complementaria está dada por la ecuación (f) de la deducción 2.2, la solución particular es $u_p = p_o/k$ y la solución completa es

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\operatorname{sen}\omega_D t) + \frac{p_o}{k} \tag{4.3.7}$$

donde las constantes A y B deben determinarse a partir de las condiciones iniciales. Para un sistema que inicia desde el reposo, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ y

$$A = -\frac{p_o}{k} \qquad B = -\frac{p_o}{k}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Si se sustituyen estas constantes en la ecuación (4.3.7), se obtiene el mismo resultado que en la ecuación (4.3.5). Cuando este resultado se especifica para los sistemas sin amortiguamiento, se reduce a la ecuación (4.3.2), ya presentada en la figura 4.3.1c.

En la figura 4.3.1c se grafica la ecuación (4.3.5) para dos valores adicionales de la fracción de amortiguamiento. En presencia de amortiguamiento, el movimiento más allá de su posición de equilibrio estático es más pequeño y las oscilaciones alrededor de esta posición decaen con el tiempo. La fracción de amortiguamiento determina la cantidad de movimiento que supera la posición de equilibrio y la velocidad a la que las oscilaciones decaen. Poco a poco, el sistema cae en la deformación estática, que es también la deformación de estado estacionario.

4.4 FUERZA TIPO RAMPA O LINEALMENTE CRECIENTE

En la figura 4.4.1b la fuerza aplicada $p(t)$ aumenta linealmente con el tiempo. Por supuesto, no puede aumentar de manera indefinida, pero el interés aquí se limita al lapso de tiempo en el que $p(t)$ todavía es lo suficientemente pequeña para que la fuerza resultante del resorte esté dentro de su límite elástico lineal.

Aunque la ecuación de movimiento puede resolverse mediante varios métodos, aquí se ilustra el uso de la integral de Duhamel para obtener la solución. La fuerza aplicada

$$p(t) = p_o\frac{t}{t_r} \tag{4.4.1}$$

se sustituye en la ecuación (4.2.4) para obtener

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \frac{p_o}{t_r}\tau \operatorname{sen}\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

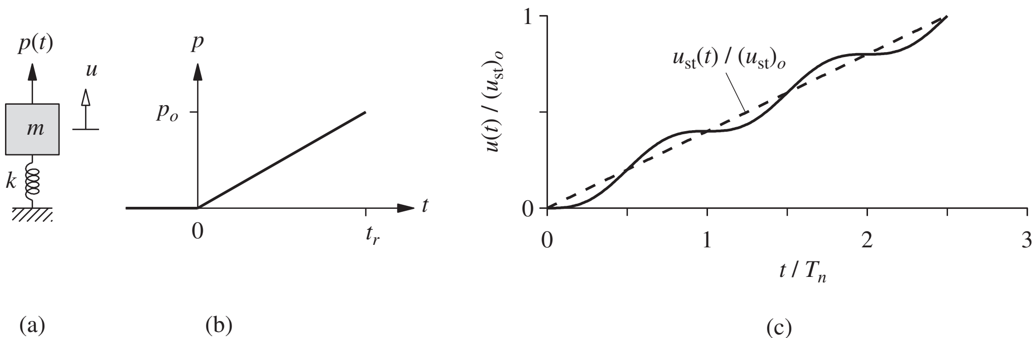


Figura 4.4.1 (a) Sistema de 1GDL, (b) fuerza creciente, (c) respuestas dinámica y estática.

Esta integral se evalúa y se simplifica para obtener

$$u(t) = (u_{st})_o \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\operatorname{sen} \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) = (u_{st})_o \left(\frac{t}{T_n} \frac{T_n}{t_r} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n} \right) \tag{4.4.2}$$

donde $(u_{st})_o = p_o/k$, la deformación estática debida a la fuerza p_o.

En la figura 4.4.1c, se grafica la ecuación (4.4.2) para $t_r/T_n = 2.5$, donde también se muestra la deformación estática en cada instante de tiempo,

$$u_{st}(t) = \frac{p(t)}{k} = (u_{st})_o \frac{t}{t_r} \tag{4.4.3}$$

$u_{st}(t)$ varía con el tiempo de la misma manera que $p(t)$ y las dos difieren por el factor de escala $1/k$. Se observa que el sistema oscila en su periodo natural T_n alrededor de la solución estática.

4.5 FUERZA ESCALONADA CON TIEMPO DE CRECIMIENTO FINITO

En la realidad una fuerza nunca puede aplicarse súbitamente; por ello, es interesante considerar una fuerza dinámica creciente de tiempo finito, t_r, pero que permanezca constante a partir de ese momento, como se muestra en la figura 4.5.1b:

$$p(t) = \begin{cases} p_o(t/t_r) & t \le t_r \\ p_o & t \ge t_r \end{cases} \tag{4.5.1}$$

La excitación tiene dos fases: la fase creciente o de elevación y la fase constante.

Para un sistema sin amortiguamiento que inicia desde el reposo, la respuesta durante la fase creciente está dada por la ecuación (4.4.2), que se repite aquí por conveniencia:

$$u(t) = (u_{st})_o \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\operatorname{sen} \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) \qquad t \le t_r \tag{4.5.2}$$

La respuesta durante la fase constante puede determinarse al evaluar la integral de Duhamel después de sustituir la ecuación (4.5.1) en la ecuación (4.2.4). De manera alternativa, podrían utilizarse las soluciones existentes para la vibración libre y la fuerza escalonada a fin de expresar esta respuesta como

$$u(t) = u(t_r) \cos \omega_n (t - t_r) + \frac{\dot{u}(t_r)}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_r) + (u_{st})_o [1 - \cos \omega_n (t - t_r)] \tag{4.5.3}$$

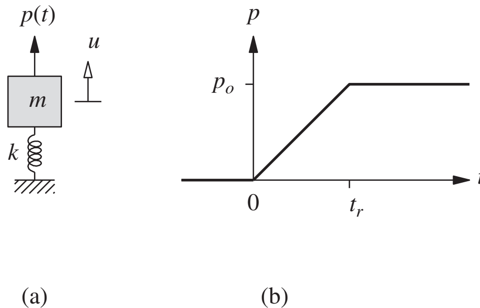


Figura 4.5.1 (a) Sistema de 1GDL; (b) fuerza escalonada creciente en tiempo finito.

El tercer término es la solución para un sistema en reposo, sometido a una fuerza escalonada, que inicia en $t = t_r$; éste se obtiene de la ecuación (4.3.2). Los primeros dos términos de la ecuación (4.5.3) representan la vibración libre del sistema como resultado de su desplazamiento $u(t_r)$ y su velocidad $\dot{u}(t_r)$ en el extremo de fase creciente. $u(t_r)$ y $\dot{u}(t_r)$ se determinan a partir de la ecuación (4.5.2) y se sustituyen en la ecuación (4.5.3) para obtener

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \Big[(1 - \cos \omega_n t_r) \operatorname{sen} \omega_n (t - t_r) - \operatorname{sen} \omega_n t_r \cos \omega_n (t - t_r) \Big] \right\} \qquad t \geq t_r \tag{4.5.4a}$$

Esta ecuación puede simplificarse utilizando una identidad trigonométrica para obtener

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o \left\{ 1 - \frac{1}{\omega_n t_r} \Big[\operatorname{sen} \omega_n t - \operatorname{sen} \omega_n (t - t_r) \Big] \right\} \qquad t \geq t_r \tag{4.5.4b}$$

La deformación normalizada, $u(t)/(u_{\text{st}})_o$, es una función del tiempo normalizado, t/T_n, porque $\omega_n t = 2\pi(t/T_n)$. Esta función depende sólo de la relación t_r/T_n porque $\omega_n t_r = 2\pi(t_r/T_n)$, no por separado de t_r y T_n. En la figura 4.5.2 se muestra a $u(t)/(u_{\text{st}})_o$ graficada contra t/T_n para varios valores de t_r/T_n, la relación entre el tiempo de crecimiento sobre el periodo natural. Cada gráfica es válida para todas las combinaciones de t_r y T_n con la misma proporción t_r/T_n. También se grafica $u_{\text{st}}(t) = p(t)/k$, la deformación estática en cada instante de tiempo. Estos resultados permiten algunas observaciones:

1. Durante la fase de crecimiento de la fuerza, el sistema oscila en el periodo natural T_n alrededor de la solución estática.
2. Durante la fase de fuerza constante el sistema oscila también en el periodo natural T_n alrededor de la solución estática.
3. Si la velocidad $\dot{u}(t_r)$ es cero en el extremo de la rampa, el sistema no vibra durante la fase de fuerza constante.
4. Para los valores pequeños de t_r/T_n (es decir, para un tiempo de crecimiento corto), la respuesta es similar a la obtenida mediante una fuerza escalonada repentina; vea la figura 4.3.1c.
5. Para los valores grandes de t_r/T_n, el desplazamiento dinámico oscila cerca de la solución estática, lo que implica que los efectos dinámicos son pequeños (es decir, una fuerza que se incrementa lentamente, con relación a T_n), desde 0 hasta p_o afecta al sistema como si fuera una fuerza estática).

La deformación alcanza su valor máximo durante la fase de fuerza constante de la respuesta. A partir de la ecuación (4.5.4a) el valor máximo de $u(t)$ es

$$u_o = (u_{\text{st}})_o \left[1 + \frac{1}{\omega_n t_r} \sqrt{(1 - \cos \omega_n t_r)^2 + (\operatorname{sen} \omega_n t_r)^2} \right] \tag{4.5.5}$$

Si se usan identidades trigonométricas y $T_n = 2\pi/\omega_n$, la ecuación (4.5.5) puede simplificarse como

$$R_d \equiv \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = 1 + \frac{|\operatorname{sen}(\pi t_r/T_n)|}{\pi t_r/T_n} \tag{4.5.6}$$

El factor de respuesta de deformación R_d depende sólo de t_r/T_n, la relación entre el tiempo de elevación sobre el periodo natural. Una presentación gráfica de esta relación, como la de

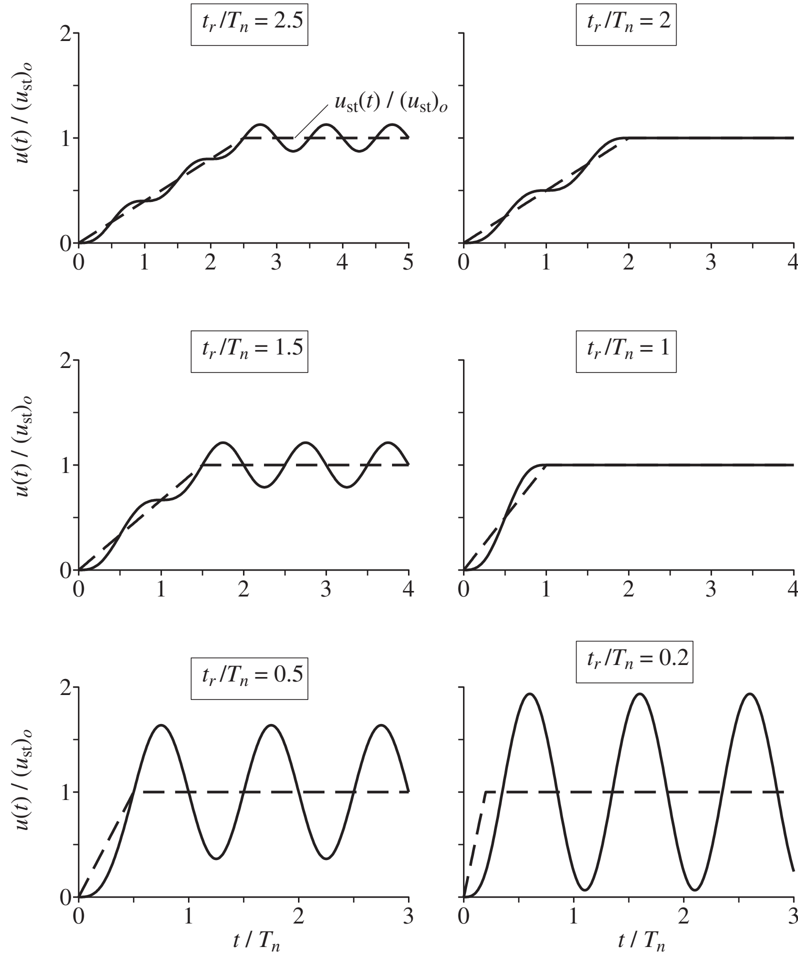


Figura 4.5.2 Respuesta dinámica de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza escalonada con tiempo de crecimiento finito; la solución estática se muestra mediante líneas discontinuas.

la figura 4.5.3, se denomina *espectro de respuesta* para la fuerza escalonada con tiempo de crecimiento finito.

Este espectro de respuesta caracteriza al problema por completo. En este caso, contiene información sobre la respuesta máxima normalizada, $u_o/(u_{st})_o$, de todos los sistemas de 1GDL (sin amortiguamiento) debida a cualquier fuerza escalonada p_o con cualquier tiempo de elevación t_r. El espectro de respuesta permite algunas observaciones:

1. Si $t_r < T_n/4$ (es decir, un tiempo de crecimiento relativamente corto), $u_o \simeq 2(u_{st})_o$, lo que implica que la estructura "ve" a esta excitación como una fuerza aplicada de forma súbita.
2. Si $t_r > 3T_n$ (es decir, un tiempo de crecimiento relativamente largo), $u_o \simeq (u_{st})_o$, lo que implica que esta excitación afecta a la estructura como una fuerza estática.

3. Si $t_r/T_n = 1, 2, 3, \ldots, u_o = (u_{st})_o$, porque $\dot{u}(t_r) = 0$ al final de la fase de crecimiento de la fuerza y el sistema no oscila durante la fase de fuerza constante; vea la figura 4.5.2.

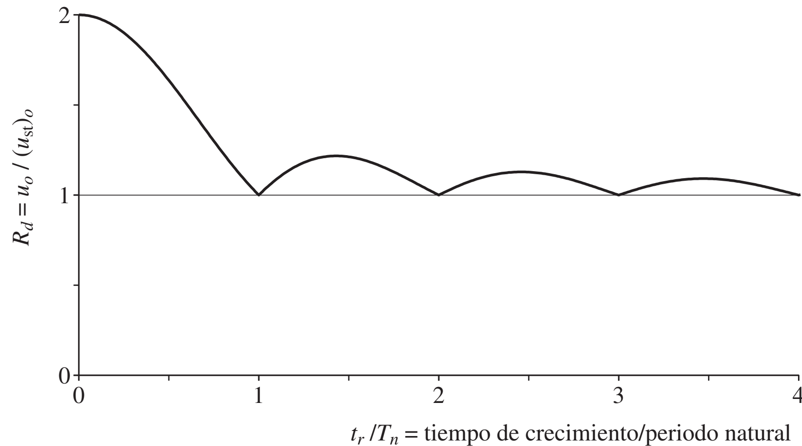


Figura 4.5.3 Espectro de respuesta para una fuerza escalonada con tiempo de crecimiento finito.

PARTE C: RESPUESTA A EXCITACIONES DE PULSO

A continuación se considera una clase importante de excitaciones que constan de un solo pulso, como se muestra en la figura 4.6.1. Las presiones del aire generadas en una estructura, debido a estallidos o explosiones, consisten esencialmente en un solo pulso y, por lo general, pueden idealizarse en formas simples, como las que se muestran en la parte izquierda de la figura 4.6.2. La dinámica de las estructuras sometidas a este tipo de excitaciones fue objeto de mucho trabajo durante las décadas de 1950 y 1960.

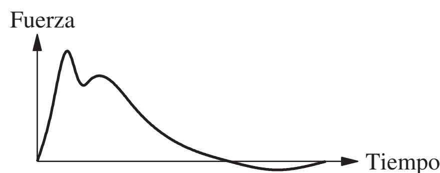


Figura 4.6.1 Excitación de un solo pulso.

4.6 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

La respuesta del sistema a tales excitaciones de pulso no alcanza una condición de estado estacionario; es necesario considerar los efectos de las condiciones iniciales. La respuesta del

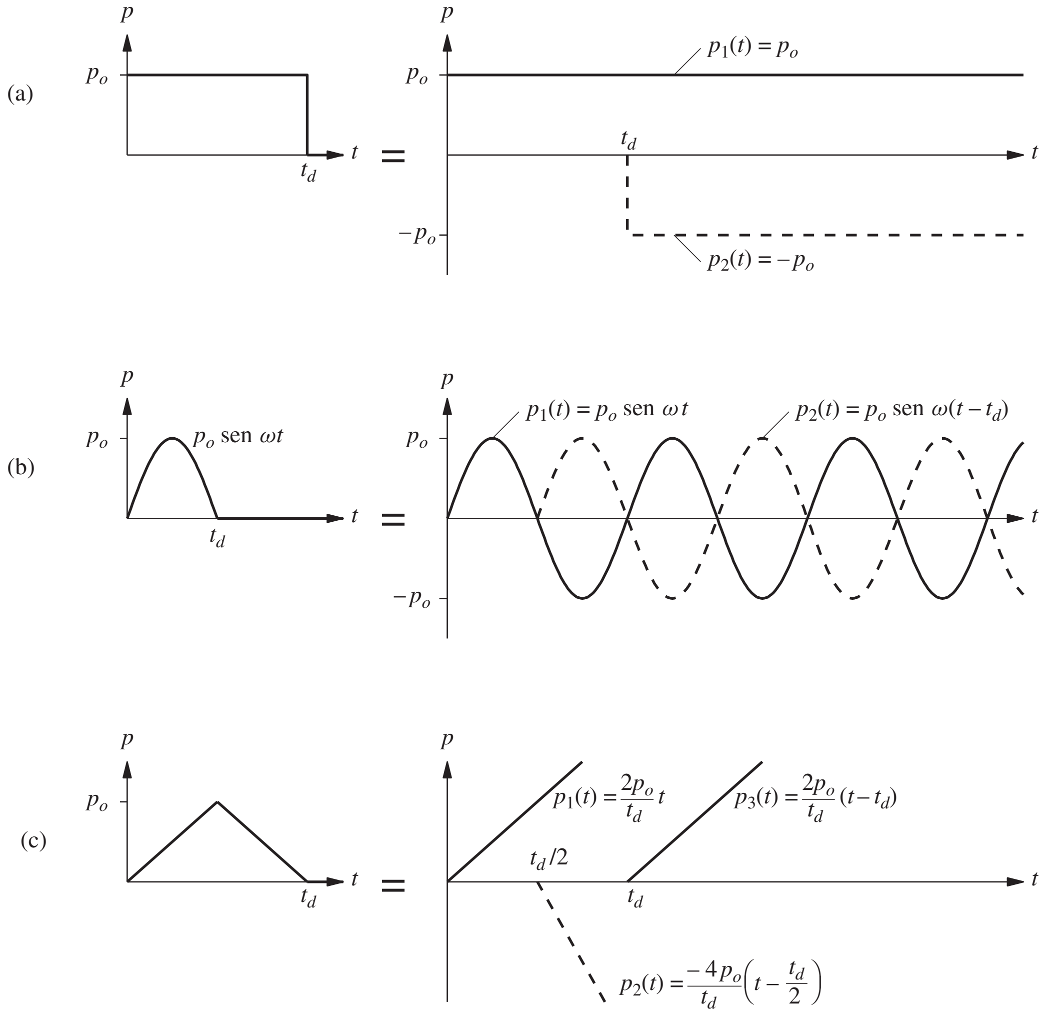


Figura 4.6.2 Expresión de una fuerza de pulso como una superposición de funciones simples: (a) pulso rectangular; (b) pulso sinusoidal de medio ciclo; (c) pulso triangular.

sistema a las excitaciones de pulso puede determinarse mediante alguno de los métodos de análisis: (1) el método clásico para resolver ecuaciones diferenciales, (2) la evaluación de la integral de Duhamel y (3) la expresión del pulso como la superposición de dos o más funciones simples, para las que la soluciones de respuesta ya existen o bien son fáciles de determinar.

El último de estos enfoques se ilustra en la figura 4.6.2 para tres fuerzas de pulso. Por ejemplo, el pulso rectangular es la función escalonada $p_1(t)$ más la función escalonada $p_2(t)$ de la misma amplitud, pero después de que ha pasado un intervalo de tiempo t_d. La respuesta deseada es la suma de las respuestas a cada una de estas funciones escalonadas, y tales respuestas pueden determinarse con facilidad a partir de los resultados de la sección 4.3. Un pulso sinusoidal de medio ciclo es el resultado de sumar una función seno de amplitud p_o que inicia en $t = 0$ [$p_1(t)$ en la figura 4.6.2b] y otra función sinusoidal de la misma

frecuecia y amplitud pero que inicia en $t = t_d$ [$p_2(t)$ en la figura 4.6.2b]. La respuesta deseada es la suma total (estado transitorio más estable) de las respuestas a las dos fuerzas sinusoidales. las cuales se obtienen utilizando los resultados de la sección 3.1. De manera similar, la respuesta al pulso triangular simétrico es la suma de las respuestas a las tres funciones de crecimiento de la figura 4.6.2c; las respuestas individuales provienen de la sección 4.4. Así, el tercer método implica la adaptación y manipulación de resultados existentes para obtener la respuesta deseada.

En la evaluación de la respuesta de los sistemas de 1GDL a las fuerzas de pulso se recomienda el uso del método clásico, puesto que está estrechamente ligado a la dinámica del sistema. Cuando se emplea el método clásico, la respuesta a las fuerzas de pulso se determina en dos fases. La primera es la fase de la vibración forzada, que abarca la duración de la excitación. La segunda es la fase de la vibración libre, que sigue hasta el final de la fuerza de pulso. Gran parte de la presentación trata sobre los sistemas sin amortiguamiento porque, como se muestra en la sección 4.11, el amortiguamiento tiene poca influencia en la respuesta a las excitaciones de pulso.

4.7 FUERZA DE PULSO RECTANGULAR

Se inicia con el tipo de pulso más sencillo, el pulso rectangular mostrado en la figura 4.7.1. La ecuación a resolver es

$$m\ddot{u} + ku = p(t) = \begin{cases} p_o & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} \tag{4.7.1}$$

con las condiciones de reposo iniciales: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$. El análisis se organiza en dos fases.

1. *Fase de vibración forzada*. Durante esta fase, el sistema está sometido a una fuerza escalonada. La respuesta del sistema está dada por la ecuación (4.3.2), que se repite aquí por conveniencia:

$$\frac{u(t)}{(u_{\text{st}})_o} = 1 - \cos \omega_n t = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \qquad t \leq t_d \tag{4.7.2}$$

2. *Fase de vibración libre*. Después de que la fuerza termina en t_d, el sistema experimenta una vibración libre, que se define al modificar en forma adecuada la ecuación (2.1.3):

$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_d) \tag{4.7.3}$$

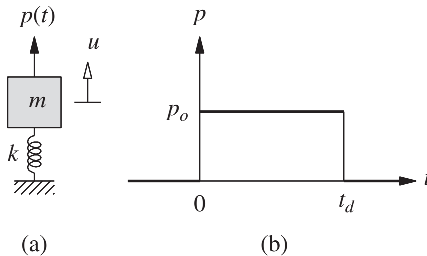


Figura 4.7.1 (a) Sistema de 1GDL; (b) fuerza de pulso rectangular.

Esta vibración libre se inicia mediante el desplazamiento y la velocidad de la masa en el instante $t = t_d$, que se determinan a partir de la ecuación (4.7.2):

$$u(t_d) = (u_{st})_o[1 - \cos \omega_n t_d] \qquad \dot{u}(t_d) = (u_{st})_o \omega_n \operatorname{sen} \omega_n t_d \tag{4.7.4}$$

Si se sustituye esto en la ecuación (4.7.3) resulta

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = (1 - \cos \omega_n t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \operatorname{sen} \omega_n t_d \operatorname{sen} \omega_n (t - t_d) \qquad t \geq t_d$$

que puede simplificarse, utilizando una identidad trigonométrica, como

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \cos \omega_n (t - t_d) - \cos \omega_n t \qquad t \geq t_d$$

La expresión de $\omega_n = 2\pi/T_n$ y el uso de identidades trigonométricas permiten reescribir estas ecuaciones de la forma

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi t_d}{T_n}\right) \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\frac{t_d}{T_n}\right)\right] \qquad t \geq t_d \tag{4.7.5}$$

Historia de la respuesta. La deformación normalizada $u(t)/(u_{st})_o$ dada por las ecuaciones (4.7.2) y (4.7.5) es una función de t/T_n. Ésta depende sólo de t_d/T_n, la relación de la duración del pulso sobre el periodo de vibración natural del sistema, no por separado de t_d o T_n, y se representa mediante gráficas en la figura 4.7.2 para varios valores de t_d/T_n. También se muestra en líneas discontinuas la solución estática $u_{st}(t) = p(t)/k$ debida a $p(t)$ en cada instante de tiempo. Se observa que la naturaleza de la respuesta varía en gran medida tan sólo por el cambio en la duración t_d del pulso. No obstante, sin importar cuán larga sea la duración, la respuesta dinámica no se acerca a la solución estática, debido a que la fuerza se aplica repentinamente.

Mientras la fuerza se aplica a la estructura, el sistema oscila alrededor de la posición desplazada, $(u_{st})_o = p_o/k$, en su propio periodo natural T_n. Después de que el pulso ha terminado, el sistema oscila libremente alrededor de la posición original de equilibrio en su periodo natural T_n, sin decaimiento del movimiento debido a que el sistema no está amorti guado. Si $t_d/T_n = 1, 2, 3, ...$, el sistema permanece todavía en su configuración original no deformada durante la fase de vibración libre, debido a que el desplazamiento y la velocidad de la masa son cero cuando la fuerza termina.

Cada resultado de la respuesta en la figura 4.7.2 es aplicable a todas las combinaciones de sistemas y fuerzas con una razón t_d/T_n fija. Sin embargo, en esta figura está implícita la suposición de que el periodo natural T_n del sistema es constante y que la duración t_d del impulso es variable. Al modificar la escala de tiempo, los resultados pueden presentarse para un valor fijo de t_d y valores variables de T_n.

Respuesta máxima. A continuación, se determina el valor máximo de la respuesta en cada una de las dos fases (vibración forzada y vibración libre) por separado. El mayor de los dos máximos es la respuesta máxima global.

El número de máximos locales o picos que se desarrollan en la fase de vibración forzada depende de t_d/T_n (figura 4.7.2); a medida que la duración del pulso se alarga, se producen más picos. El primer pico se produce en $t_o = T_n/2$ con la deformación

$$u_o = 2(u_{st})_o \tag{4.7.6}$$

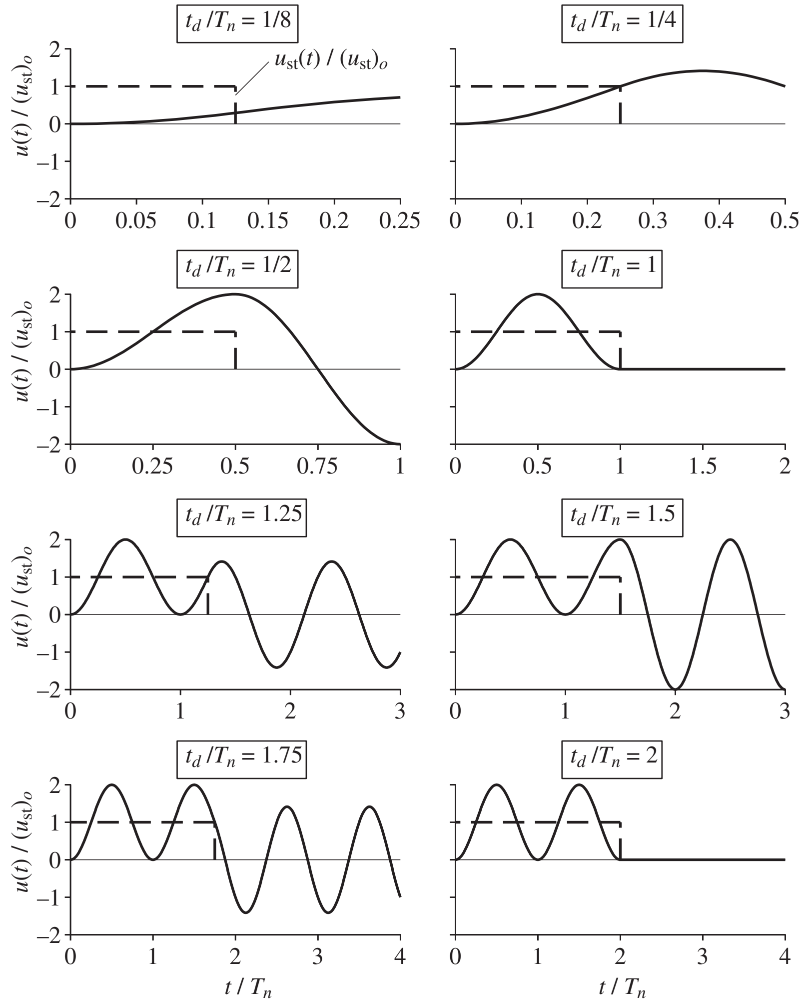


Figura 4.7.2 Respuesta dinámica de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza de pulso rectangular; la solución estática se muestra mediante líneas discontinuas.

que es consistente con los resultados obtenidos en la sección 4.3. Así t_d debe ser más largo que $T_n/2$ para que al menos se desarrolle un pico durante la fase de vibración forzada. Si se desarrolla más de un pico durante esta fase, todos éstos tendrán el mismo valor y se producirán en $t_o = 3T_n/2$, $5T_n/2$, etcétera; lo que, de nuevo, es consistente con los resultados de la sección 4.3.

Como corolario, si t_d es más corto que $T_n/2$, no se desarrollará ningún pico durante la fase de vibración forzada (figura 4.7.2), y la respuesta simplemente se construye desde cero hasta $u(t_d)$. El desplazamiento al final del pulso está dado por la ecuación (4.7.4a), que se reescribe para enfatizar el parámetro t_d/T_n:

$$u(t_d) = (u_{st})_o \left(1 - \cos \frac{2\pi t_d}{T_n}\right) \tag{4.7.7}$$

La deformación máxima en la fase de vibración forzada, ecuaciones (4.7.6) y (4.7.7), puede expresarse en términos del *factor amplificación dinámica de deformación*:

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t_d/T_n) & t_d/T_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 & t_d/T_n \geq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.7.8}$$

En la figura 4.7.3a esta relación se muestra como "respuesta forzada".

En la fase de vibración libre el sistema oscila en un movimiento armónico simple, dado por la ecuación (4.7.3), con una amplitud

$$u_o = \sqrt{[u(t_d)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n}\right]^2} \tag{4.7.9}$$

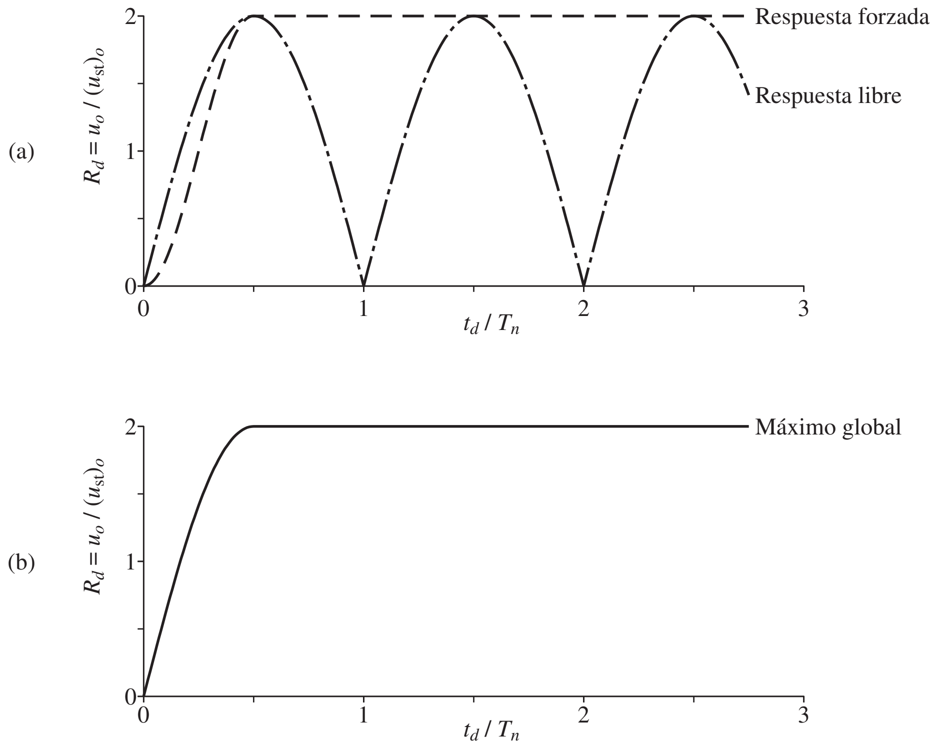


Figura 4.7.3 Respuesta a una fuerza de pulso rectangular: (a) respuesta máxima durante las fases de vibración forzada y vibración libre; (b) espectro de choque.

que después de sustituir la ecuación (4.7.4) y realizar cierta manipulación se convierte en

$$u_o = 2(u_{\text{st}})_o \left| \operatorname{sen} \frac{\pi t_d}{T_n} \right| \tag{4.7.10}$$

El factor de amplificación dinámica

$$R_d \equiv \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = 2 \left| \operatorname{sen} \frac{\pi t_d}{T_n} \right| \tag{4.7.11}$$

depende sólo de t_d/T_n y, en la figura 4.7.3a, se muestra como "respuesta libre".

Una vez determinada la respuesta máxima en las fases de vibración forzada y libre, se determina el máximo global. En la figura 4.7.3a se muestra que si $t_d/T_n > \frac{1}{2}$, el máximo global es el pico (o picos porque todos son iguales) en $u(t)$, mismo que se desarrolla durante la fase de vibración forzada, porque no será superado en la vibración libre; vea la figura 4.7.2 para $t_d/T_n = 1.25$. Esta observación también puede deducirse de los resultados matemáticos: el R_d de la ecuación (4.7.11) para la fase de vibración libre nunca puede superar al $R_d = 2$, ecuación (4.7.8b), para la fase de vibración forzada.

Si $t_d/T_n < \frac{1}{2}$, la figura 4.7.3a muestra que el máximo global es el pico (o picos porque todos son iguales) en $u(t)$, el cual se desarrolla durante la fase de vibración libre. En este caso, la respuesta durante la fase de vibración forzada se construye desde cero en $t = 0$ hasta $u(t_d)$ al final del pulso, ecuación (4.7.7), y $\dot{u}(t_d)$, dado por la ecuación (4.7.4b), es positivo; vea la figura 4.7.2 para $t_d/T_n = \frac{1}{8}$ o $\frac{1}{4}$. Como resultado, el primer pico en vibración libre es mayor que $u(t_d)$.

Por último, si $t_d/T_n = \frac{1}{2}$, la figura 4.7.3a muestra que el máximo global está dado por la respuesta máxima forzada o bien por la respuesta máxima libre porque las dos son iguales. El primer pico se produce justo al final de la fase de vibración forzada (figura 4.7.2), la velocidad $\dot{u}(t_d) = 0$ y los picos en la vibración libre son los mismos que en $u(t_d)$. Esta observación es consistente con las ecuaciones (4.7.8) y (4.7.11), puestos que ambos dan $R_d = 2$ por $t_d/T_n = \frac{1}{2}$.

En resumen, el factor amplificación dinámica de deformación que define la respuesta máxima absoluta es

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} \pi t_d/T_n & t_d/T_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 & t_d/T_n \geq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.7.12}$$

Resulta claro que R_d depende sólo de t_d/T_n, la relación de la duración del pulso sobre el periodo natural del sistema, y no por separado de t_d o T_n. Esta relación se muestra en la figura 4.7.3b.

Tal gráfica, que muestra la deformación máxima de un sistema de 1GDL como una función del periodo natural T_n del sistema (o un parámetro relacionado), se denomina *espectro de respuesta*. Cuando la excitación es un pulso único, también se usa el término *espectro de choque* para el espectro de respuesta. Entonces, en la figura 4.7.3b se presenta el espectro de choque para una fuerza de pulso rectangular. El espectro de choque caracteriza al problema por completo.

La deformación máxima de un sistema de 1GDL no amortiguado, que tiene un periodo natural T_n, debida a una fuerza de pulso rectangular con amplitud p_o y duración t_d puede determinarse con facilidad si se conoce el espectro de choque para esta excitación. En correspondencia con la relación t_d/T_n, el factor de amplificación dinámica de deformación R_d se lee a partir del espectro, y la deformación máxima se calcula a partir de

$$u_o = (u_{\text{st}})_o R_d = \frac{p_o}{k} R_d \tag{4.7.13}$$

El valor máximo de la fuerza estática equivalente (sección 1.8.2) es

$$f_{So} = k u_o = p_o R_d \tag{4.7.14}$$

es decir, la fuerza aplicada p_o multiplicada por el factor de amplificación dinámica de deformación. Como se mencionó en la sección 1.8.2, el análisis estático de la estructura sometida a f_{So} proporciona las fuerzas y los esfuerzos internos.

Ejemplo 4.1

Un edificio de un piso, idealizado como un marco de 12 pies de alto con dos columnas articuladas en la base y una viga rígida, tiene un periodo natural de 0.5 s. Cada columna es una sección de acero de patín ancho, W8 × 18 del estándar estadounidense. Sus propiedades de flexión alrededor de su eje mayor son $I_x = 61.9$ pulg^4, $S = I_x/c = 15.2$ pulg^3, $E = 30{,}000$ ksi. Si se desprecia el amortiguamiento, determine la respuesta máxima de este marco debida a una fuerza de pulso rectangular con amplitud de 4 kips y duración $t_d = 0.2$ s. Las cantidades de respuesta que interesan son el desplazamiento en la parte superior del marco y el esfuerzo de flexión máximo en las columnas.

Solución

1. *Determinar R_d.*

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi t_d}{T_n} = 2 \operatorname{sen}(0.4\pi) = 1.902$$

2. *Determinar la rigidez lateral del marco.*

$$k_{\text{col}} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(30{,}000)61.9}{(12 \times 12)^3} = 1.865 \text{ kips/pulg}$$

$$k = 2 \times 1.865 = 3.73 \text{ kips/pulg}$$

3. *Determinar $(u_{\text{st}})_o$.*

$$(u_{\text{st}})_o = \frac{p_o}{k} = \frac{4}{3.73} = 1.07 \text{ pulg}$$

4. *Determinar la deformación dinámica máxima.*

$$u_o = (u_{\text{st}})_o R_d = (1.07)(1.902) = 2.04 \text{ pulg}$$

5. *Determinar el esfuerzo de flexión*. Los momentos flexionantes que resultan en cada columna se muestran en la figura E4.1c. En la parte superior de la columna, el momento flexionante es más grande y está dado por

$$M = \frac{3EI}{L^2} u_o = \left[\frac{3(30{,}000)61.9}{(12 \times 12)^2}\right] 2.04 = 547.8 \text{ kip-pulg}$$

De manera alternativa, es posible encontrar el momento flexionante a partir de la fuerza estática equivalente:

$$f_{So} = p_o R_d = 4(1.902) = 7.61 \text{ kips}$$

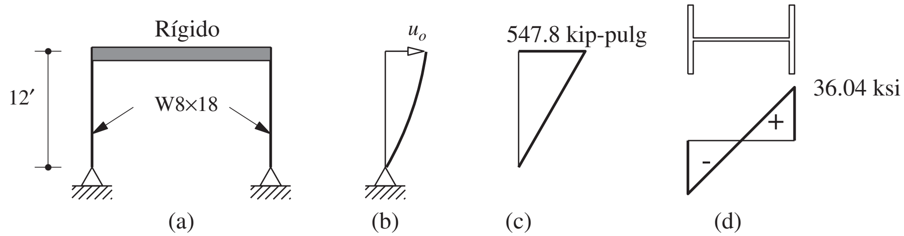


Figura E4.1

Debido a que ambas columnas tienen secciones transversales y longitudes idénticas, la fuerza f_{So} se repartirá por igual. El momento flexionante en la parte superior de la columna es

$$M = \frac{f_{So}}{2} h = \left(\frac{7.61}{2}\right) 12 \times 12 = 547.8 \text{ kip-pulg}$$

El esfuerzo de flexión es mayor en la parte exterior de la parte superior de las columnas:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{547.8}{15.2} = 36.04 \text{ ksi}$$

La distribución del esfuerzo se muestra en la figura E4.1d.

4.8 FUERZA DE PULSO SINUSOIDAL DE MEDIO CICLO

El siguiente pulso a considerar es una fuerza sinusoidal de medio ciclo (figura 4.8.1b). El procedimiento de análisis de la respuesta para este pulso es igual al desarrollado en la sección 4.7 para un pulso rectangular, pero la deducción matemática se vuelve un poco complicada. La solución de la ecuación gobernante

$$m\ddot{u} + ku = p(t) = \begin{cases} p_o \operatorname{sen}(\pi t/t_d) & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} \tag{4.8.1}$$

con condiciones iniciales en reposo, se presenta por separado para (1) $\omega \equiv \pi/t_d \neq \omega_n$ o $t_d/T_n \neq \frac{1}{2}$ y (2) $\omega = \omega_n$ o $t_d/T_n = \frac{1}{2}$. Para cada caso, el análisis se organiza en dos fases: la vibración forzada y la vibración libre.

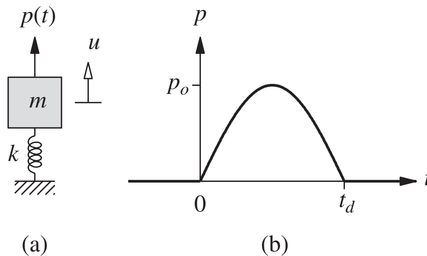


Figura 4.8.1 (a) Sistema de 1GDL; (b) fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo.

Caso 1: $t_d/T_n \neq \frac{1}{2}$

Fase de vibración forzada. La fuerza es igual a la fuerza armónica $p(t) = p_o$ sen ω_t considerado anteriormente con la frecuencia $\omega = \pi/t_d$. La respuesta de un sistema de 1GDL no amortiguado a dicha fuerza está dada por la ecuación (3.1.6b) en términos de ω y ω_n, las frecuencias de excitación y natural. La frecuencia de excitación ω no es la forma más significativa de caracterizar el pulso porque, a diferencia de una fuerza armónica, no es una función periódica. Una mejor caracterización es la duración del pulso t_d, a la cual se dará énfasis aquí. Si se usan las relaciones $\omega = \pi/t_d$ y $\omega_n = 2\pi/T_n$ y se define $(u_{st})_o = p_o/k$, como antes, la ecuación (3.1.6b) se convierte en

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{1}{1-(T_n/2t_d)^2}\left[\text{sen}\left(\pi\frac{t}{t_d}\right) - \frac{T_n}{2t_d}\,\text{sen}\left(2\pi\frac{t}{T_n}\right)\right] \qquad t \le t_d \qquad (4.8.2)$$

Fase de vibración libre. Después de que termina la fuerza de pulso, el sistema vibra libremente con su movimiento descrito por la ecuación (4.7.3). El desplazamiento $u(t_d)$ y la velocidad $\dot{u}(t_d)$ al final del pulso se determinan a partir de la ecuación (4.8.2). Si se sustituye esto en la ecuación (4.7.3), se utilizan identidades trigonométricas y se manipulan las cantidades matemáticas, resulta

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{(T_n/t_d)\cos(\pi t_d/T_n)}{(T_n/2t_d)^2 - 1}\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\frac{t_d}{T_n}\right)\right] \qquad t \ge t_d \qquad (4.8.3)$$

Caso 2: $t_d/T_n = \frac{1}{2}$

Fase de vibración forzada. Ahora, la respuesta forzada está dada por la ecuación (3.1.13b), que se repite aquí por conveniencia:

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\,\frac{2\pi t}{T_n} - \frac{2\pi t}{T_n}\cos\frac{2\pi t}{T_n}\right) \qquad t \le t_d \qquad (4.8.4)$$

Fase de vibración libre. Después de que termina la fuerza de pulso en $t = t_d$, inicia la vibración libre del sistema mediante el desplazamiento $u(t_d)$ y la velocidad $\dot{u}(t_d)$ al final de la fuerza de pulso. Éstos se determinan a partir de la ecuación (4.8.4) y son

$$\frac{u(t_d)}{(u_{st})_o} = \frac{\pi}{2} \qquad \dot{u}(t_d) = 0 \qquad (4.8.5)$$

La segunda ecuación implica que el desplazamiento en la fase de vibración forzada alcanza su máximo al final de la fase. Al sustituir la ecuación (4.8.5) en la ecuación (4.7.3) se obtiene la respuesta del sistema después de que el pulso ha terminado:

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{\pi}{2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\right) \qquad t \ge t_d \qquad (4.8.6)$$

Historia de la respuesta. La variación en el tiempo de la deformación normalizada, $u(t)/(u_{st})_o$, dada por las ecuaciones (4.8.2) y (4.8.3), se representa mediante gráficas en la figura 4.8.2 para varios valores de t_d/T_n. En el caso especial de $t_d/T_n = \frac{1}{2}$, las ecuaciones (4.8.4) y (4.8.6) describen la respuesta del sistema, y éstas también se grafican en la figura 4.8.2. Se observa que la naturaleza de la respuesta varía en gran medida sólo con cambiar la duración t_d del pulso. En la figura 4.8.2, también se grafica $u_{st}(t) = p(t)/k$, la solución

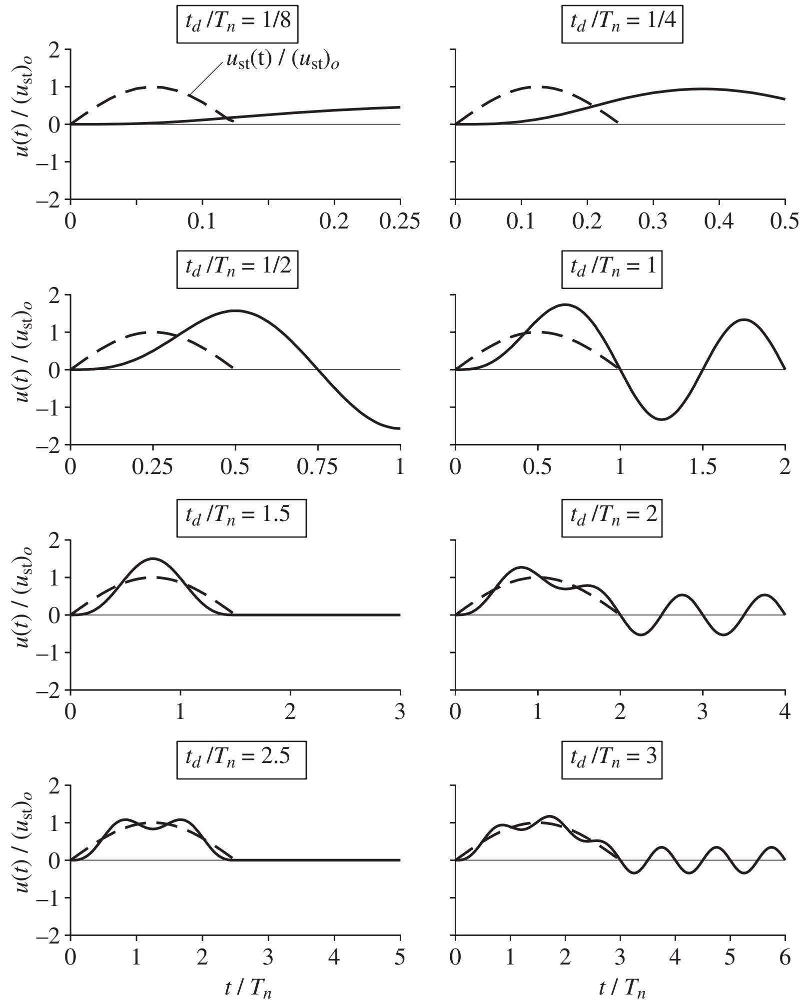


Figura 4.8.2 Respuesta dinámica de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo; la solución estática se muestra mediante líneas discontinuas.

estática. La diferencia entre las dos curvas es una indicación de los efectos dinámicos, que son pequeños para $t_d = 3T_n$, porque esto implica que la fuerza varía lentamente en relación con el periodo natural T_n del sistema.

La respuesta durante la fuerza de pulso contiene a las frecuencias ω y ω_n y es positiva por completo. Después de que termina la fuerza de pulso, el sistema oscila libremente alrededor de su configuración no deformada con una amplitud constante por la falta de amortiguamiento. Si $t_d/T_n = 1.5, 2.5, \ldots$, la masa permanece quieta incluso después de que termina la fuerza de pulso, porque tanto el desplazamiento como la velocidad de la masa son cero cuando esto ocurre.

Respuesta máxima. Al igual que en la sección anterior, los valores máximos de respuesta en cada una de las dos fases, la vibración forzada y la vibración libre, se determinan por separado. El mayor de los dos máximos es la respuesta máxima absoluta.

Durante la fase de vibración forzada, el número de picos o máximos locales que se desarrollan depende de t_d/T_n (figura 4.8.2); a medida que la duración del pulso se alarga, se producen más picos. Los instantes de tiempo t_o en los que ocurren los picos, se determinan al igualar a cero la velocidad asociada con $u(t)$ de la ecuación (4.8.2), lo que conduce a

$$\cos\frac{\pi t_o}{t_d} = \cos\frac{2\pi t_o}{T_n}$$

Esta ecuación se satisface con

$$(t_o)_l = \frac{\mp 2l}{1 \mp 2(t_d/T_n)} t_d \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.8.7}$$

donde los signos negativos (numerador y denominador) se asocian con los mínimos locales y los signos positivos con los máximos locales. Así, los máximos locales se producen en los instantes de tiempo

$$(t_o)_l = \frac{2l}{1 + 2(t_d/T_n)} t_d \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.8.8}$$

Si bien esto proporciona un número infinito de valores $(t_o)_l$, sólo son relevantes aquellos que no exceden t_d. Para $t_d/T_n = 3$, la ecuación (4.8.8) da tres instantes de tiempo relevantes: $t_o = \frac{2}{7}t_d$, $\frac{4}{7}t_d$, y $\frac{6}{7}t_d$; $l = 4$ proporciona $t_o = \frac{8}{7}t_d$, que no es válido porque excede a t_d. Si en la ecuación (4.8.2) se sustituyen los valores $(t_o)_l$ de la ecuación (4.8.8), se obtiene el máximo local u_o, que puede expresarse en términos del factor de amplificación dinámica de deformación:

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{1 - (T_n/2t_d)^2}\left(\text{sen}\,\frac{2\pi l}{1 + 2t_d/T_n} - \frac{T_n}{2t_d}\,\text{sen}\,\frac{2\pi l}{1 + T_n/2t_d}\right) \tag{4.8.9}$$

En la figura 4.8.3a estos valores pico se muestran mediante gráficas como una función de t_d/T_n. Para cada valor de t_d/T_n se realizaron los cálculos descritos con anterioridad y después se repitieron para muchos valores de t_d/T_n. Si $0.5 \le t_d/T_n \le 1.5$, sólo se produce un pico, $l = 1$, durante la fuerza de pulso. Si $t_d/T_n > 1.5$, se desarrolla un segundo pico, pero es más pequeño que el primer pico si $1.5 < t_d/T_n < 2.5$. Si $t_d/T_n > 2.5$, se desarrolla un tercer pico. El segundo pico es más grande que el primero y tercer picos si $2.5 < t_d/T_n < 4.5$. Por lo general, sólo se prestará atención al pico más grande porque es el que controla el diseño del sistema. El espectro de choque para el pico más grande de la respuesta forzada se muestra en la figura 4.8.3b.

Si $t_d/T_n < \frac{1}{2}$, no ocurre ningún pico durante la fase de vibración forzada (figura 4.8.2). Esto se hace evidente al examinar el tiempo del primer pico, ecuación (4.8.8), con $l = 1$:

$$t_o = \frac{2}{1 + 2t_d/T_n} t_d$$

Si este t_o excede a t_d, y lo hace para toda $t_d < T_n/2$, no se desarrolla ningún pico durante la fuerza de pulso; la respuesta se construye desde cero hasta $u(t_d)$, que se obtiene al evaluar la ecuación (4.8.2) en $t = t_d$:

$$\frac{u(t_d)}{(u_{st})_o} = \frac{T_n/2t_d}{(T_n/2t_d)^2 - 1}\,\text{sen}\left(2\pi\frac{t_d}{T_n}\right) \tag{4.8.10}$$

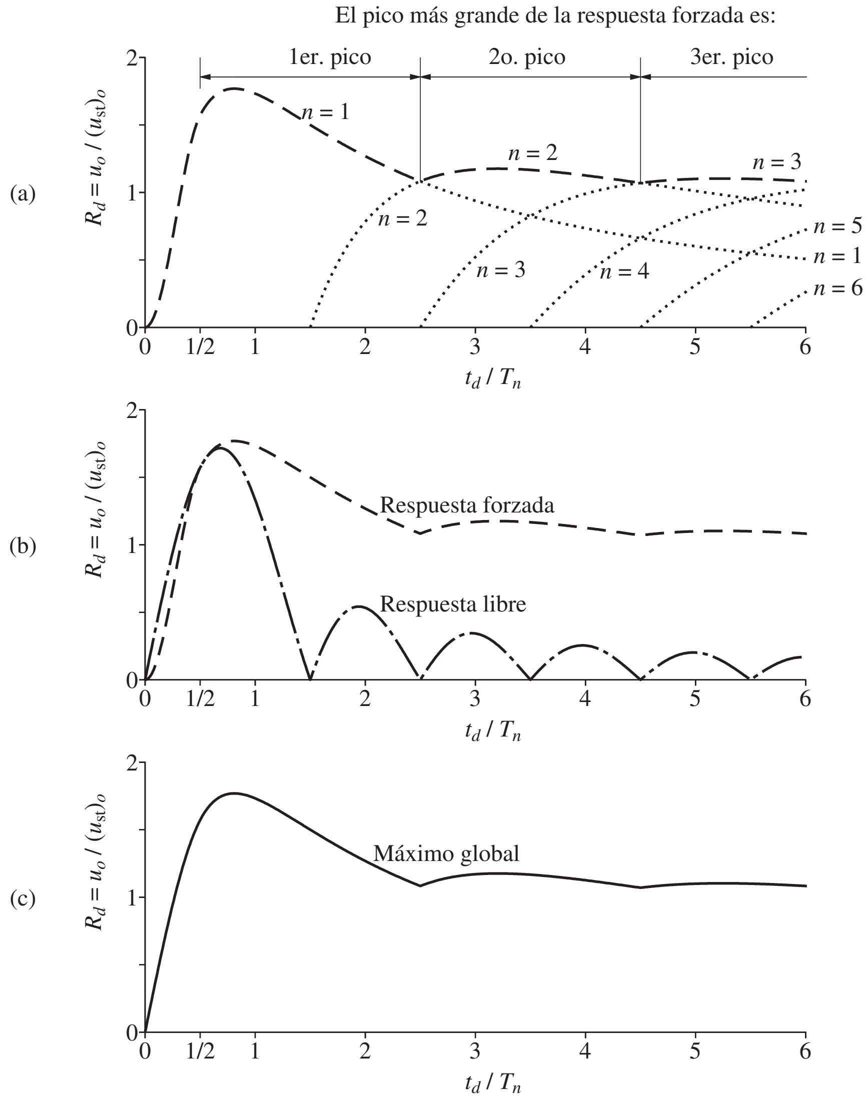


Figura 4.8.3 Respuesta a una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo: (a) respuestas máximas durante la fase de vibración forzada; (b) respuestas máximas durante las fases de vibración forzada y libre; (c) espectro de choque.

Ésta es la respuesta máxima durante la fase de vibración forzada, la cual define el factor de respuesta de deformación en el rango $0 \leq t_d/T_n < \frac{1}{2}$ en la figura 4.8.3a y b.

En la fase de la vibración libre la respuesta de un sistema está dada por la función sinusoidal de la ecuación (4.8.3) y su amplitud es

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{(T_n/t_d)\cos(\pi t_d/T_n)}{(T_n/2t_d)^2 - 1} \tag{4.8.11}$$

Esta ecuación describe la respuesta máxima durante la fase de vibración libre y se representa en la figura 4.8.3b.

Para el caso especial donde $t_d/T_n = \frac{1}{2}$, la respuesta máxima durante las fases de vibración forzada y libre puede determinarse a partir de las ecuaciones (4.8.4) y (4.8.6), respectivamente; los dos máximos son iguales:

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \frac{\pi}{2} \tag{4.8.12}$$

La respuesta máxima global es el mayor de los dos máximos determinados por separado para las fases de vibración forzada y libre. En la figura 4.8.3b se muestra que si $t_d > T_n/2$, el máximo global es el pico más grande que se desarrolla durante la fuerza de pulso. Por otro lado, si $t_d < T_n/2$, el máximo global está dado por la respuesta pico durante la fase de la vibración libre. Para el caso especial de $t_d = T_n/2$, como se ha mencionado anteriormente, los dos máximos individuales son iguales. En la figura 4.8.3c, se grafica la respuesta máxima absoluta contra t_d/T_n; para cada t_d/T_n, ésta es la mayor de las dos gráficas de la figura. 4.8.3b. Éste es el espectro de choque para la fuerza sinusoidal de pulso de medio ciclo. Si está disponible, la deformación máxima y la fuerza estática equivalente pueden determinarse con facilidad utilizando las ecuaciones (4.7.13) y (4.7.14).

4.9 FUERZA DE PULSO TRIANGULAR SIMÉTRICA

Considere ahora un sistema de 1GDL que en un principio está en reposo y que se somete al pulso triangular simétrico mostrado en la figura 4.9.1. La respuesta de un sistema de 1GDL no amortiguado a este pulso puede determinarse mediante cualquiera de los métodos mencionados en la sección 4.6. Por ejemplo, el método clásico podría ser implementado en tres fases distintas: $0 \leq t \leq t_d/2$, $t_d/2 \leq t \leq t_d$, y $t \geq t_d$. Este método se utilizó en los apartados 4.8 y 4.9, porque está estrechamente ligado a la dinámica del sistema, pero aquí se excluye por conveniencia. Tal vez, la forma más fácil de resolver el problema es expresar el pulso triangular como la superposición de las tres funciones crecientes que se muestran en la figura 4.6.2c. La respuesta del sistema a cada una de estas funciones crecientes puede determinarse con facilidad mediante la adaptación adecuada de la ecuación (4.4.2) para reconocer la pendiente y el tiempo de inicio de cada una de las tres funciones crecientes. Estas tres respuestas individuales se suman para obtener la respuesta al pulso triangular simétrico.

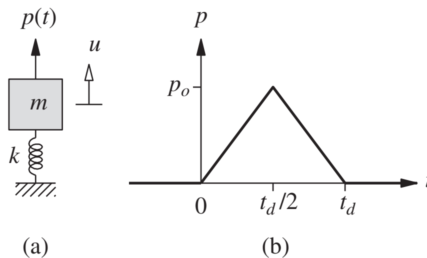


Figura 4.9.1 (a) Sistema de 1GDL; (b) fuerza de pulso triangular.

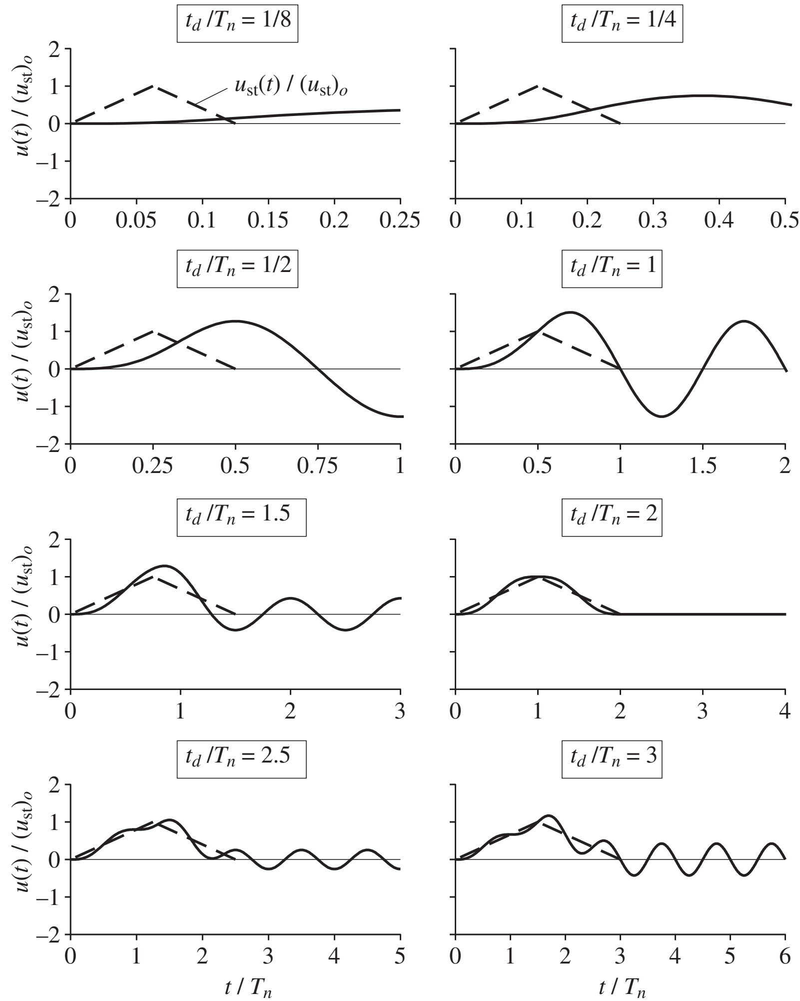


Figura 4.9.2 Respuesta dinámica de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza de pulso triangular; la solución estática se muestra mediante líneas discontinuas.

El resultado final es

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \begin{cases} 2\left(\dfrac{t}{t_d} - \dfrac{T_n}{2\pi t_d}\operatorname{sen} 2\pi\dfrac{t}{T_n}\right) & 0 \le t \le \dfrac{t_d}{2} \quad (4.9.1a) \\ 2\left\{1 - \dfrac{t}{t_d} + \dfrac{T_n}{2\pi t_d}\left[2\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{T_n}\left(t - \dfrac{1}{2}t_d\right) - \operatorname{sen} 2\pi\dfrac{t}{T_n}\right]\right\} & \dfrac{t_d}{2} \le t \le t_d \quad (4.9.1b) \\ 2\left\{\dfrac{T_n}{2\pi t_d}\left[2\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{T_n}\left(t - \dfrac{1}{2}t_d\right) - \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{T_n}(t - t_d) - \operatorname{sen} 2\pi\dfrac{t}{T_n}\right]\right\} & t \ge t_d \quad (4.9.1c) \end{cases}$$

En la figura 4.9.2 se muestra la variación respecto al tiempo de la deformación dinámica normalizada $u(t)/(u_{st})_o$ y de la solución estática $u_{st}(t)/(u_{st})_o$ para varios valores de t_d/T_n. Se observa que los efectos dinámicos disminuyen a medida que la duración t_d del pulso aumenta por encima de $2T_n$. El primer pico se desarrolla justo al final del pulso si $t_d = T_n/2$, durante el pulso si $t_d > T_n/2$, y después del pulso si $t_d < T_n/2$. La respuesta máxima durante la vibración libre (figura 4.9.3a) se obtiene calculando el valor máximo de la ecuación (4.9.1c). La gráfica correspondiente de la respuesta máxima durante la fase de vibración forzada (figura 4.9.3a) se obtuvo buscando el mayor de los máximos locales de la ecuación (4.9.1b), que siempre es más grande que el valor máximo de la ecuación (4.9.1a).

La respuesta máxima absoluta es el mayor de los dos máximos determinados por separado para las fases de vibración forzada y libre. La figura 4.9.3a muestra que si $t_d > T_n/2$, el máximo global es el pico más grande que se desarrolla durante la fuerza de pulso. Por otro lado, si $t_d < T_n/2$, el máximo global es la respuesta pico durante la fase de vibración libre y si $t_d = T_n/2$, las respuestas máximas forzada y libre son iguales. En la figura 4.9.3b se grafica la respuesta máxima global contra t_d/T_n. Éste es el espectro de choque para la fuerza de pulso triangular simétrica.

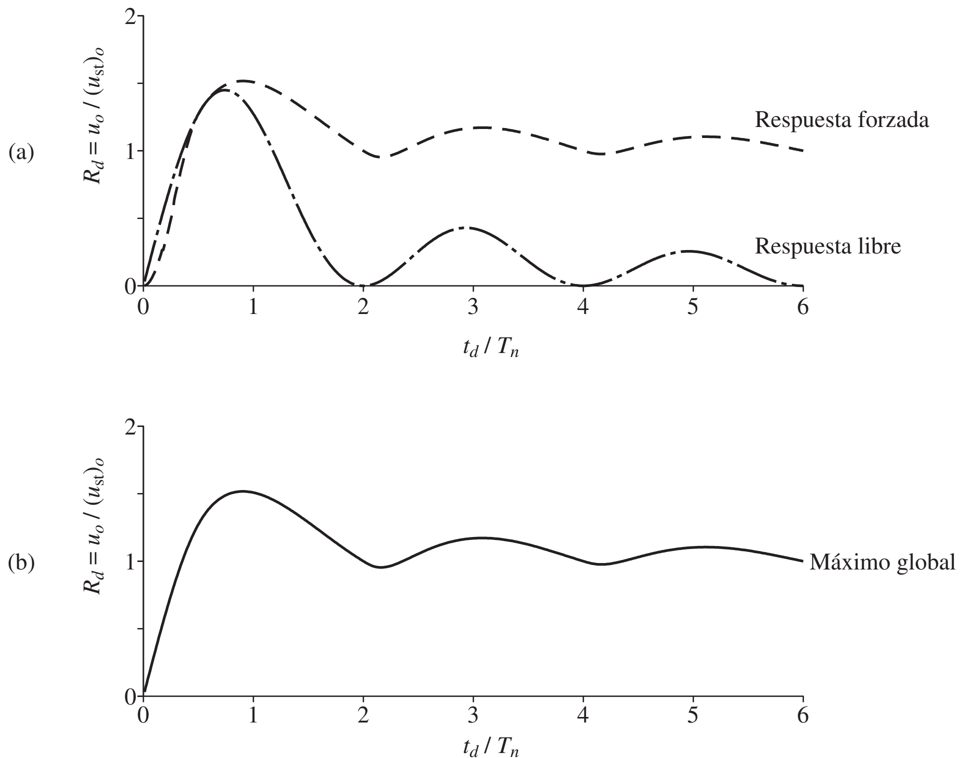


Figura 4.9.3 Respuesta a una fuerza de pulso triangular: (a) respuesta máxima durante las fases de vibración forzada y vibración libre; (b) espectro de choque.

4.10 EFECTOS DE LA FORMA DEL PULSO Y ANÁLISIS APROXIMADO PARA LOS PULSOS CORTOS

Los espectros de choque para los tres pulsos de formas rectangular, medio-ciclo sinusoidal y triangular, cada uno con el mismo valor de fuerza máxima p_o, se presentan juntos en la figura 4.10.1. Como se muestra en las secciones anteriores, si la duración del pulso t_d es más larga que $T_n/2$, la deformación máxima absoluta se produce durante el pulso. En ese caso, la forma del pulso tiene gran importancia. Para valores más grandes de t_d/T_n, este máximo global está influenciado por la rapidez de la carga. El pulso rectangular, en el que la fuerza aumenta repentinamente de cero a p_o, produce la mayor deformación. El pulso triangular en el que el aumento de la fuerza es en un principio el más lento de los tres pulsos, produce la menor deformación. El pulso sinusoidal de medio ciclo, en el que la fuerza se incrementa inicialmente a una tasa intermedia, provoca una deformación que para muchos valores de t_d/T_n es mayor que la respuesta al pulso triangular.

Si la duración del pulso t_d es más corta que $T_n/2$, la respuesta máxima absoluta del sistema se produce durante su fase de vibración libre y está controlada por la integral de tiempo del pulso. Esto puede demostrarse al considerar el caso limitante conforme t_d/T_n se aproxima a cero. A medida que la duración del pulso se vuelve demasiado corta en comparación con el periodo natural del sistema, se convierte en un impulso puro de magnitud

$$\mathcal{I} = \int_0^{t_d} p(t)\, dt \tag{4.10.1}$$

La respuesta del sistema a esta fuerza impulsiva es la respuesta del impulso unitario de la ecuación (4.1.6) multiplicada por $\mathcal{I}$:

$$u(t) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{m\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t\right) \tag{4.10.2}$$

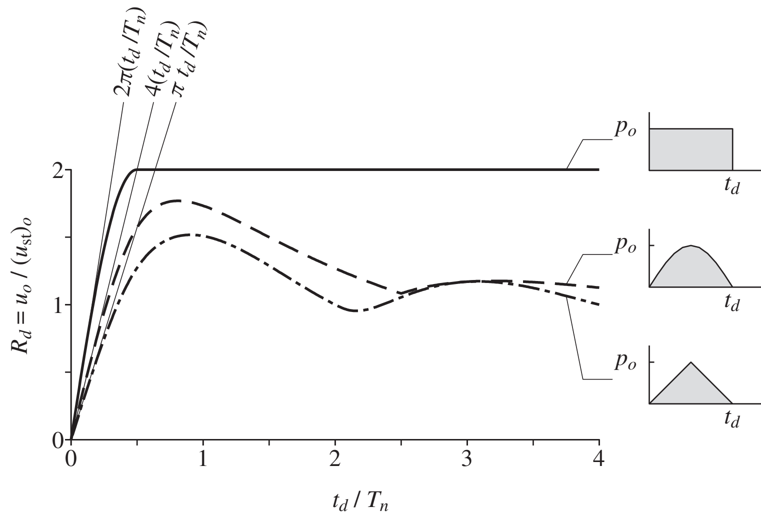


Figura 4.10.1 Espectros de choque para tres pulsos de fuerza de igual amplitud.

La deformación máxima,

$$u_o = \frac{\mathcal{I}}{m\omega_n} = \frac{\mathcal{I}}{k}\frac{2\pi}{T_n} \tag{4.10.3}$$

es proporcional a la magnitud del impulso.

Así, la deformación máxima debida al impulso rectangular de magnitud $\mathcal{I} = p_o t_d$ es

$$\frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = 2\pi\frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.4}$$

que, debido al pulso sinusoidal de medio ciclo con $\mathcal{I} = (2/\pi)p_o t_d$, es

$$\frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = 4\frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.5}$$

y que, debido al pulso triangular de magnitud $\mathcal{I} = p_o t_d/2$, es

$$\frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \pi\frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.6}$$

Estas soluciones de impulso puro, que varían linealmente con t_d/T_n (figura 4.10.1), son exactas si $t_d/T_n = 0$; para todos los demás valores de t_d, proporcionan un límite superior a la deformación máxima verdadera, debido a que el efecto del pulso se sobreestima al suponer que se concentra en $t = 0$ en vez de distribuirse entre 0 y t_d. En el rango $t_d/T_n < \frac{1}{4}$, la solución de impulso puro está cerca de la respuesta exacta. Las dos soluciones difieren cada vez más a medida que t_d/T_n aumenta hasta $\frac{1}{2}$. Para los valores grandes de t_d/T_n, la deformación alcanza su máximo global durante el pulso y la solución de impulso puro no es significativa porque supone que el máximo se produce en la vibración libre.

Las observaciones anteriores sugieren que si la duración del pulso es mucho más corta que el periodo natural, por ejemplo $t_d < T_n/4$, la deformación máxima debe estar controlada por el área del pulso, independientemente de su forma. Esta expectativa se confirma al considerar el pulso rectangular de amplitud $p_o/2$, el pulso triangular de amplitud p_o y el pulso sinusoidal de medio ciclo con amplitud $(\pi/4)p_o$; estos tres pulsos tienen la misma área: $\frac{1}{2}p_o t_d$. Para estos tres pulsos, los espectros de choque, determinados por el escalamiento adecuado de las gráficas de la figura 4.10.1, se presentan en la figura 4.10.2; observe que la cantidad graficada ahora es $u_o \div p_o/k$, donde p_o es la amplitud del pulso triangular, pero no de los otros dos. La ecuación (4.10.3) con $\mathcal{I} = \frac{1}{2}p_o t_d$ da el resultado aproximado

$$\frac{u_o}{p_o/k} = \pi\frac{t_d}{T_n} \tag{4.10.7}$$

que también se muestra en la figura 4.10.2. Es evidente que para $t_d < T_n/4$, la forma del pulso tiene poca influencia en la respuesta y ésta puede determinarse utilizando sólo el área del pulso. Esta conclusión es válida incluso si el pulso tiene una forma complicada.

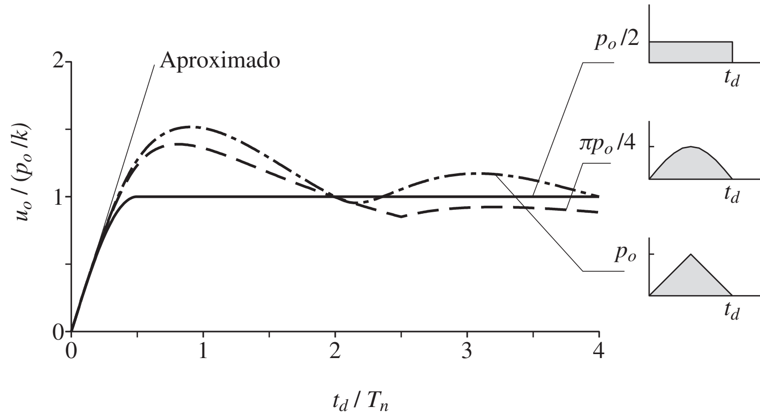


Figura 4.10.2 Espectros de choque para tres pulsos de fuerza de igual área.

Ejemplo 4.2

El tanque lleno de agua del ejemplo 2.7, con 80 pies de altura, se somete a la fuerza $p(t)$ que se muestra en la figura E4.2, causada por una explosión sobre el nivel de la tierra. Determine la fuerza cortante basal máxima y el momento flexionante en la base de la torre que soporta al tanque.

Solución Para este tanque de agua, a partir del ejemplo 2.7, peso $w = 100.03$ kips, $k = 8.2$ kips/pulg, $T_n = 1.12$ s y $\zeta = 1.23\%$. La razón $t_d/T_n = 0.08/1.12 = 0.071$. Como $t_d/T_n < 0.25$, la función excitadora puede entenderse como un impulso puro de magnitud

$$\mathcal{I} = \int_0^{0.08} p(t)\, dt = \frac{0.02}{2}\,[0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0] = 1.2 \text{ kip-seg}$$

donde la integral se calcula por la regla trapezoidal. Si se desprecia el efecto del amortiguamiento, el desplazamiento máximo es

$$u_o = \frac{\mathcal{I}}{k}\frac{2\pi}{T_n} = \frac{(1.2)2\pi}{(8.2)(1.12)} = 0.821 \text{ pulg}$$

La fuerza estática equivalente f_{So} asociada con este desplazamiento es (a partir de la ecuación 1.8.1)

$$f_{So} = ku_o = (8.2)0.821 = 6.73 \text{ kips}$$

Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes que resultan sobre la altura de la torre se muestran en la figura E4.2. La fuerza cortante basal y el momento en la base son $V_b = 6.73$ kips y $M_b = 538$ kips-pie.

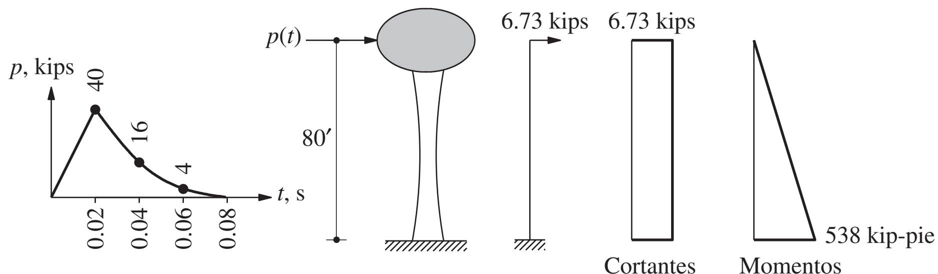


Figura E4.2

4.11 EFECTOS DEL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Si la excitación es un pulso único, el efecto del amortiguamiento en la respuesta máxima no suele ser importante, a menos que el sistema tenga un gran amortiguamiento. Esto contrasta con los resultados del capítulo 3, donde se observa que el amortiguamiento tiene una influencia importante en la respuesta máxima de los sistemas en estado estacionario a la excitación armónica en resonancia o cerca de ella.

Por ejemplo, si la frecuencia de la excitación armónica es igual a la frecuencia natural del sistema, un aumento de diez veces de la fracción de amortiguamiento ζ, de 1% a 10%, resulta en una disminución de diez veces del factor de amplificación dinámica de deformación R_d, de 50 a 5. El amortiguamiento es tan influyente debido a la energía disipada acumulada en varios ciclos de vibración (el número depende de ζ) antes de alcanzar el estado estacionario; vea las figuras 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4.

En contraste, la energía disipada por el amortiguamiento es pequeña en los sistemas que se someten a excitaciones tipo pulso. Considere un sistema amortiguado viscosamente que se

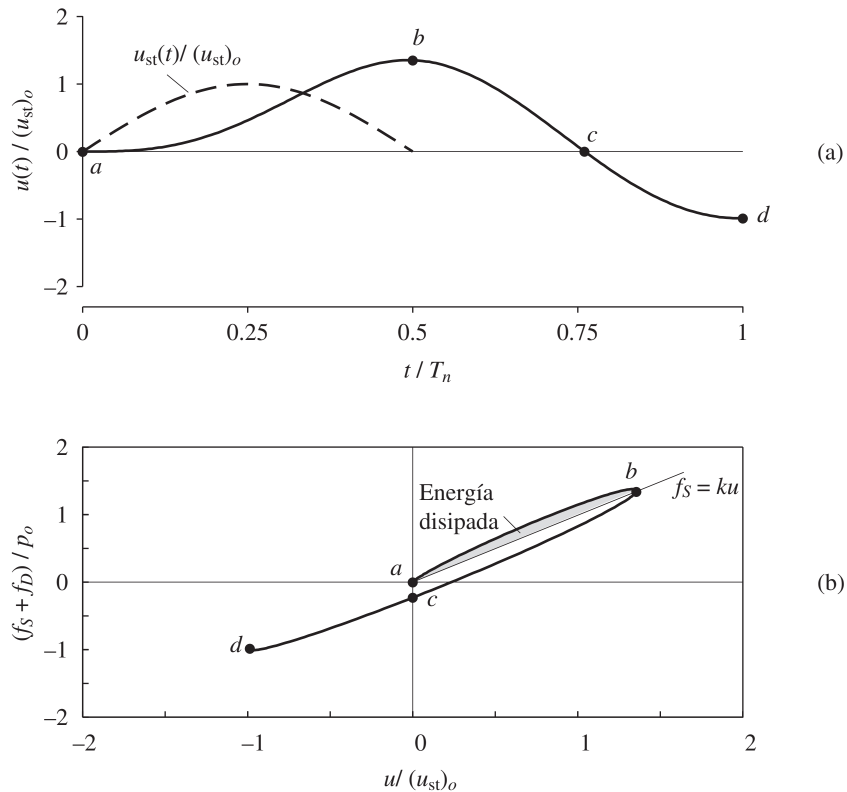


Figura 4.11.1 (a) Respuesta de un sistema amortiguado ($\zeta = 0.1$) a una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo con $t_d/T_n = \frac{1}{2}$; (b) diagrama de fuerza-deformación que muestra la energía disipada en el amortiguamiento viscoso.

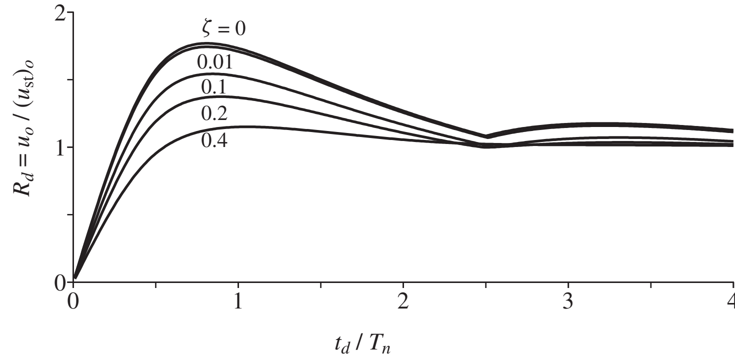


Figura 4.11.2 Espectros de choque para una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo con cinco valores de amortiguamiento.

somete a un pulso sinusoidal de medio ciclo con $t_d/T_n = \frac{1}{2}$ (lo que implica que $\omega = \omega_n$) y $\zeta = 0.1$. La variación de la deformación con el tiempo (figura 4.11.1a) indica que la deformación máxima (punto *b*) se alcanza al final del pulso, antes de la terminación de un ciclo de vibración individual. El diagrama de fuerza-deformación total (elástica más amortiguamiento) de la figura 4.11.1b indica que antes de alcanzar la respuesta máxima, la energía disipada en el amortiguamiento viscoso es sólo la pequeña área sombreada multiplicada por p^2_o/k. Así, se espera que la influencia del amortiguamiento en la respuesta máxima sea pequeña.

Esta predicción se confirma mediante el espectro de choque para el pulso sinusoidal de medio ciclo que se presenta en la figura 4.11.2. Para $\zeta = 0$, este espectro es igual que el espectro de la figura 4.8.3c para sistemas no amortiguados. Con $\zeta \neq 0$ y para cada valor de t_d/T_n, se calculó la respuesta dinámica del sistema amortiguado mediante un procedimiento numérico de tiempo escalonado (capítulo 5) y se determinó la deformación máxima. En el caso en que el sistema se somete a un pulso sinusoidal de medio ciclo de duración $t_d = T_n/2$, un aumento de la fracción de amortiguamiento de 1% a 10%, reduce la deformación máxima en sólo 12%. Así, es posible obtener una estimación conservadora, aunque no excesiva, de la respuesta de muchas estructuras prácticas con amortiguamiento a las excitaciones tipo pulso, si se desprecia el amortiguamiento y se utilizan los resultados anteriores para los sistemas no amortiguados.

4.12 RESPUESTA AL MOVIMIENTO DEL SUELO

El espectro de respuesta que caracteriza la respuesta máxima de los sistemas de 1GDL al movimiento del suelo $\ddot{u}_g(t)$ puede determinarse a partir del espectro de respuesta a la fuerza $p(t)$ aplicada con la misma variación de tiempo que $\ddot{u}_g(t)$. Esto es posible porque, como se muestra en la ecuación (1.7.6), la aceleración del suelo puede sustituirse por la fuerza efectiva, $p_{ef}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$.

El espectro de respuesta a la fuerza aplicada $p(t)$ es una gráfica de $R_d = u_o/(u_{st})_o$, donde $(u_{st})_o = p_o/k$, contra los parámetros adecuados del sistema y la excitación: ω/ω_n para la

excitación armónica y t_d/T_n para la excitación tipo pulso. Si se sustituye p_o por $(p_{\text{ef}})_o$ resulta

$$(u_{\text{st}})_o = \frac{(p_{\text{ef}})_o}{k} = \frac{m\ddot{u}_{go}}{k} = \frac{\ddot{u}_{go}}{\omega_n^2} \tag{4.12.1}$$

donde $\ddot{u}_{go}$ es el valor máximo de $\ddot{u}_g(t)$ y el signo negativo en $p_{\text{ef}}(t)$ se elimina. Así,

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \frac{\omega_n^2 u_o}{\ddot{u}_{go}} \tag{4.12.2}$$

Por lo tanto, los espectros de respuesta presentados en los capítulos 3 y 4 que muestran la respuesta $u_o/(u_{\text{st}})_o$ debida a la fuerza aplicada, también dan la respuesta $\omega_n^2 u_o/\ddot{u}_{go}$ al movimiento del suelo.

Para los sistemas no amortiguados sometidos al movimiento del suelo, las ecuaciones (1.7.4) y (1.7.3) indican que la aceleración total de la masa se relaciona con la deformación a través de $\ddot{u}^t(t) = -w_n^2 u(t)$. Así, los valores máximos de las dos respuestas están relacionados por $\ddot{u}_o^t = \omega_n^2 u_o$. Al sustituir en la ecuación (4.12.2) se obtiene

$$R_d = \frac{\ddot{u}_o^t}{\ddot{u}_{go}} \tag{4.12.3}$$

Así, los espectros de respuesta anteriores que muestran la respuesta $u_o/(u_{\text{st}})_o$ de los sistemas no amortiguados sometidos a una fuerza aplicada, también muestran la respuesta $\ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go}$ al movimiento del suelo.

Como ejemplo, el espectro de respuesta de la figura 4.8.3c para una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo, también da los valores máximos de las respuestas $\omega_n^2 u_o/\ddot{u}_{go}$ y $\ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go}$ debidas a la aceleración del suelo descrita por un pulso sinusoidal de medio ciclo.

Ejemplo 4.3

Considere el modelo de 1GDL de un automóvil, que se describe en el ejemplo 3.4, pasando sobre el tope de velocidad mostrado en la figura E4.3 a la velocidad v. Determine la fuerza máxima desarrollada en el resorte de suspensión y la aceleración vertical máxima de la masa si **(a)** $v = 5$ mph y **(b)** $v = 10$ mph.

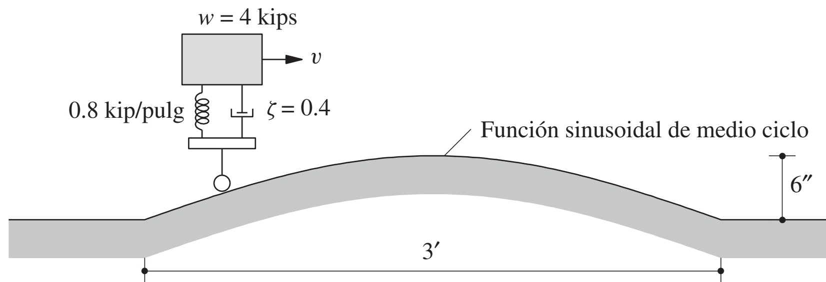


Figura E4.3

Solución

1. *Determinar los parámetros del sistema y de la excitación.*

$$m = \frac{4000}{386} = 10.363 \ \text{lb-s}^2/\text{pulg}$$

$$k = 800 \ \text{lb/pulg}$$

$$\omega_n = 8.786 \ \text{rad/s} \qquad T_n = 0.715 \ \text{s}$$

$$v = 5 \ \text{mph} = 7.333 \ \text{pies/s} \qquad t_d = \frac{3}{7.333} = 0.4091 \ \text{s} \qquad \frac{t_d}{T_n} = 0.572$$

$$v = 10 \ \text{mph} = 14.666 \ \text{pies/s} \qquad t_d = \frac{3}{14.666} = 0.2046 \ \text{s} \qquad \frac{t_d}{T_n} = 0.286$$

El desplazamiento vertical del suelo $u_g(t) = 6 \ \text{sen}(\pi t/t_d)$ para $0 \leq t \leq t_d$ y es cero para $t < 0$ y $t > t_d$. Dos diferenciaciones conducen a una ecuación de la aceleración del suelo: $\ddot{u}_g(t) = -(6\pi^2/t^2_d)\text{sen}(\pi t/t_d)$ más los términos que contienen las funciones delta. Los últimos términos se deben al cambio de inclinación en el perfil del suelo al principio y al final del tope de velocidad (figura E4.3). Como resultado, la aceleración del suelo no es un pulso único (en contraste con el desplazamiento del terreno). Por lo tanto, el método presentado en la sección 4.12 no es aplicable a menos que estos últimos términos se excluyan, una aproximación que puede ser apropiada a velocidades muy bajas. Tal solución aproximada se presenta para ilustrar la aplicación del método. Con esta aproximación, $\ddot{u}_{go} = 6\pi^2/t_d^2$.

2. *Determinar R_d para los valores de t_d/T_n superiores, a partir de la figura 4.11.2.*

$$R_d = \begin{cases} 1.015 & v = 5 \ \text{mph} \\ 0.639 & v = 10 \ \text{mph} \end{cases}$$

Por supuesto, R_d no puede leerse con precisión hasta tres o cuatro dígitos significativos; estos valores se basan en los datos numéricos utilizados en la gráfica de la figura 4.11.2.

3. *Determinar la fuerza máxima, f_{So}.*

$$u_o = \frac{\ddot{u}_{go}}{\omega_n^2} R_d = 1.5 \left(\frac{T_n}{t_d} \right)^2 R_d$$

$$u_o = \begin{cases} 1.5\left(\dfrac{1}{0.572}\right)^2 1.015 = 4.65 \ \text{pulg} & v = 5 \ \text{mph} \\ 1.5\left(\dfrac{1}{0.286}\right)^2 0.639 = 11.7 \ \text{pulg} & v = 10 \ \text{mph} \end{cases}$$

$$f_{So} = ku_o = 0.8u_o = \begin{cases} 3.72 \ \text{kips} & v = 5 \ \text{mph} \\ 9.37 \ \text{kips} & v = 10 \ \text{mph} \end{cases}$$

Observe que la fuerza en la suspensión es mucho mayor a la velocidad más alta. La gran deformación de la suspensión sugiere que puede deformarse más allá de su límite elástico lineal.

4. *Determinar la aceleración máxima, $\ddot{u}^t_o$.* La ecuación (4.12.3) establece una relación entre $\ddot{u}^t_o$ y R_d que es exacta para los sistemas sin amortiguamiento pero es aproximada para los sistemas amortiguados. Estos resultados aproximados pueden obtenerse fácilmente para este problema:

$$\ddot{u}_o^t = \ddot{u}_{go} R_d = \frac{6\pi^2}{t_d^2} R_d$$

$$\ddot{u}_o^t = \begin{cases} \left[\dfrac{6\pi^2}{(0.4091)^2}\right] 1.015 = 359.1 \text{ pulg/s}^2 & v = 5 \text{ mph} \\ \left[\dfrac{6\pi^2}{(0.2046)^2}\right] 0.639 = 903.7 \text{ pulg/s}^2 & v = 10 \text{ mph} \end{cases}$$

Observe que la aceleración de la masa es mucho mayor a la velocidad más alta; de hecho, supera 1g, lo que indica que el modelo de 1GDL se levantaría de la carretera.

A fin de evaluar el error en la solución aproximada para $\ddot{u}_o^t$, se obtuvo una solución numérica de la ecuación de movimiento, la cual proporcionó un valor "exacto" de $\ddot{u}_o^t = 422.7$ pulg/s^2 para $v = 5$ mph.

LECTURAS ADICIONALES

Ayre, R. S., "Transient Response to Step and Pulse Functions", capítulo 8 en *Shock and Vibration Handbook*, 3a. ed. (ed. C. M. Harris), McGraw-Hill, Nueva York, 1988.

Jacobsen, L. S. y Ayre, R. S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1958, capítulos 3 y 4.

PROBLEMAS

Parte A

4.1 Demuestre que la deformación máxima u_o de un sistema de 1GDL debida a una fuerza de pulso unitaria, $p(t) = \delta(t)$, es

$$u_o = \frac{1}{m\omega_n} \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Grafique este resultado como una función de ζ. Comente sobre la influencia del amortiguamiento en la respuesta máxima.

4.2 Considere las respuestas de deformación $g(t)$ de un sistema de 1GDL a una función escalonada unitaria $p(t) = 1$, $t \geq 0$, y $h(t)$ debida a un impulso unitario $p(t) = \delta(t)$. Demuestre que $h(t) = \dot{g}(t)$.

4.3 Un sistema de 1GDL no amortiguado se somete a una fuerza $p(t)$ consistente en una secuencia de dos impulsos, cada uno de magnitud I, como se muestra en la figura P4.3.

(a) Grafique la respuesta de desplazamiento del sistema para $t_d/T_n = \frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y 1. Para cada caso, muestre la respuesta a los impulsos individuales y la respuesta combinada.

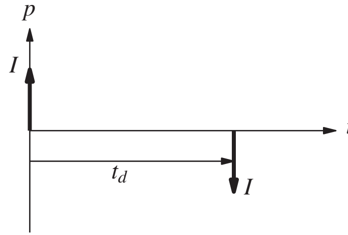


Figura P4.3

(b) Grafique $u_o \div (I/m\omega_n)$ como una función de t_d/T_n. Indique por separado el máximo que ocurre en $t \leq t_d$ y $t \geq t_d$. Tal gráfica se llama espectro de respuesta para esta excitación.

4.4 Repita el problema 4.3 para el caso en que los dos impulsos actúan en la misma dirección.

4.5 **(a)** Demuestre que el movimiento de un sistema no amortiguado que inicia desde el reposo debido a una fuerza p_o aplicada repentinamente, la cual decae en forma exponencial a través del tiempo (figura P4.5), es

$$\frac{u(t)}{(u_{\text{st}})_o} = \frac{1}{1 + a^2/\omega_n^2} \left[\frac{a}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t - \cos \omega_n t + e^{-at} \right]$$

Observe que a tiene las mismas unidades que ω_n.
(b) Grafique este movimiento para los valores seleccionados de $a/\omega_n = 0.01$, 0.1 y 1.0.
(c) Demuestre que la amplitud de estado estacionario es

$$\frac{u_o}{(u_{\text{st}})_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/\omega_n^2}}$$

¿Cuándo se alcanza el movimiento de estado estacionario?

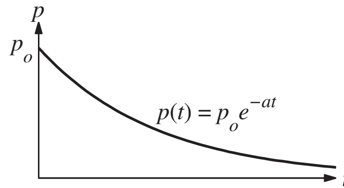


Figura P4.5

4.6 **(a)** Determine el movimiento de un sistema no amortiguado que inicia desde el reposo debido a la fuerza $p(t)$ que se muestra en la figura P4.6; $b > a$.
(b) Grafique el movimiento para $b = 2a$ considerando tres valores de $a/\omega_n = 0.05$, 0.1 y 0.5.

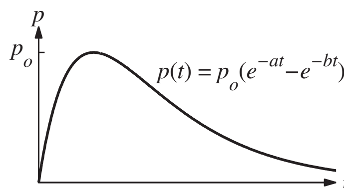


Figura P4.6

Parte B

4.7 Utilice el método clásico para resolver ecuaciones diferenciales, deduzca la ecuación (4.4.2), que describe la respuesta de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza linealmente creciente; las condiciones iniciales son $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

4.8 Un ascensor se idealiza como un peso de masa m soportado por un resorte de rigidez k. Si el extremo superior del resorte empieza a moverse con una velocidad constante v, demuestre que la distancia u^t a la que la masa se ha movido en el tiempo t está regida por la ecuación

$$m\ddot{u}^t + ku^t = kvt$$

Si el ascensor inicia desde el reposo, demuestre que el movimiento es

$$u^t(t) = vt - \frac{v}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t$$

Grafique este resultado.

4.9 **(a)** Determine la respuesta máxima de un sistema amortiguado de 1GDL a una fuerza escalonada.

(b) Grafique la respuesta máxima como una función de la fracción de amortiguamiento.

4.10 La respuesta de deformación de un sistema de 1GDL no amortiguado a una fuerza escalonada que tiene un tiempo de crecimiento finito, está dada por las ecuaciones (4.5.2) y (4.5.4). Deduzca estos resultados utilizando la integral de Duhamel.

4.11 Deduzca las ecuaciones (4.5.2) y (4.5.4) considerando la excitación como la suma de dos funciones crecientes (figura P4.11). Para $t \leq t_r$, $u(t)$ es la solución de la ecuación de movimiento para la primera función creciente. Para $t \geq t_r$, $u(t)$ es la suma de las respuestas a las dos funciones crecientes.

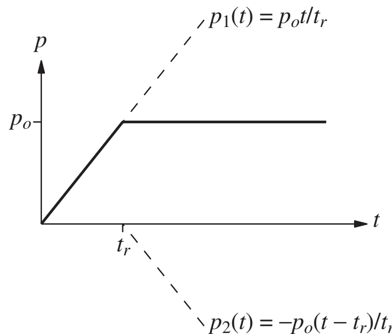


Figura P4.11

4.12 El tanque de agua elevado de la figura P4.12 pesa 100.03 kips cuando está lleno de agua. La torre tiene una rigidez lateral de 8.2 kips/pulg. Si la torre de agua se trata como un sistema de 1GDL, estime el desplazamiento lateral máximo debido a cada una de las dos fuerzas dinámicas mostradas, sin hacer ningún análisis dinámico "exacto". En vez de eso, utilice su comprensión de cómo la respuesta máxima depende de la razón del tiempo de crecimiento sobre la fuerza aplicada, para el periodo de vibración natural del sistema; desprecie el amortiguamiento.

4.13 Un sistema de 1GDL con periodo de vibración natural T_n se somete a una fuerza escalonada alternante (figura P4.13). Observe que $p(t)$ es periódica con periodo T_n.

(a) Determine el desplazamiento como una función del tiempo; las condiciones iniciales son $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

(b) Grafique la respuesta.

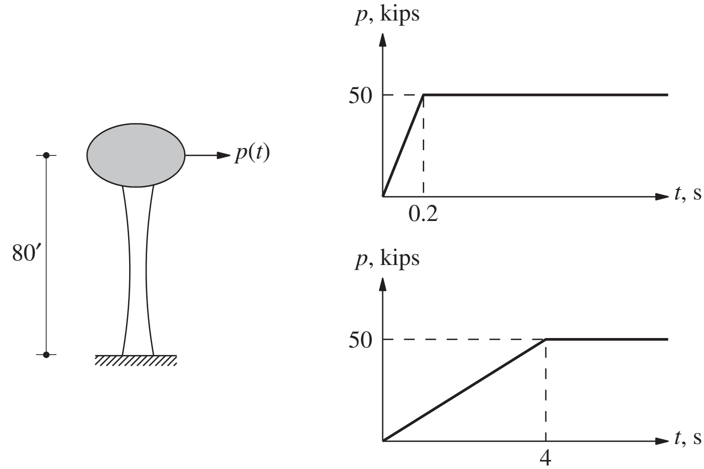


Figura P4.12

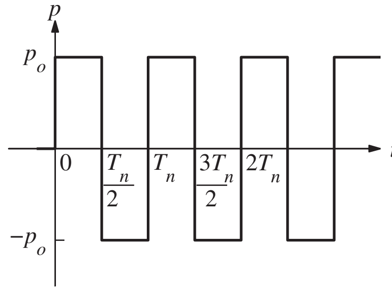


Figura P4.13

(c) Demuestre que los picos de desplazamiento están dados por $u_n/(u_{st})_o = (-1)^{n-1}2n$, donde n es el número de medios ciclos de $p(t)$.

Parte C

4.14 Determine la respuesta de un sistema no amortiguado a una fuerza de pulso rectangular con amplitud p_o y duración t_d, considerando el pulso como la superposición de dos excitaciones escalonadas (figura 4.6.2).

4.15 Use la integral de Duhamel para determinar la respuesta de un sistema no amortiguado a una fuerza de pulso rectangular con amplitud p_o y duración t_d.

4.16 Determine la respuesta de un sistema no amortiguado a una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo con amplitud p_o y duración t_d, considerando el pulso como la superposición de dos excitaciones sinusoidales (figura 4.6.2); $t_d/T_n \neq \frac{1}{2}$.

4.17 El edificio de un piso del ejemplo 4.1 se modifica de modo que las columnas están fijas en la base en vez de articuladas. Para la misma excitación, determine el desplazamiento máximo en la parte superior del marco y el esfuerzo flexionante máximo en las columnas. Comente acerca del efecto de la fijación en la base.

4.18 Determine la respuesta máxima del marco del ejemplo 4.1 a una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo con amplitud $p_o = 5$ kips y duración $t_d = 0.25$ s. Las cantidades de respuesta de interés son: el desplazamiento en la parte superior del marco y el esfuerzo flexionante máximo en las columnas.

4.19 Un sistema de 1GDL no amortiguado se somete a una fuerza de pulso sinusoidal de ciclo completo (figura P4.19).

(a) Deduzca las ecuaciones que describen $u(t)$ durante las fases de vibración forzada y libre.

(b) Grafique la respuesta $u(t)/(u_{st})_o$ contra t/T_n para varios valores de t_d/T_n; en las mismas gráficas, muestre la respuesta estática $u_{st}(t)/(u_{st})_o$.

(c) Determine la respuesta pico u_o, definida como el máximo de los valores absolutos de $u(t)$, durante (i) la fase de vibración forzada y (ii) la fase de vibración libre.

(d) Grafique $R_d = u_o/(u_{st})_o$ para cada una de las dos fases en función de t_d/T_n.

(e) Grafique el espectro de choque.

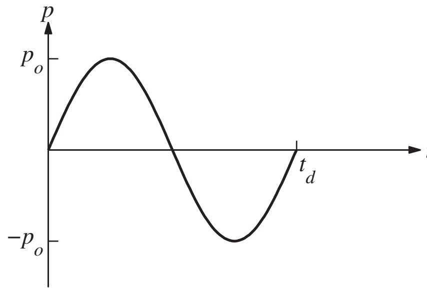


Figura P4.19

4.20 Deduzca las ecuaciones (4.9.1) para la respuesta de desplazamiento de un sistema de 1GDL no amortiguado a un pulso triangular simétrico, considerando al pulso como la superposición de tres funciones crecientes (figura 4.6.2).

4.21 Un sistema no amortiguado se somete al pulso triangular de la figura P4.21.

(a) Demuestre que la respuesta de desplazamiento es

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \begin{cases} \dfrac{t}{t_d} - \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{T_n}{t_d}\right) \operatorname{sen} \dfrac{2\pi t}{T_n} & 0 \leq t \leq t_d \\[2ex] \cos \dfrac{2\pi}{T_n}(t - t_d) + \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{T_n}{t_d}\right) \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{T_n}(t - t_d) - \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{T_n}{t_d}\right) \operatorname{sen} \dfrac{2\pi t}{T_n} & t \geq t_d \end{cases}$$

Grafique la respuesta para los dos valores de $t_d/T_n = \frac{1}{2}$ y 2.

(b) Deduzca las ecuaciones para el factor de amplificación dinámica de deformación R_d durante (i) la fase de vibración forzada y (ii) la fase de vibración libre.

(c) Grafique R_d para las dos fases contra t_d/T_n. También grafique el espectro de choque.

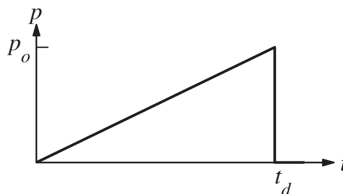


Figura P4.21

4.22 Deduzca las ecuaciones para la deformación $u(t)$ de un sistema de 1GDL no amortiguado debida a la fuerza $p(t)$ que se muestra en la figura P4.22, para cada uno de los intervalos de tiempo siguientes: $t \leq t_1$, $t_1 \leq t \leq 2t_1$, $2t_1 \leq t \leq 3t_1$ y $t \geq 3t_1$.

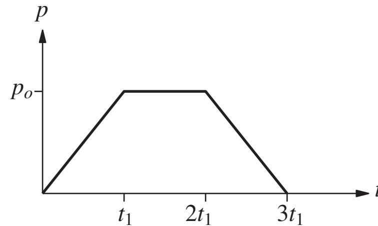


Figura P4.22

4.23 Un sistema de 1GDL se somete a la fuerza mostrada en la figura P4.22. Determine la respuesta máxima durante la vibración libre del sistema y el instante de tiempo en que se produce el primer pico.

4.24 A fin de determinar la respuesta máxima de un sistema de 1GDL no amortiguado a la fuerza de la figura P4.22, para un determinado valor de t_d/T_n, donde $t_d = 3t_1$; es necesario identificar el intervalo de tiempo entre los cuatro rangos mencionados en el problema 4.22, durante el cual ocurrirá la respuesta máxima global, para después encontrar el valor de ese máximo. Tales análisis tendrían que repetirse para muchos valores de t_d/T_n a fin de determinar el espectro de choque completo. Obviamente esto requiere mucho tiempo, pero es necesario si se desea determinar el espectro de choque completo. Sin embargo, el espectro para valores pequeños de t_d/T_n puede determinarse si se trata la fuerza como un impulso. Determine el espectro de choque por medio de este enfoque y grafíquelo. ¿Cuál es el error de este resultado aproximado para $t_d/T_n = \frac{1}{4}$?

4.25 **(a)** Determine la respuesta de un sistema de 1GDL no amortiguado a la fuerza que se muestra en la figura P4.25, para cada uno de los intervalos de tiempo siguientes: (i) $0 \leq t \leq t_d/2$, (ii) $t_d/2 \leq t \leq t_d$ y (iii) $t \geq t_d$. Suponga que $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

(b) Determine la respuesta máxima u_o durante la vibración libre del sistema. Grafique el factor de amplificación dinámica de deformación $R_d = u_o/(u_{st})_o$ como una función de t_d/T_n en el rango $0 \leq t_d/T_n \leq 4$.

(c) Si $t_d \ll T_n$, ¿la respuesta máxima puede determinarse tratando a la fuerza aplicada como un impulso puro? Fundamente su respuesta.

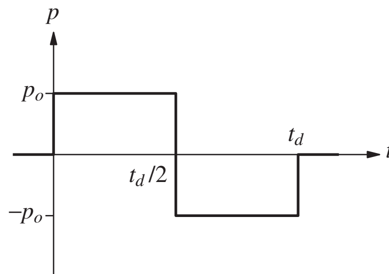


Figura P4.25

4.26 El tanque de agua con 80 pies de altura de los ejemplos 2.6 y 2.7 se somete a la fuerza $p(t)$ mostrada en la figura E4.2a. En el ejemplo 4.2 se determinó la respuesta máxima de la estructura con el depósito lleno (peso = 100.03 kips).

(a) Si el tanque está vacío (peso = 20.03 kips), calcule la fuerza cortante basal y el momento flexionante en la base de la torre que soporta al tanque.

(b) Compare estos resultados con los obtenidos para el depósito lleno (ejemplo 4.2) y comente acerca del efecto que tiene la masa sobre la respuesta a las fuerzas impulsivas. Explique su razonamiento.

5

Evaluación numérica de la respuesta dinámica

AVANCE

Por lo general, la solución analítica de la ecuación de movimiento para un sistema de un solo grado de libertad no es posible si la excitación [fuerza $p(t)$ o aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$] varía arbitrariamente con el tiempo o si el sistema no es lineal. Tales problemas pueden abordarse mediante métodos numéricos paso a paso en el tiempo para la integración de ecuaciones diferenciales. Existe una gran cantidad de información, incluyendo los capítulos más importantes de varios libros, sobre estos métodos para resolver distintos tipos de ecuaciones diferenciales que se presentan en el área general de la mecánica aplicada. Esta información incluye el desarrollo matemático de estos métodos, su precisión, su convergencia y sus propiedades de estabilidad, así como sus aplicaciones computacionales.

Aquí se incluye sólo una breve presentación de algunos métodos que son muy útiles en el análisis de la respuesta dinámica de los sistemas de 1GDL. Esta presentación tiene por objeto proporcionar sólo los conceptos básicos que sustentan a estos métodos y presentar unos cuantos algoritmos computacionales. Aunque esto sea suficiente para muchos problemas prácticos y aplicaciones de investigación, el lector debe reconocer que existe una gran cantidad de estudios sobre este tema.

5.1 MÉTODOS PASO A PASO EN EL TIEMPO

Para un sistema inelástico, la ecuación de movimiento que debe resolverse de manera numérica es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u) = p(t) \qquad \text{o} \qquad -m\ddot{u}_g(t) \tag{5.1.1}$$

sometida a las condiciones iniciales

$$u_0 = u(0) \qquad \dot{u}_0 = \dot{u}(0)$$

Se supone que el sistema tiene un amortiguamiento viscoso lineal, pero podrían considerarse otras formas de amortiguamiento, incluyendo el amortiguamiento no lineal, como será evidente más adelante. Sin embargo, esto se hace muy pocas veces debido a la falta de información sobre el amortiguamiento, especialmente para grandes amplitudes del movimientos. La fuerza aplicada $p(t)$ está dada por un conjunto de valores discretos $p_i = p(t_i)$, $i = 0$ a N (figura 5.1.1). El intervalo de tiempo

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \tag{5.1.2}$$

suele tomarse como constante, aunque esto no es necesario. La respuesta se determina en los instantes de tiempo discretos t_i, indicados como el tiempo i; el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del sistema de 1GDL son u_i, $\dot{u}_i$ y $\ddot{u}_i$, respectivamente. Estos valores, que se suponen conocidos, satisfacen la ecuación (5.1.1) en el instante i:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_S)_i = p_i \tag{5.1.3}$$

donde $(f_S)_i$ es la fuerza restauradora en el momento i; $(f_S)_i = ku_i$ para un sistema elástico lineal, pero si el sistema fuera no lineal, dependería de la historia previa del desplazamiento y de la velocidad en el instante i. Los procedimientos numéricos que se presentarán permiten determinar las cantidades de respuesta u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$ en el instante $i + 1$, que

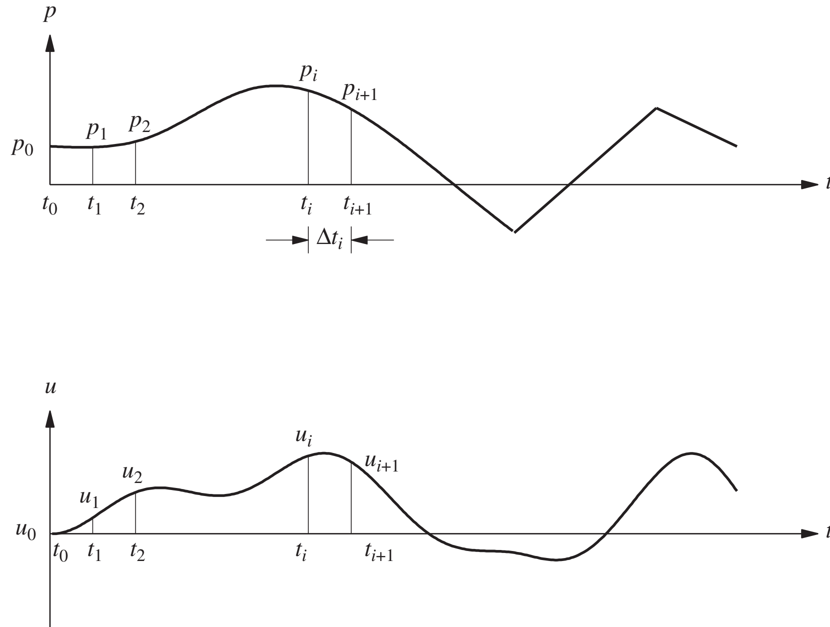


Figura 5.1.1 Notación para los métodos de paso a paso en el tiempo.

satisfacen la ecuación (5.1.1) en el tiempo $i + 1$:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_S)_{i+1} = p_{i+1} \tag{5.1.4}$$

Cuando se aplica sucesivamente con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, el procedimiento paso a paso en el tiempo proporciona la respuesta deseada en todos los instantes de tiempo $i = 1, 2, 3, \ldots$ Las condiciones iniciales conocidas, $u_0 = u(0)$ y $\dot{u}_0 = \dot{u}(0)$, proporcionan la información necesaria para iniciar el proceso.

La realización de un paso de tiempo desde i hasta $i + 1$ no suele ser un procedimiento exacto. Existen muchos procedimientos posibles que se implementan de forma numérica. Los tres requisitos importantes para un procedimiento numérico son (1) la convergencia (a medida que disminuye el paso de tiempo, la solución numérica debe acercarse a la solución exacta), (2) la estabilidad (la solución numérica debe ser estable en la presencia de errores numéricos de redondeo), y (3) la precisión (el procedimiento numérico debe proporcionar resultados que estén lo suficientemente cerca a la solución exacta). Estos aspectos importantes se discuten brevemente en el presente libro; existen tratamientos completos disponibles en otros textos que destacan la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se presentan tres tipos de procedimientos paso a paso en el tiempo: (1) los métodos basados en la interpolación de la función de excitación, (2) los métodos basados en expresiones de diferencias finitas de la velocidad y la aceleración, y (3) los métodos basados en la variación supuesta de la aceleración. Para las dos primeras categorías se presenta un solo método, mientras que para el tercer grupo se estudian dos.

5.2 MÉTODOS BASADOS EN LA INTERPOLACIÓN DE LA EXCITACIÓN

En el caso de los sistemas lineales es posible desarrollar un procedimiento numérico muy eficiente mediante la interpolación de la excitación en cada intervalo de tiempo y el desarrollo de la solución exacta usando los métodos del capítulo 4. Si los intervalos de tiempo son cortos, la interpolación lineal es satisfactoria. En la figura 5.2.1 se muestra que durante el intervalo de tiempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, la función de excitación está dada por

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau \tag{5.2.1a}$$

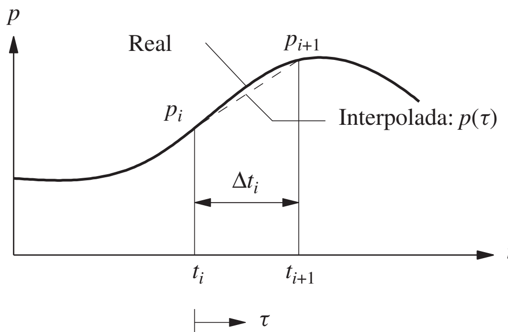


Figura 5.2.1 Notación para una excitación interpolada linealmente.

donde

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \tag{5.2.1b}$$

y la variable de tiempo τ varía de 0 a Δt_i. Por simplicidad algebraica, se consideran primero los sistemas sin amortiguamiento; más tarde, el procedimiento se ampliará para incluir este parámetro. La ecuación a resolver es

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\tau \tag{5.2.2}$$

sometida a las condiciones iniciales $u(0) = u_i$ y $\dot{u}(0) = \dot{u}_i$. La respuesta $u(\tau)$ durante el intervalo de tiempo $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$ es la suma de tres partes: (1) la vibración libre debida al desplazamiento inicial u_i y la velocidad $\dot{u}_i$ en $\tau = 0$, (2) la respuesta a la fuerza de paso p_i con condiciones iniciales nulas y (3) la respuesta a la fuerza incremental $(\Delta p_i/\Delta t_i)\tau$ con condiciones iniciales nulas. Al adaptar las soluciones disponibles para estos tres casos en los puntos 2.1, 4.3 y 4.4, respectivamente, se obtiene

$$u(\tau) = u_i \cos\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\operatorname{sen}\omega_n\tau + \frac{p_i}{k}(1 - \cos\omega_n\tau) + \frac{\Delta p_i}{k}\left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\operatorname{sen}\omega_n\tau}{\omega_n\ \Delta t_i}\right) \tag{5.2.3a}$$

y la diferenciación de $u(\tau)$ conduce a

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} = -u_i \operatorname{sen}\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos\omega_n\tau + \frac{p_i}{k}\operatorname{sen}\omega_n\tau + \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n\,\Delta t_i}(1 - \cos\omega_n\tau) \tag{5.2.3b}$$

Si se evalúan estas ecuaciones en $\tau = \Delta t_i$, se obtiene el desplazamiento u_{i+1} y velocidad $\dot{u}_{i+1}$ en el instante $i + 1$:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i \cos(\omega_n\,\Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\operatorname{sen}(\omega_n\,\Delta t_i) \\ &\quad + \frac{p_i}{k}[1 - \cos(\omega_n\,\Delta t_i)] + \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n\,\Delta t_i}[\omega_n\,\Delta t_i - \operatorname{sen}(\omega_n\,\Delta t_i)] \end{aligned} \tag{5.2.4a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{i+1}}{\omega_n} &= -u_i \operatorname{sen}(\omega_n\,\Delta t_i) + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos(\omega_n\,\Delta t_i) \\ &\quad + \frac{p_i}{k}\operatorname{sen}(\omega_n\,\Delta t_i) + \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n\,\Delta t_i}[1 - \cos(\omega_n\,\Delta t_i)] \end{aligned} \tag{5.2.4b}$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse después de sustituir la ecuación (5.2.1b) como fórmulas de recurrencia:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \tag{5.2.5a}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \tag{5.2.5b}$$

Al repetir la deducción anterior para los sistemas amortiguados por debajo del nivel crítico (es decir, $\zeta < 1$), se observa que las ecuaciones (5.2.5) también son aplicables a los sistemas amortiguados con las expresiones para los coeficientes $A, B, \ldots, D'$ dadas en la tabla 5.2.1. Los coeficientes dependen de los parámetros del sistema ω_n, k y ζ, y del intervalo de tiempo $\Delta t \equiv \Delta t_i$.

Como las fórmulas de recurrencia provienen de la solución exacta de la ecuación de movimiento, la única restricción en el tamaño del paso de tiempo Δt es que permita una aproximación cercana a la función de excitación y que proporcione resultados de respuesta en intervalos de tiempo lo suficientemente cercanos de manera que no se pierdan los picos de

TABLA 5.2.1 COEFICIENTES EN LAS FÓRMULAS DE RECURRENCIA ($\zeta < 1$)

$$A = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right)$$

$$B = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\operatorname{sen}\omega_D \Delta t - \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t}\right)\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{2\zeta^2 - 1}{\omega_D \Delta t}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t + \frac{2\zeta}{\omega_n \Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

$$A' = -e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\cos\omega_D \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t\right)$$

$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left[\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\operatorname{sen}\omega_D \Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D \Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\,\Delta t}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n \Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_D \Delta t + \cos\omega_D \Delta t\right)\right]$$

la respuesta. Este procedimiento numérico es de gran utilidad cuando la excitación se define en intervalos de tiempo espaciados de tal forma (como en la aceleración del suelo en un sismo) que la interpolación lineal es en esencia perfecta. Si el paso de tiempo Δt es constante, los coeficientes $A, B, \ldots, D'$ necesitan calcularse sólo una vez.

La solución exacta de la ecuación de movimiento necesaria en este procedimiento numérico es factible sólo para los sistemas lineales. Está convenientemente desarrollada para los sistemas de 1GDL, como se mostró con anterioridad, pero no sería práctica para los sistemas de VGDL a menos que su respuesta se obtenga mediante la superposición de respuestas modales (capítulos 12 y 13).

Ejemplo 5.1

Un sistema de 1GDL tiene las propiedades siguientes: $m = 0.2533$ kip-s^2/pulg, $k = 10$ kips/pulg, $T_n = 1$ s ($\omega_n = 6.283$ rad/s) y $\zeta = 0.05$. Determine la respuesta $u(t)$ de este sistema para la $p(t)$ definida por la fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo que se muestra en la figura E5.1, (**a**) mediante la interpolación lineal por partes de $p(t)$ con $\Delta t = 0.1$ s y (**b**) mediante la evaluación de la solución teórica.

Solución

1. *Cálculos iniciales*

$$e^{-\zeta\omega_n \Delta t} = 0.9691 \qquad \omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 6.275$$

$$\operatorname{sen}\omega_D \Delta t = 0.5871 \qquad \cos\omega_D \Delta t = 0.8095$$

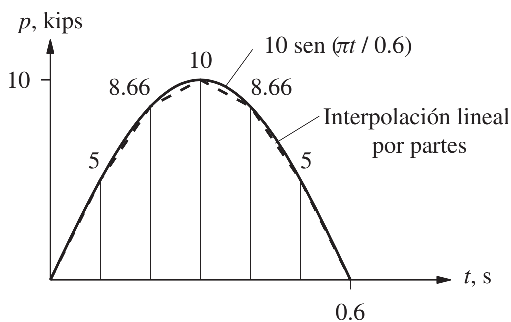


Figura E5.1

Si se sustituye esto en la tabla 5.2.1, resulta

$$A = 0.8129 \qquad B = 0.09067 \qquad C = 0.01236 \qquad D = 0.006352$$

$$A' = -3.5795 \qquad B' = 0.7559 \qquad C' = 0.1709 \qquad D' = 0.1871$$

2. *Aplicar las ecuaciones de recurrencia (5.2.5).* Los cálculos resultantes se resumen en las tablas E5.1a y E5.1b.

TABLA E5.1a SOLUCIÓN NUMÉRICA USANDO LA INTERPOLACIÓN LINEAL DE LA EXCITACIÓN

t_i	p_i	Cp_i	Dp_{i+1}	$B\dot{u}_i$	$\dot{u}_i$	Au_i	u_i	u_i teórica
0.0	0.0000	0.0000	0.0318	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.0618	0.0550	0.0848	0.9354	0.0258	0.0318	0.0328
0.2	8.6602	0.1070	0.0635	0.2782	3.0679	0.1849	0.2274	0.2332
0.3	10.0000	0.1236	0.0550	0.4403	4.8558	0.5150	0.6336	0.6487
0.4	8.6603	0.1070	0.0318	0.4290	4.7318	0.9218	1.1339	1.1605
0.5	5.0000	0.0618	0.0000	0.1753	1.9336	1.2109	1.4896	1.5241
0.6	0.0000	0.0000	0.0000	−0.2735	−3.0159	1.1771	1.4480	1.4814
0.7	0.0000	0.0000	0.0000	−0.6767	−7.4631	0.7346	0.9037	0.9245
0.8	0.0000	0.0000	0.0000	−0.8048	−8.8765	0.0471	0.0579	0.0593
0.9	0.0000	0.0000	0.0000	−0.6272	−6.9177	−0.6160	−0.7577	−0.7751
1.0	0.0000				−2.5171		−1.2432	−1.2718

3. *Calcular la respuesta teórica.* La ecuación (3.2.5), válida para $t \leq 0.6$ s, la ecuación (2.2.4), modificada adecuadamente para ser válida en $t \geq 0.6$ s, y las derivadas de estas dos ecuaciones se evalúan en cada t_i; los resultados se proporcionan en las tablas E5.1a y E5.1b.

4. *Verificar la exactitud de los resultados numéricos.* La solución numérica basada en la interpolación lineal por partes de la excitación coincide bastante bien con la solución teórica. La discrepancia surge porque la curva sinusoidal de medio ciclo se sustituyó por la serie de líneas rectas que se muestran en la figura E5.1. Con un Δt más pequeño, la aproximación lineal por partes estaría más cerca de la curva sinusoidal de medio ciclo y la solución numérica sería más exacta.

TABLA E5.1b SOLUCIÓN NUMÉRICA USANDO LA INTERPOLACIÓN LINEAL DE LA EXCITACIÓN

t_i	p_i	$C'p_i$	$D'p_{i+1}$	$A'u_i$	u_i	$B'\dot{u}_i$	$\dot{u}_i$	$\dot{u}_i$ teórica
0.0	0.0000	0.0000	0.9354	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	0.8544	1.6201	−0.1137	0.0318	0.7071	0.9354	0.9567
0.2	8.6602	1.4799	1.8707	−0.8140	0.2274	2.3192	3.0679	3.1383
0.3	10.0000	1.7088	1.6201	−2.2679	0.6336	3.6708	4.8558	4.9674
0.4	8.6603	1.4799	0.9354	−4.0588	1.1339	3.5771	4.7318	4.8408
0.5	5.0000	0.8544	0.0000	−5.3320	1.4896	1.4617	1.9336	1.9783
0.6	0.0000	0.0000	0.0000	−5.1832	1.4480	−2.2799	−3.0159	−3.0848
0.7	0.0000	0.0000	0.0000	−3.2347	0.9037	−5.6418	−7.4631	−7.6346
0.8	0.0000	0.0000	0.0000	−0.2074	0.0579	−6.7103	−8.8765	−9.0808
0.9	0.0000	0.0000	0.0000	2.7124	−0.7577	−5.2295	−6.9177	−7.0771
1.0	0.0000				−1.2432		−2.5171	−2.5754

5.3 MÉTODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL

Este método se basa en una aproximación por diferencias finitas de las derivadas temporales del desplazamiento (es decir, la velocidad y la aceleración). Si se toman pasos de tiempo constantes, $\Delta t_i = \Delta t$, las expresiones de diferencias centrales para la velocidad y la aceleración en el tiempo i son

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \tag{5.3.1}$$

Al sustituir estas expresiones aproximadas para la velocidad y la aceleración en la ecuación (5.1.3), especificada para sistemas elástico lineales, resulta

$$m\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} + ku_i = p_i \tag{5.3.2}$$

En esta ecuación, u_i y u_{i-1} ya se conocen (a partir de la aplicación del procedimiento para los pasos de tiempo anteriores). La transferencia de estas cantidades conocidas al lado derecho conduce a

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]u_i \tag{5.3.3}$$

o

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \tag{5.3.4}$$

donde

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \tag{5.3.5}$$

y

$$\hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right]u_i \tag{5.3.6}$$

TABLA 5.3.1 MÉTODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL†

1.0 *Cálculos iniciales*

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$.

1.2 $u_{-1} = u_0 - \Delta t\ \dot{u}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0$.

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t}$.

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t}$.

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2}$.

2.0 *Cálculos para el tiempo de paso i*

2.1 $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i$.

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}}$.

2.3 Si es necesario: $\dot{u}_i = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$; $\ddot{u}_i = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}$.

3.0 *Repetición para el próximo paso de tiempo*

Reemplace i por $i + 1$ y repita los pasos 2.1, 2.2 y 2.3 para el siguiente paso de tiempo.

† Si la excitación es la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, de acuerdo con la ecuación (1.7.6), reemplace p_i por $-m\ddot{u}_{gi}$ en la tabla 5.3.1. Las u_i, $\dot{u}_i$ y $\ddot{u}_i$ calculadas, dan los valores de la respuesta respecto al terreno. Si es necesario, la velocidad y la aceleración totales pueden calcularse fácilmente: $\dot{u}_i^t = \dot{u}_i + \dot{u}_{gi}$ y $\ddot{u}^t_i = \ddot{u}^i + \ddot{u}_{gi}$.

Entonces, la incógnita u_{i+1} está dada por

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}} \tag{5.3.7}$$

La solución u_{i+1} en el tiempo $i + 1$ se determina a partir de la condición de equilibrio, ecuación (5.1.3), en el tiempo i sin usar la condición de equilibrio, ecuación (5.1.4), en el tiempo $i + 1$. Estos métodos se denominan *métodos explícitos*.

Observe que en la ecuación (5.3.6) se usan los desplazamientos conocidos u_i y u_{i-1} para calcular u_{i+1}. Por lo tanto, se requieren u_0 y u_{-1} para determinar u_1; el desplazamiento inicial u_0 especificado ya se conoce. En la determinación de u_{-1} se especifica la ecuación (5.3.1) para $i = 0$, a fin de obtener

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta t)^2} \tag{5.3.8}$$

Si se despeja u_1 de la primera ecuación y se sustituye en la segunda, resulta

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t(\dot{u}_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 \tag{5.3.9}$$

El desplazamiento inicial u_0 y la velocidad inicial $\dot{u}_0$ están dados y la ecuación de movimiento en el tiempo 0 ($t_0 = 0$),

$$m\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + ku_0 = p_0$$

proporciona la aceleración en el tiempo 0:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \tag{5.3.10}$$

La tabla 5.3.1 resume el procedimiento ya antes descrito, tal y como podría implementarse en una computadora.

El método de la diferencia central podría "fallar", dando resultados sin sentido, debido al redondeo numérico si el paso de tiempo elegido no es lo suficientemente corto. El requisito específico para su estabilidad es

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi} \tag{5.3.11}$$

Esto nunca es una limitación para los sistemas de 1GDL debido a que es necesario elegir un paso de tiempo mucho más pequeño si se desea obtener resultados exactos. Por lo regular, $\Delta t/T_n \leq 0.1$ para definir la respuesta adecuadamente, y en la mayoría de los análisis de respuestas ante sismos se elige un paso de tiempo aún más corto (generalmente $\Delta t = 0.01$ a 0.02 s) para definir la aceleración del terreno $\ddot{u}g(t)$ con precisión.

Ejemplo 5.2

Resuelva el ejemplo 5.1 mediante el método de la diferencia central usando $\Delta t = 0.1$ s.

Solución

1.0 *Cálculos iniciales*

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$

$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $u_{-1} = u_0 - (\Delta t)\dot{u}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_0 = 0.$

1.3 $\hat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t} = 26.13.$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t} = 24.53.$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2} = -40.66.$

2.0 *Cálculos para cada paso de tiempo*

2.1 $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i = p_i - 24.53u_{i-1} + 40.66u_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_i}{\hat{k}} = \dfrac{\hat{p}_i}{26.13}.$

3.0 Los pasos de cálculo 2.1 y 2.2 se repiten para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, lo que conduce a la tabla E5.2, donde también se incluye el resultado teórico (de la tabla E5.1a).

TABLA E5.2 SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL

t_i	p_i	u_{i-1}	u_i	$\hat{p}_i$ [Ec. (2.1)]	u_{i+1} [Ec. (2.2)]	u_{i+1} teórica
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0328
0.1	5.0000	0.0000	0.0000	5.0000	0.1914	0.2332
0.2	8.6602	0.0000	0.1914	16.4419	0.6293	0.6487
0.3	10.0000	0.1914	0.6293	30.8934	1.1825	1.1605
0.4	8.6603	0.6293	1.1825	41.3001	1.5808	1.5241
0.5	5.0000	1.1825	1.5808	40.2649	1.5412	1.4814
0.6	0.0000	1.5808	1.5412	23.8809	0.9141	0.9245
0.7	0.0000	1.5412	0.9141	−0.6456	−0.0247	0.0593
0.8	0.0000	0.9141	−0.0247	−23.4309	−0.8968	−0.7751
0.9	0.0000	−0.0247	−0.8968	−35.8598	−1.3726	−1.2718
1.0	0.0000	−0.8968	−1.3726	−33.8058	−1.2940	−1.2674

5.4 MÉTODO DE NEWMARK

5.4.1 Procedimiento básico

En 1959, N. M. Newmark desarrolló una familia de métodos paso a paso en el tiempo basándose en las siguientes ecuaciones:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\,\Delta t]\,\ddot{u}_i + (\gamma\,\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \qquad (5.4.1a)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_{i+1} \qquad (5.4.1b)$$

Los parámetros β y γ definen la variación de la aceleración durante un paso de tiempo y determinan las características de estabilidad y precisión del método. La selección típica de γ es de $\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ es satisfactoria desde todos los puntos de vista, incluido el de la precisión. Estas dos ecuaciones, en combinación con la ecuación de equilibrio (5.1.4) al final del paso de tiempo, proporcionan la base para calcular u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$ en el tiempo $i+1$ a partir de u_i, $\dot{u}_i$, y $\ddot{u}_i$ conocidas en el tiempo i. Para implementar estos cálculos es necesario iterar debido a que la $\ddot{u}_{i+1}$ desconocida aparece en el lado derecho de la ecuación (5.4.1).

Por otro lado, para los sistemas lineales es posible modificar la formulación original de Newmark, a fin de permitir la solución de las ecuaciones (5.4.1) y (5.1.4) sin iteración. Antes de describir esta modificación se demuestra que los conocidos métodos de la aceleración promedio constante y el método de la aceleración lineal son dos casos especiales del método de Newmark.

5.4.2 Casos especiales

Para estos dos métodos, la tabla 5.4.1 resume el desarrollo de la relación entre las respuestas u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$, y $\ddot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$ en el tiempo $i+1$ a las cantidades correspondientes en el tiempo i. La ecuación (5.4.2) describe los supuestos de que la variación de la aceleración durante un paso de tiempo es constante, igual a la aceleración promedio, o que varía linealmente. La integración de $\ddot{u}(\tau)$ da la ecuación (5.4.3) para la variación $\dot{u}(\tau)$ de la velocidad en el paso de

TABLA 5.4.1 MÉTODOS DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO Y LA ACELERACIÓN LINEAL

Aceleración promedio constante	Aceleración lineal	
$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(5.4.2)
$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(5.4.3)
$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	(5.4.4)
$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \ddot{u}_i\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$	(5.4.5)
$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\,\Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_i\right)$	(5.4.6)

tiempo, en el que $\tau = \Delta t$ se sustituye para obtener la ecuación (5.4.4) de la velocidad $\dot{u}_{i+1}$ en el instante $i + 1$. La integración de $\dot{u}(\tau)$ da la ecuación (5.4.5) para la variación $u(\tau)$ del desplazamiento en el paso de tiempo, en el que $\tau = \Delta t$ se sustituye para obtener la ecuación (5.4.6) del desplazamiento u_{i+1} en el instante $i + 1$. Al comparar las ecuaciones (5.4.4) y (5.4.6) con la ecuación (5.4.1), se demuestra que las ecuaciones de Newmark con $\gamma = \frac{1}{2}$, y $\beta = \frac{1}{4}$ son iguales a las que se deducen suponiendo una aceleración promedio constante, y aquellas con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$ corresponden al supuesto de una variación lineal de la aceleración.

5.4.3 Sistemas lineales

Para los sistemas lineales es posible modificar la formulación original de Newmark a fin de permitir la resolución de las ecuaciones (5.4.1) y (5.1.4) sin iteración. La ecuación (5.1.4) especificada para los sistemas lineales se convierte en

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \tag{5.4.7}$$

De la ecuación (5.4.1b) $\ddot{u}_{i+1}$ puede expresarse en términos de u_{i+1}:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_i \tag{5.4.8}$$

Si se sustituye la ecuación (5.4.8) en la ecuación (5.4.1a), resulta

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}(u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i \tag{5.4.9}$$

Enseguida, las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9) se sustituyen en la ecuación que controla el movimiento (5.4.7) en el instante $i + 1$. Esta sustitución da

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_{i+1} \tag{5.4.10}$$

donde

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \tag{5.4.11}$$

y

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}c\right]u_i + \left[\frac{1}{\beta \Delta t}m + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)c\right]\dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{u}_i \tag{5.4.12}$$

Con $\hat{k}$ y $\hat{p}_{i+1}$ conocidas a partir de las propiedades del sistema m, k y c, los parámetros del algoritmo γ y β, y el estado del sistema en el tiempo i definido por u_i, $\dot{u}_i$ y $\ddot{u}_i$, el desplazamiento en el tiempo $i + 1$ se calcula como

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \tag{5.4.13}$$

Una vez que se conoce u_{i+1}, la velocidad $\dot{u}_{i+1}$ y la aceleración $\ddot{u}_{i+1}$ pueden calcularse a partir de las ecuaciones (5.4.9) y (5.4.8), respectivamente.

La aceleración también puede obtenerse con base en la ecuación de movimiento en el tiempo $i + 1$:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \tag{5.4.14}$$

en vez de hacerlo mediante la ecuación (5.4.8). Para iniciar los cálculos en cada paso de tiempo, se requiere la ecuación (5.4.14) a fin de obtener $\ddot{u}_0$ [vea la ecuación (5.3.10)].

En el método de Newmark la solución en el tiempo $i + 1$ se determina a partir de la ecuación (5.4.7), la condición de equilibrio en el tiempo $i + 1$. Estos métodos se denominan *métodos implícitos*. Aunque la fuerza restauradora es una función implícita del u_{i+1} desconocido, fue fácil de calcular para los sistemas lineales.

En la tabla 5.4.2 se resume la solución paso a paso en el tiempo utilizando el método de Newmark, tal como podría implementarse en una computadora.

TABLA 5.4.2 MÉTODO DE NEWMARK: SISTEMAS LINEALES[†]

Casos especiales

(1) Método de la aceleración promedio constante ($\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$)

(2) Método de la aceleración lineal ($\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$)

1.0 *Cálculos iniciales*

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}.$

1.2 Seleccione Δt.

1.3 $a_1 = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}m + \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t}c; \quad a_2 = \dfrac{1}{\beta \Delta t}m + \left(\dfrac{\gamma}{\beta} - 1\right)c;$ y

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c.$$

1.4 $\hat{k} = k + a_1.$

2.0 *Cálculos para cada paso de tiempo,* $i = 0, 1, 2, \ldots$

2.1 $\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + a_1\, u_i + a_2\, \dot{u}_i + a_3\, \ddot{u}_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}}.$

2.3 $\dot{u}_{i+1} = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t}(u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i.$

2.4 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \dfrac{1}{\beta \Delta t}\dot{u}_i - \left(\dfrac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_i.$

3.0 *Repetición para el siguiente paso de tiempo.* Reemplace i por $i + 1$ y aplique los pasos 2.1 a 2.4 para el siguiente paso de tiempo.

[†] Si la excitación es la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, de acuerdo con la ecuación (1.7.6), reemplace p_i por $-m\ddot{u}_{gi}$ en la tabla 5.4.2. Las u_i, $\dot{u}_i$ y $\ddot{u}_i$ calculadas, dan los valores de la respuesta respecto al terreno. Si es necesario, la velocidad y la aceleración totales pueden calcularse con facilidad: $\dot{u}_i^t = \dot{u}_i + \dot{u}_{gi}$ y $\ddot{u}^t{}_i = \ddot{u}^i + \ddot{u}_{gi}$.

El método de Newmark es estable si

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \tag{5.4.15}$$

Para $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$, esta condición se convierte en

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \tag{5.4.16a}$$

Lo anterior implica que el método de la aceleración promedio constante es estable para cualquier Δt, sin importar cuán grande sea; sin embargo, es exacta sólo si Δt es lo suficientemente

pequeño, como se analiza al final de la sección 5.3. Para $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$, la ecuación (5.4.15) indica que el método de la aceleración lineal es estable si

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551 \tag{5.4.16b}$$

Sin embargo, como en el caso del método de la diferencia central, esta condición tiene poca importancia en el análisis de los sistemas de 1GDL debido a que es necesario utilizar un paso de tiempo mucho más corto que $0.551T_n$ si se desea obtener una representación exacta de la excitación y la respuesta.

Ejemplo 5.3

Resuelva el ejemplo 5.1 mediante el método de la aceleración promedio constante con $\Delta t = 0.1$ s.

Solución

1.0 *Cálculos iniciales*

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$
$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $\Delta t = 0.1.$

1.3 $a_1 = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}m + \dfrac{2}{\Delta t}c = 104.5;\quad a_2 = \dfrac{4}{\Delta t}m + c = 10.29;\quad$ y

$a_3 = m = 0.2533.$

1.4 $\hat{k} = k + a_1 = 114.5.$

2.0 *Cálculos para cada paso de tiempo*, $i = 0, 1, 2, \ldots$

2.1 $\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + a_1 u_i + a_2 \dot{u}_i + a_3 \ddot{u}_i = p_{i+1} + 104.5\, u_i + 10.29\, \dot{u}_i + 0.2533\, \ddot{u}_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} = \dfrac{\hat{p}_{i+1}}{114.5}.$

2.3 $\dot{u}_{i+1} = \dfrac{2}{\Delta t}(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i.$

2.4 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \dfrac{4}{\Delta t}\dot{u}_i - \ddot{u}_i.$

3.0 *Repetición para el siguiente paso de tiempo*. Los pasos 2.1 a 2.4 se repiten para los pasos de tiempo sucesivos y se resumen en la tabla E5.3, donde también se incluye el resultado teórico (de la tabla E5.1a).

Ejemplo 5.4

Resuelva el ejemplo 5.1 mediante el método de la aceleración lineal utilizando $\Delta t = 0.1$ s.

Solución

1.0 *Cálculos iniciales*

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$
$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

TABLA E5.3 SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO CONSTANTE

t_i	p_i	$\hat{p}_i$ (Paso 2.1)	$\ddot{u}_i$ (Paso 2.4)	$\dot{u}_i$ (Paso 2.3)	u_i (Paso 2.2)	u_i teórico
0.0	0.0000		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	5.0000	17.4666	0.8733	0.0437	0.0328
0.2	8.6603	26.6355	23.1801	2.9057	0.2326	0.2332
0.3	10.0000	70.0837	12.3719	4.6833	0.6121	0.6487
0.4	8.6603	123.9535	−11.5175	4.7260	1.0825	1.1605
0.5	5.0000	163.8469	−38.1611	2.2421	1.4309	1.5241
0.6	0.0000	162.9448	−54.6722	−2.3996	1.4230	1.4814
0.7	0.0000	110.1710	−33.6997	−6.8182	0.9622	0.9245
0.8	0.0000	21.8458	−2.1211	−8.6092	0.1908	0.0593
0.9	0.0000	−69.1988	28.4423	−7.2932	−0.6043	−0.7751
1.0	0.0000	−131.0066	47.3701	−3.5026	−1.1441	−1.2718

1.1 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} = 0.$

1.2 $\Delta t = 0.1.$

1.3 $a_1 = \dfrac{6}{(\Delta t)^2}m + \dfrac{3}{\Delta t}c = 156.8; \quad a_2 = \dfrac{6}{\Delta t}m + 2c = 15.52;$ y

$a_3 = 2m + \dfrac{\Delta t}{2}c = 0.5146.$

1.4 $\hat{k} = k + a_1 = 166.8.$

2.0 *Cálculos para cada paso de tiempo*, $i = 0, 1, 2, \ldots$

2.1 $\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + a_1 u_i + a_2 \dot{u}_i + a_3 \ddot{u}_i = p_{i+1} + 156.8u_i + 15.52\dot{u}_i + 0.5146\ddot{u}_i.$

2.2 $u_{i+1} = \dfrac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} = \dfrac{\hat{p}_{i+1}}{166.8}.$

2.3 $\dot{u}_{i+1} = \dfrac{3}{\Delta t}(u_{i+1} - u_i) - 2\dot{u}_i - \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i.$

2.4 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{6}{(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \dfrac{6}{\Delta t}\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i.$

3.0 *Repetición para el siguiente paso de tiempo*. Los pasos 2.1 a 2.4 se repiten para los pasos de tiempo sucesivos y se resumen en la tabla E5.4, donde también se incluye el resultado teórico (de la tabla E5.1a).

Observe que los resultados numéricos obtenidos mediante el método de la aceleración lineal son más cercanos a la solución teórica (tabla E5.4); por lo tanto, son más precisos que los obtenidos por medio del método de la aceleración promedio constante (tabla E5.3).

TABLA E5.4 SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA ACELERACIÓN LINEAL

t_i	p_i	$\hat{p}_i$ (Paso 2.1)	$\ddot{u}_i$ (Paso 2.4)	$\dot{u}_i$ (Paso 2.3)	u_i (Paso 2.2)	u_i teórico
0.0	0.0000		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	5.0000	5.0000	17.9904	0.8995	0.0300	0.0328
0.2	8.6603	36.5748	23.6566	2.9819	0.2193	0.2332
0.3	10.0000	102.8221	12.1372	4.7716	0.6166	0.6487
0.4	8.6603	185.5991	−12.7305	4.7419	1.1130	1.1605
0.5	5.0000	246.4956	−39.9425	2.1082	1.4782	1.5241
0.6	0.0000	243.8733	−56.0447	−2.6911	1.4625	1.4814
0.7	0.0000	158.6538	−33.0689	−7.1468	0.9514	0.9245
0.8	0.0000	21.2311	0.4892	−8.7758	0.1273	0.0593
0.9	0.0000	−115.9590	31.9491	−7.1539	−0.6954	−0.7751
1.0	0.0000	−203.5678	50.1114	−3.0508	−1.2208	−1.2718

5.5 ESTABILIDAD Y ERROR DE CÁLCULO

5.5.1 Estabilidad

Los procedimientos numéricos que conducen a soluciones delimitadas si el paso de tiempo es más corto que algún límite de estabilidad, se denominan *procedimientos condicionalmente estables*. Los procedimientos que conducen a soluciones delimitadas independientemente del tamaño del paso de tiempo se denominan *procedimientos incondicionalmente estables*. El método de la aceleración promedio es incondicionalmente estable. El método de la aceleración lineal es estable si $\Delta t/T_n < 0.551$ y el método de la diferencia central es estable si $\Delta t/T_n < 1/\pi$. Es evidente que estos dos últimos métodos son condicionalmente estables.

Los criterios de estabilidad no son restrictivos (es decir, no dictan la elección del paso de tiempo) para el análisis de sistemas de 1GDL, porque $\Delta t/T_n$ debe ser mucho menor que el límite de estabilidad (por ejemplo, 0.1 o menos) para asegurar la precisión adecuada de los resultados numéricos. Sin embargo, la estabilidad de los métodos numéricos es importante al analizar los sistemas de VGDL, donde a menudo es necesario utilizar métodos incondicionalmente estables (capítulo 16).

5.5.2 Error de cálculo

El error es inherente a cualquier solución numérica de una ecuación de movimiento. No se habla del análisis del error desde un punto de vista matemático. Más bien, se examinan dos características importantes de las soluciones numéricas para desarrollar una idea de la naturaleza de los errores y, después, se menciona una manera sencilla y útil de manejarlos.

Considere el problema de vibración libre

$$m\ddot{u} + ku = 0 \qquad u(0) = 1 \quad \text{y} \quad \dot{u}(0) = 0$$

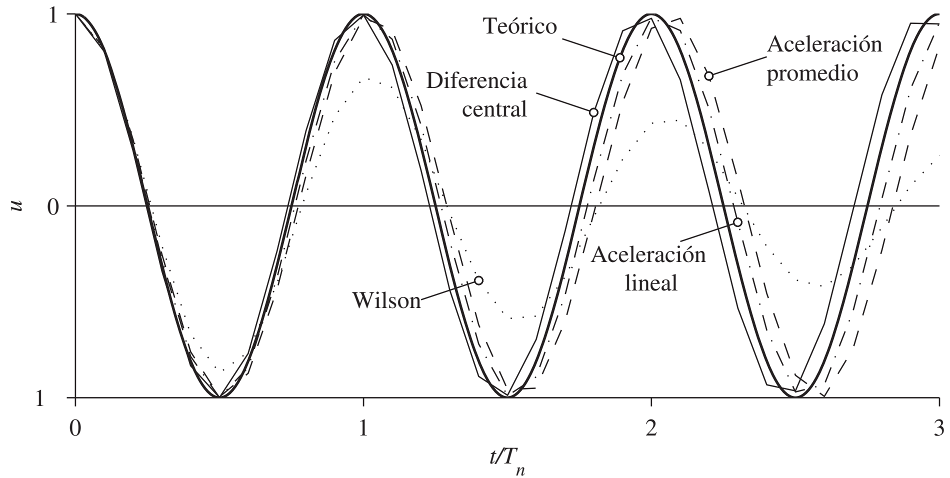


Figura 5.5.1 Solución de la vibración libre mediante cuatro métodos numéricos ($\Delta t/T_n = 0.1$) y la solución teórica.

cuya solución teórica es

$$u(t) = \cos \omega_n t \tag{5.5.1}$$

Este problema se resuelve mediante cuatro métodos numéricos: el método de la diferencia central, el método de la aceleración promedio, el método de la aceleración lineal y el método de Wilson. El último de estos métodos puede consultarse en otros libros; vea las referencias al final del capítulo. En la figura 5.5.1 se comparan los resultados numéricos obtenidos usando $\Delta t = 0.1T_n$ con la solución teórica. Esta comparación muestra que algunos métodos numéricos pueden predecir que la amplitud del desplazamiento decae con el tiempo, aunque el sistema no está amortiguado y que el periodo natural se alarga o acorta.

En la figura 5.5.2 se muestra el decaimiento de la amplitud AD y el periodo de elongación PE en los cuatro métodos numéricos como una función de $\Delta t/T_n$; AD y PE se definen en el inciso (b) de la figura. Sin embargo, no se presentan los análisis matemáticos que condujeron a estos datos. Tres de los métodos no predicen ningún decaimiento de la amplitud del desplazamiento. Por su parte, el método de Wilson contiene decaimiento de la amplitud, lo que implica que este método introduce el *amortiguamiento numérico* en el sistema; la fracción de amortiguamiento viscoso equivalente $\bar{\zeta}$ se muestra en el inciso (a) de la figura. Observe el rápido aumento del error en el periodo en el método de la diferencia central cerca de $\Delta t/T_n = 1/\pi$, el límite de estabilidad para el método. El método de la diferencia central presenta el error en el periodo más grande. En este sentido, es el menos preciso de los métodos considerados. Para una $\Delta t/T_n$ menor que su límite de estabilidad, el método de la aceleración lineal proporciona el menor alargamiento del periodo. Esta propiedad, combinada con la no existencia de decaimiento de la amplitud, hace que este método sea el más adecuado (de los ya presentados) para los sistemas de 1GDL. Sin embargo, para los siste-

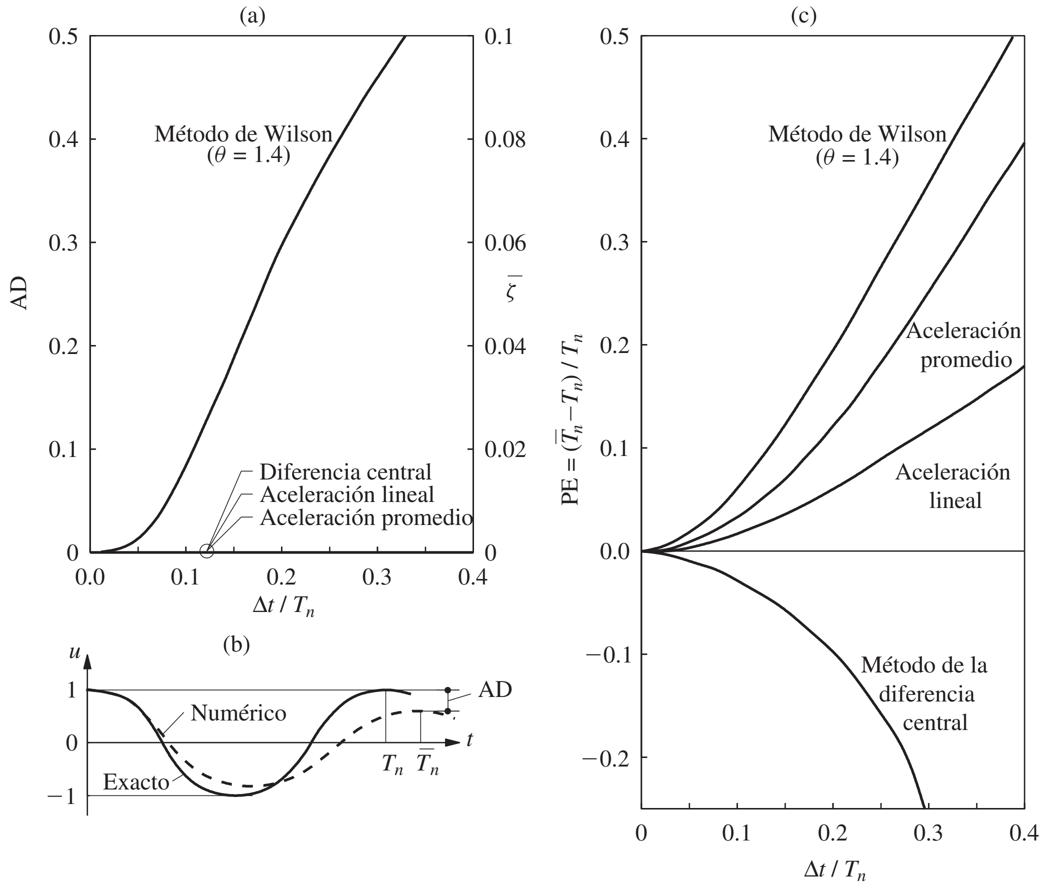


Figura 5.5.2 (a) Decaimiento de la amplitud contra $\Delta t/T_n$; (b) definición de AD y PE; (c) alargamiento del periodo contra $\Delta t/T_n$

mas de VGDL se llegará a una conclusión diferente debido a los requisitos de estabilidad (capítulo 16).

La elección del paso de tiempo también depende de la variación en el tiempo de la excitación dinámica, además del periodo de vibración natural del sistema. La figura 5.5.2 indica que $\Delta t = 0.1T_n$ daría resultados bastante precisos. El paso de tiempo también debe ser lo suficientemente corto para mantener al mínimo la distorsión de la función de excitación. Se requiere un paso de tiempo muy pequeño para describir en forma numérica la aceleración del terreno tan irregular que se registra durante los sismos; por lo general, $\Delta t = 0.02$ s y el paso de tiempo elegido para calcular la respuesta estructural no debe ser más grande.

Una técnica útil, aunque poco sofisticada, para seleccionar el paso de tiempo consiste en resolver el problema con un paso de tiempo que parezca razonable, para después repetir la solución con un paso de tiempo un poco más pequeño y comparar los resultados; luego se continúa con el proceso hasta que dos soluciones sucesivas estén lo suficientemente cercanas.

El análisis anterior de la estabilidad y la precisión se aplica sólo a los sistemas lineales. El lector debe consultar otras referencias para ver cómo afectan estos aspectos al análisis de la respuesta no lineal.

5.6 SISTEMAS NO LINEALES: MÉTODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL

Por lo general, la respuesta dinámica de un sistema más allá de su intervalo elástico lineal no es susceptible de una solución analítica, incluso si la variación en el tiempo de la excitación está descrita por una función simple. Por lo tanto, los métodos numéricos son esenciales para el análisis de los sistemas no lineales. El método de la diferencia central puede adaptarse con facilidad para resolver una ecuación no lineal de movimiento, ecuación (5.1.3), en el instante *i*. Si se sustituyen las ecuaciones (5.3.1), la aproximación por diferencia central para la velocidad y la aceleración, da la ecuación (5.3.2) donde ku_i se sustituye por $(f_S)_i$, la cual puede reescribirse para obtener la siguiente expresión para la respuesta en el tiempo $i + 1$:

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \tag{5.6.1}$$

donde

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \tag{5.6.2}$$

y

$$\hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right]u_{i-1} + \frac{2m}{(\Delta t)^2}u_i - (f_S)_i \tag{5.6.3}$$

Si se comparan estas ecuaciones con las de los sistemas lineales, se observa que la única diferencia está en la definición de $\hat{p}_i$. Con esta modificación, la tabla 5.3.1 también es aplicable a los sistemas no lineales.

La fuerza restauradora $(f_S)_i$ aparece de manera *explícita*, ya que sólo depende de la respuesta en el tiempo *i*, no de la respuesta desconocida en el tiempo $i + 1$. Por lo tanto, se calcula fácilmente. Esto hace que el método de la diferencia central quizá sea el procedimiento más sencillo para los sistemas no lineales.

5.7 SISTEMAS NO LINEALES: MÉTODO DE NEWMARK

En esta sección, el método de Newmark descrito con anterioridad para los sistemas lineales se extiende a los sistemas no lineales. Recuerde que este método determina la solución en el tiempo $i + 1$ a partir de la condición de equilibrio en el tiempo $i + 1$; es decir, la ecuación (5.1.4) para sistemas no lineales. Como la fuerza restauradora $(f_S)_{i+1}$ es una función implícita no lineal de la incógnita u_{i+1}, este método requiere la realización de iteraciones. Esto es típico de los métodos implícitos. Resulta instructivo desarrollar primero la iteración con el método de Newton-Raphson para el análisis estático de un sistema no lineal de 1GDL.

5.7.1 Iteración de Newton-Raphson

Si se excluyen la inercia y los términos de amortiguamiento en la ecuación de movimiento (ecuación 5.1.1), se obtiene la ecuación no lineal que debe resolverse en un problema estático:

$$f_S(u) = p \tag{5.7.1}$$

La tarea consiste en determinar la deformación u debida a una fuerza externa p dada, donde la relación de fuerza-deformación no lineal $f_S(u)$ está definida para el sistema a analizar.

Suponga que después de j ciclos de iteración, $u^{(j)}$ es una estimación del desplazamiento desconocido y se tiene interés en desarrollar un procedimiento iterativo que proporcione una mejor estimación de $u^{(j+1)}$. Para este propósito, la expansión de la fuerza restauradora $f_S^{(j+1)}$ en una serie de Taylor alrededor de la estimación conocida $u^{(j)}$ da

$$f_S^{(j+1)} = f_S^{(j)} + \left.\frac{\partial f_S}{\partial u}\right|_{u^{(j)}} \left(u^{(j+1)} - u^{(j)}\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f_S}{\partial u^2}\right|_{u^{(j)}} \left(u^{(j+1)} - u^{(j)}\right)^2 + \cdots \tag{5.7.2}$$

Si $u^{(j)}$ está cerca de la solución, el cambio en u, $\Delta u^{(j)} = u^{(j+1)} - u^{(j)}$, será pequeño y es posible despreciar los términos de segundo orden y órdenes superiores. Lo anterior conduce a la ecuación linealizada

$$f_S^{(j+1)} \simeq f_S^{(j)} + k_T^{(j)} \Delta u^{(j)} = p \tag{5.7.3}$$

o

$$k_T^{(j)} \Delta u^{(j)} = p - f_S^{(j)} = R^{(j)} \tag{5.7.4}$$

donde $k_T^{(j)} = \left.\frac{\partial f_S}{\partial u}\right|_{u^{(j)}}$ es la rigidez tangente en $u^{(j)}$. Si se resuelve la ecuación linealizada (5.7.4) resulta $\Delta u^{(j)}$ y una estimación mejorada del desplazamiento:

$$u^{(j+1)} = u^{(j)} + \Delta u^{(j)} \tag{5.7.5}$$

El procedimiento iterativo se describe a continuación con referencia a la figura 5.7.1. La fuerza $f_S^{(j)}$ está asociada con $u^{(j)}$ y no es igual a la fuerza aplicada p, además se define una fuerza residual: $R^{(j)} = p - f_S^{(j)}$. El desplazamiento adicional debido a esta fuerza residual se determina a partir de la ecuación (5.7.4), dando lugar a $u^{(j+1)}$. Esta nueva estimación de la solución se utiliza para encontrar un nuevo valor de la fuerza residual $R^{(j+1)} = p - f_S^{(j+1)}$. El desplazamiento adicional $\Delta u^{(j+1)}$ debido a esta fuerza residual se determina resolviendo

$$k_T^{(j+1)} \Delta u^{(j+1)} = R^{(j+1)} \tag{5.7.6}$$

Este desplazamiento adicional se utiliza para encontrar un nuevo valor del desplazamiento:

$$u^{(j+2)} = u^{(j+1)} + \Delta u^{(j+1)} \tag{5.7.7}$$

y un nuevo valor de la fuerza residual $R^{(j+2)}$. El proceso continúa hasta que se alcanza la convergencia. Este proceso iterativo se conoce como el *método de Newton-Raphson*.

Tasa de convergencia. Se puede probar que cerca del final del proceso de iteración, el algoritmo de Newton-Raphson converge con una tasa cuadrática a la solución exacta u, es decir $\left| u - u^{(j+1)} \right| \leq c \left| u - u^{(j)} \right|^2$, donde c es una constante que depende de la

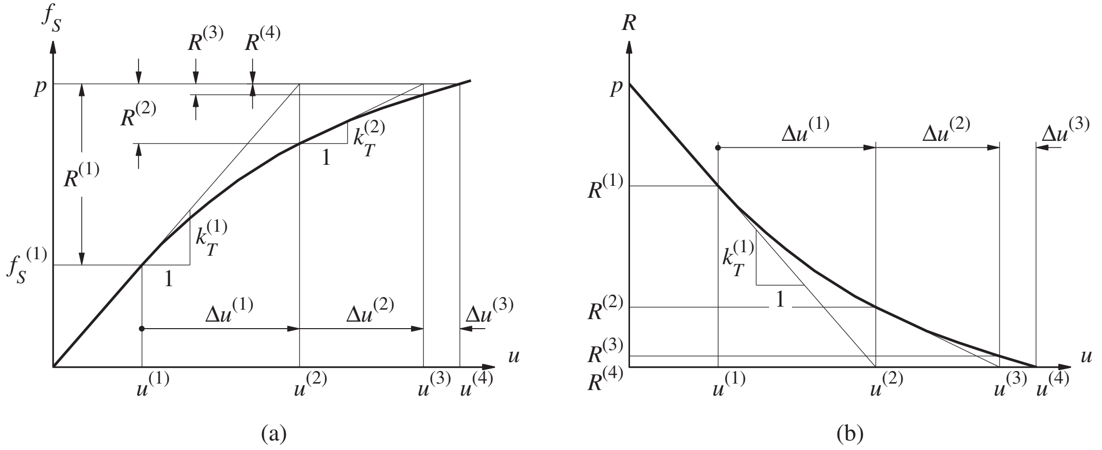


Figura 5.7.1 Iteración de Newton-Raphson: (a) aplicación y fuerzas restauradoras, (b) fuerza residual.

segunda derivada de la fuerza restauradora o el cambio en la rigidez tangente. Este resultado implica que, cerca de la solución, el error en la $(j+1)$-ésima iteración (igual a la diferencia entre u y $u^{(j+1)}$) es menor que el cuadrado del error en la iteración anterior $u^{(j)}$.

Criterios de convergencia. Después de cada iteración se verifica la solución y el proceso iterativo termina cuando alguna medida del error en la solución es menor que una tolerancia especificada. Por lo general, se aplican uno o más de los siguientes criterios de convergencia (o aceptación):

1. La fuerza residual es menor que una tolerancia:

$$\left|R^{(j)}\right| \leq \varepsilon_R \tag{5.7.8a}$$

Los valores convencionales para la tolerancia ε_R van de 10^{-3} a 10^{-8}.

2. El cambio en el desplazamiento es menor que una tolerancia:

$$\left|\Delta u^{(j)}\right| \leq \varepsilon_u \tag{5.7.8b}$$

Los valores convencionales para la tolerancia ε_u van de 10^{-3} a 10^{-8}.

3. El trabajo incremental realizado por la fuerza residual que actúa en el cambio del desplazamiento es menor que una tolerancia:

$$\tfrac{1}{2}\left|\Delta u^{(j)} R^{(j)}\right| \leq \varepsilon_w \tag{5.7.8c}$$

La tolerancia ε_w debe estar en, o cerca de, la tolerancia de la computadora (máquina) porque el lado izquierdo es un producto de cantidades pequeñas.

Iteración de Newton-Raphson modificada. Para evitar el cálculo de la rigidez tangente en cada iteración, la rigidez inicial al comienzo de un paso de tiempo puede

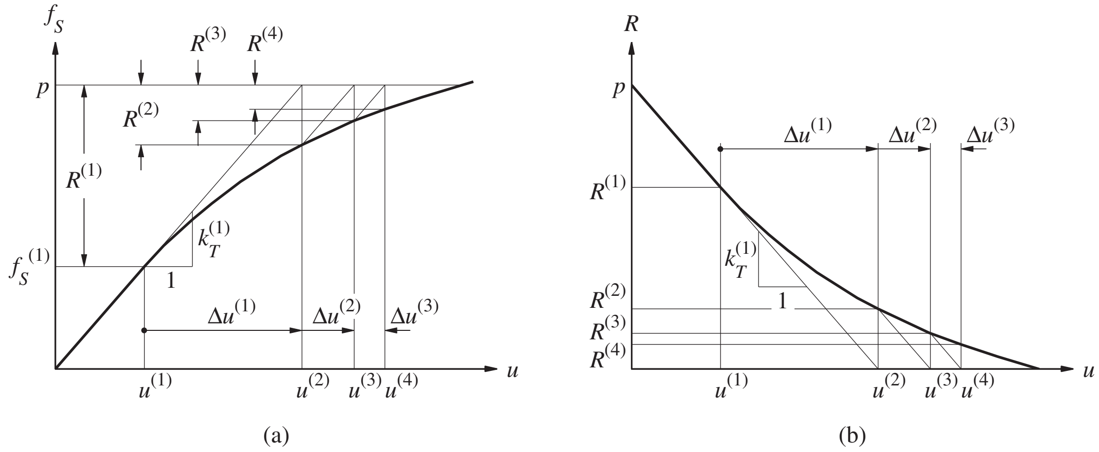


Figura 5.7.2 Iteración de Newton-Raphson modificada: (a) aplicación y fuerzas restauradoras, (b) fuerza residual.

usarse como la rigidez constante en todas las iteraciones dentro de ese paso de tiempo. Esta modificación de la iteración de Newton-Raphson se ilustra en la figura 5.7.2, donde se puede observar que la convergencia es ahora más lenta. En cada iteración la fuerza residual $R^{(j)}$ es más grande, como se observa al comparar las figuras 5.7.1 y 5.7.2, y se requieren más iteraciones para lograr la convergencia.

5.7.2 Método de Newmark

Ahora se ha desarrollado la iteración de Newton-Raphson para resolver una ecuación de equilibrio no lineal (por ejemplo, la ecuación 5.7.1) que controla el problema estático. En el análisis dinámico, la meta es determinar las cantidades de respuesta u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$ y $\ddot{u}_{i+1}$ en el tiempo $i + 1$ que satisfacen la ecuación (5.1.4), la cual puede escribirse como

$$(\hat{f}_S)_{i+1} = p_{i+1} \tag{5.7.9}$$

donde

$$(\hat{f}_S)_{i+1} = m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_S)_{i+1} \tag{5.7.10}$$

Si se incluyen la inercia y las fuerzas de amortiguamiento en la definición de la "fuerza restauradora" $\hat{f}_S$, la ecuación del análisis dinámico (5.7.9) tiene la misma forma que la ecuación del análisis estático (5.7.1).

Por lo tanto, es posible adaptar la expansión de la serie de Taylor para la ecuación (5.7.2) a la ecuación (5.7.9), interpretar $(\hat{f}_s)_{i+1}$ como una función de u_{i+1} y descartar los términos de segundo orden y órdenes superiores para obtener una ecuación análoga a la ecuación (5.7.3):

$$(\hat{f}_S)_{i+1}^{(j+1)} \simeq (\hat{f}_S)_{i+1}^{(j)} + \frac{\partial \hat{f}_S}{\partial u_{i+1}} \Delta u^{(j)} = p_{i+1} \tag{5.7.11}$$

donde

$$\Delta u^{(j)} = u_{i+1}^{(j+1)} - u_{i+1}^{(j)} \tag{5.7.12}$$

Si se diferencia la ecuación (5.7.10) en el desplazamiento conocido $u_{i+1}^{(j)}$ da

$$\frac{\partial \hat{f}_S}{\partial u_{i+1}} = m\frac{\partial \ddot{u}}{\partial u_{i+1}} + c\frac{\partial \dot{u}}{\partial u_{i+1}} + \frac{\partial f_S}{\partial u_{i+1}}$$

donde las derivadas en términos de la inercia y el amortiguamiento en el lado derecho pueden determinarse a partir de las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9), respectivamente, las cuales se derivan de la ecuación de Newmark (5.4.1):

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial u_{i+1}} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \qquad\qquad \frac{\partial \dot{u}}{\partial u_{i+1}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$

Si se juntan las dos ecuaciones anteriores y se recuerda la definición de la rigidez tangente (sección 5.7.1), resulta

$$(\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)} \equiv \frac{\partial \hat{f}_S}{\partial u_{i+1}} = (\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \tag{5.7.13}$$

Con la definición anterior de $(\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)}$, la ecuación (7.5.11) puede escribirse como

$$(\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)}\Delta u^{(j)} = p_{i+1} - (\hat{f}_S)_{i+1}^{(j)} \equiv \hat{R}_{i+1}^{(j)} \tag{5.7.14}$$

Al sustituir las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9) en la ecuación (5.7.10), para después combinarla con el lado derecho de la ecuación (5.7.14), se obtiene la siguiente expresión para la fuerza residual:

$$\hat{R}_{i+1}^{(j)} = p_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(j)} - \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}c\right]\left(u_{i+1}^{(j)} - u_i\right) + \left[\frac{1}{\beta \Delta t}m + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)c\right]\dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{u}_i \tag{5.7.15}$$

Observe que la ecuación linealizada (5.7.14) para la j-ésima iteración del análisis dinámico es similar en forma a la correspondiente ecuación (5.7.4) del análisis estático. Sin embargo, existe una diferencia importante en las dos ecuaciones por lo que ahora se incluyen los términos de amortiguamiento e inercia, tanto en la rigidez tangente $\hat{k}_T$ (ecuación 5.7.13) como en la fuerza residual $\hat{R}$ (ecuación 5.7.15). Los términos primero, cuarto y quinto del lado derecho de la ecuación (5.7.15) no cambian de una iteración a la siguiente. Los términos segundo y tercero deben actualizarse con cada nueva estimación del desplazamiento $u^{(j)}{}_{i+1}$ durante la iteración.

La ecuación (5.7.14) proporciona las bases para el método de la iteración de Newton-Raphson, que se resume en el paso 3.0 de la tabla 5.7.1. Una vez que se determina u_{i+1}, el resto del cálculo procede como para los sistemas lineales; en particular, $\ddot{u}_{i+1}$ y $\dot{u}_{i+1}$ se determinan a partir de las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9), respectivamente. La tabla 5.7.1 resume el algoritmo de Newmark, tal como podría implementarse por computadora.

TABLA 5.7.1 MÉTODO DE NEWMARK: SISTEMAS NO LINEALES

Casos especiales

(1) Método de la aceleración promedio ($\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$)

(2) Método de la aceleración lineal ($\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$)

1.0 *Cálculos iniciales*

1.1 Determinación del estado: $(f_S)_0$ y $(k_T)_0$.

1.2 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - (f_S)_0}{m}$.

1.3 Seleccione Δt.

1.4 $a_1 = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}m + \dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}c;\quad a_2 = \dfrac{1}{\beta\Delta t}m + \left(\dfrac{\gamma}{\beta} - 1\right)c;\quad$ y

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c.$$

2.0 *Cálculos para cada instante de tiempo,* $i = 0, 1, 2, \ldots$

2.1 Inicialice $j = 1$, $u_{i+1}^{(j)} = u_i$, $(f_S)_{i+1}^{(j)} = (f_S)_i$, y $(k_T)_{i+1}^{(j)} = (k_T)_i$.

2.2 $\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + a_1\, u_i + a_2\, \dot{u}_i + a_3\, \ddot{u}_i$.

3.0 *Para cada iteración,* $j = 1, 2, 3 \ldots$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(j)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(j)} - a_1\, u_{i+1}^{(j)}$.

3.2 Verifique la convergencia; si los criterios de aceptación no se cumplen, realice los pasos 3.3 a 3.7, de lo contrario, omita estos pasos y vaya al paso 4.0.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)} = (k_T)_{i+1}^{(j)} + a_1$.

3.4 $\Delta u^{(j)} = \hat{R}_{i+1}^{(j)} \div (\hat{k}_T)_{i+1}^{(j)}$.

3.5 $u_{i+1}^{(j+1)} = u_{i+1}^{(j)} + \Delta u^{(j)}$.

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(j+1)}$ y $(k_T)_{i+1}^{(j+1)}$.

Reemplace j por $j + 1$ y repita los pasos 3.1 a 3.6; indique el valor final como u_{i+1}.

4.0 *Cálculos de la velocidad y la aceleración*

4.1 $\dot{u}_{i+1} = \dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}(u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i$.

4.2 $\ddot{u}_{i+1} = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \dfrac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \left(\dfrac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_i$.

5.0 *Repetición para el siguiente paso.* Reemplace i por $i + 1$ y aplique los pasos 2.0 a 4.0 para el siguiente paso de tiempo.

Ejemplo 5.5

Un sistema de 1GDL tiene las mismas propiedades que en el ejemplo 5.1, excepto que la relación fuerza restauradora-deformación es elastoplástica con deformación de cedencia $u_y = 0.75$ pulg y fuerza de cedencia $f_y = 7.5$ kips (figura E5.5). Determine la respuesta $u(t)$ de este sistema (que inicia desde el reposo) a la fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo que se muestra en la figura E5.1, utilizando el método de la aceleración promedio constante con $\Delta t = 0.1$ s y la iteración de Newton-Raphson.

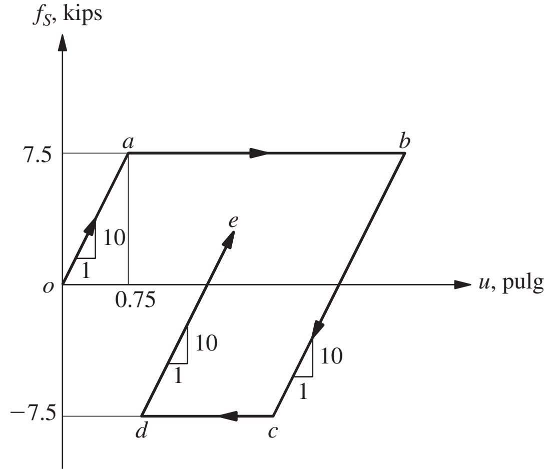


Figura E5.5

Solución

1.0 *Cálculos iniciales*

$$m = 0.2533 \qquad k = 10 \qquad c = 0.1592$$

$$u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = 0 \qquad p_0 = 0$$

1.1 Determinación del estado: $(f_S)_0 = 0$ y $(k_T)_0 = k = 10$.

1.2 $\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - (f_S)_0}{m} = 0.$

1.3 $\Delta t = 0.1.$

1.4 $a_1 = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}m + \dfrac{2}{\Delta t}c = 104.5040;\quad a_2 = \dfrac{4}{\Delta t}m + c = 10.2912;$ y $a_3 = m = 0.2533.$

Como ejemplo, los cálculos de los pasos 2.0, 3.0 y 4.0 en la tabla 5.7.1 se implementan de la siguiente manera para el paso de tiempo que comienza en 0.3 s y termina en 0.4 s.

2.0 *Cálculos para* $i = 3$

2.1 Inicialice $j = 1$

$u_{i+1}^{(1)} = u_i = 0.6121$, $(f_S)_{i+1}^{(1)} = (f_S)_i = 6.1206$ y $(k_T)_{i+1}^{(1)} = (k_T)_i = 10.$

2.2 $\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + 104.5u_i + 10.29\dot{u}_i + 0.2533\ddot{u}_i = 123.9535.$

3.0 *Primera iteración,* $j = 1$

3.1
$$\hat{R}_{i+1}^{(1)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(1)} - 104.5u_{i+1}^{(1)}$$
$$= 123.9535 - 6.1206 - 63.9630 = 53.8698.$$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(1)}\right| = 53.8698$ excede a $\varepsilon_R = 10^{-3}$, elegido para este ejemplo, se realizan los pasos del 3.3 al 3.7.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1}^{(1)} = (k_T)_{i+1}^{(1)} + a_1 = 10 + 104.5040 = 114.5040.$

3.4 $\Delta u^{(1)} = \hat{R}_{i+1}^{(1)} \div (\hat{k}_T)_{i+1}^{(1)} = 53.8698 \div 114.5040 = 0.4705.$

3.5 $u_{i+1}^{(2)} = u_{i+1}^{(1)} + \Delta u^{(1)} = 0.6121 + 0.4705 = 1.0825.$

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(2)}$ y $(k_T)_{i+1}^{(2)}$

$(f_S)_{i+1}^{(2)} = (f_S)_i + k(u_{i+1}^{(2)} - u_i) = 6.1206 + (10 \times 0.4705) = 10.8253.$

Porque $(f_S)_{i+1}^{(2)} > f_y$, $(f_S)_{i+1}^{(2)} = f_y = 7.5$ y $(k_T)_{i+1}^{(2)} = 0.$

3.0 *Segunda iteración*, $j = 2$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(2)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(2)} - 104.5u_{i+1}^{(2)}$

$= 123.9535 - 7.5 - 113.1282 = 3.3253.$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(2)}\right| = 3.3253$ excede a ε_R, se realizan los pasos del 3.3 al 3.7.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1}^{(2)} = (k_T)_{i+1}^{(2)} + a_1 = 0 + 104.5040 = 104.5040.$

3.4 $\Delta u^{(2)} = \hat{R}_{i+1}^{(2)} \div (\hat{k}_T)_{i+1}^{(2)} = 3.3253 \div 104.5040 = 0.0318.$

3.5 $u_{i+1}^{(3)} = u_{i+1}^{(2)} + \Delta u^{(2)} = 1.0825 + 0.0318 = 1.1143.$

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(3)}$ y $(k_T)_{i+1}^{(3)}$

$(f_S)_{i+1}^{(3)} = (f_S)_i + k(u_{i+1}^{(3)} - u_i) = 6.1206 + (10 \times 0.5023) = 11.1434.$

Porque $(f_S)_{i+1}^{(3)} > f_y$, $(f_S)_{i+1}^{(3)} = f_y = 7.5$ y $(k_T)_{i+1}^{(3)} = 0.$

3.0 *Tercera iteración*, $j = 3$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(3)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(3)} - 104.5u_{i+1}^{(3)}$
$= 123.9535 - 7.5 - 116.4535 = 0.$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(3)}\right| = 0$ es menor que ε_R, se omiten los pasos del 3.3 al 3.7; establezca $u_4 = u_4^{(3)} = 1.1143.$

4.0 *Cálculos de la velocidad y la aceleración*

4.1 $\dot{u}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i = \frac{2}{0.1}(1.1143 - 0.6121) - 4.683 = 5.3624.$

4.2 $\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_i - \ddot{u}_i$

$= \frac{4}{(0.1)^2}(1.1143 - 0.6121) - \frac{4}{0.1}4.6833 - 12.3719 = 1.2103.$

Estos cálculos para el paso de tiempo de 0.3 a 0.4 s se resumen en la tabla E5.5.

5.0 *Repetición para el siguiente paso de tiempo*. Después de reemplazar i por $i + 1$, se repiten los pasos 2.0 a 4.0 para los pasos de tiempo sucesivos y se resumen en la tabla E5.5.

TABLA E5.5 SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO CONSTANTE CON LA ITERACIÓN DE NEWTON-RAPHSON

t_i	p_i	$\hat{R}_i$ o $\hat{R}_i^{(j)}$	$(k_T)_i$ o $(k_T)_i^{(j)}$	$(\hat{k}_T)_i$ o $(\hat{k}_T)_i^{(j)}$	$\Delta u^{(j)}$	u_i o $u_i^{(j+1)}$	$(f_S)_i^{(j+1)}$	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$
0.0	0.0000		10			0.0000		0.0000	0.0000
0.1	5.0000	5.0000	10	114.504	0.0437	0.0437	0.4367	0.8733	17.4666
0.2	8.6603	21.6355	10	114.504	0.1889	0.2326	2.3262	2.9057	23.1801
0.3	10.0000	43.4481	10	114.504	0.3794	0.6121	6.1206	4.6833	12.3719
0.4	8.6603	53.8698	10	114.504	0.4705	1.0825	7.5000		
		3.3253	0	104.504	0.0318	1.1143	7.5000	5.3624	1.2103
0.5	5.0000	55.9918	0	104.504	0.5071	1.6214	7.5000	4.7792	−12.8735
0.6	0.0000	38.4230	0	104.504	0.3677	1.9891	7.5000	2.5742	−31.2270
0.7	0.0000	11.0816	0	104.504	0.1060	2.0951	7.5000	−0.4534	−29.3242
0.8	0.0000	−19.5936	0	104.504	−0.1875	1.9076	5.6251		
		1.8749	10	114.504	0.0164	1.9240	5.7888	−2.9690	−20.9876
0.9	0.0000	−41.6593	10	114.504	−0.3638	1.5602	2.1506	−4.3075	−5.7830
1.0	0.0000	−47.9448	10	114.504	−0.4187	1.1415	−2.0366	−4.0668	10.5962

Durante los siguientes tres pasos de tiempo (después de 0.4 s), el sistema está en la rama de cedencia *ab*. En otras palabras, la rigidez $k_i = 0$ se mantiene constante y no es necesaria una iteración. Entre 0.6 y 0.7 s la velocidad cambia de signo positivo a negativo, lo que implica que la deformación comienza a disminuir, el sistema comienza a descargarse a lo largo de la rama *bc*, y la rigidez $k_i = 10$. Sin embargo, se ha ignorado este cambio durante el paso de tiempo, lo que implica que el sistema permanece en la rama *ab* y no se requiere una iteración.

El cálculo para el paso de tiempo que inicia en 0.6 s puede hacerse más preciso al buscar, mediante un proceso iterativo, el instante en el cual $\dot{u} = 0$. Entonces, los cálculos pueden llevarse a cabo con la rigidez $k_i = 0$ durante la primera parte del paso de tiempo y con $k_i = 10$ en la segunda parte del paso de tiempo. De manera alternativa, puede usarse un paso de tiempo más pequeño para mejorar la precisión.

Observe que la solución durante un paso de tiempo no es exacta porque el equilibrio se satisface sólo al principio y al final de dicho paso, no en todos los instantes de tiempo que están dentro del mismo. Esto implica una violación a la ecuación del balance de energía (capítulo 7). La discrepancia en el balance de energía, que por lo general se calcula al final de la excitación, es una indicación del error en la solución numérica.

Ejemplo 5.6

Repita el ejemplo 5.5 usando la iteración de Newton-Raphson modificada dentro de cada paso de tiempo con $\Delta t = 0.1$ s.

Solución El procedimiento de la tabla 5.7.1 se modifica para utilizar la rigidez inicial al comienzo de un paso de tiempo como la rigidez constante para todas las iteraciones en dicho paso de tiempo. Los cálculos en los pasos 1.0 y 2.0 son idénticos a los presentados en el ejemplo 5.5, pero el paso 3.0 ahora es diferente. Para ilustrar estas diferencias, el paso 3.0 de la tabla 5.7.1 modificada se realizó para el paso de tiempo que comienza en 0.3 s y termina en 0.4 s.

3.0 *Primera iteración*, $j = 1$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(1)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(1)} - 104.5\,u_{i+1}^{(1)}$
$= 123.9535 - 6.1206 - 63.9630 = 53.8698.$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(1)}\right| = 53.8698$ excede a ε_R, se realizan los pasos del 3.3 al 3.7.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1} = (k_T)_{i+1} + a_1 = 10 + 104.5040 = 114.5040.$

3.4 $\Delta u^{(1)} = \hat{R}_{i+1}^{(1)} \div (\hat{k}_T)_{i+1} = 53.8698 \div 114.5040 = 0.4705.$

3.5 $u_{i+1}^{(2)} = u_{i+1}^{(1)} + \Delta u^{(1)} = 0.6121 + 0.4705 = 1.0825.$

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(2)}$

$$(f_S)_{i+1}^{(2)} = (f_S)_i + k\left(u_{i+1}^{(2)} - u_i\right) = 6.1206 + (10 \times 0.4705) = 10.8253.$$

Porque $(f_S)_{i+1}^{(2)} > f_y$, $(f_S)_{i+1}^{(2)} = f_y = 7.5.$

3.0 *Segunda iteración*, $j = 2$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(2)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(2)} - 104.5u_{i+1}^{(2)}$
$= 123.9535 - 7.5 - 113.1282 = 3.3253.$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(2)}\right| = 3.3253$ excede a ε_R, se realizan los pasos del 3.3 al 3.7.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1} = 114.5040.$

3.4 $\Delta u^{(2)} = \hat{R}_{i+1}^{(2)} \div (\hat{k}_T)_{i+1} = 3.3253 \div 114.5040 = 0.0290.$

3.5 $u_{i+1}^{(3)} = u_{i+1}^{(2)} + \Delta u^{(2)} = 1.0825 + 0.0290 = 1.1116.$

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(3)}$

$$(f_S)_{i+1}^{(3)} = (f_S)_i + k(u_{i+1}^{(3)} - u_i) = 6.1206 + (10 \times 0.5000) = 11.1157.$$

Porque $(f_S)_{i+1}^{(3)} > f_y$, $(f_S)_{i+1}^{(3)} = f_y = 7.5.$

3.0 *Tercera iteración*, $j = 3$

3.1 $\hat{R}_{i+1}^{(3)} = \hat{p}_{i+1} - (f_S)_{i+1}^{(3)} - 104.5u_{i+1}^{(3)}$
$= 123.9535 - 7.5 - 116.1631 = 0.2904.$

3.2 Verificación de la convergencia: como $\left|\hat{R}_{i+1}^{(3)}\right| = 0.2904$ excede a ε_R, se realizan los pasos del 3.3 al 3.7.

3.3 $(\hat{k}_T)_{i+1} = 114.5040.$

3.4 $\Delta u^{(3)} = \hat{R}_{i+1}^{(3)} \div (\hat{k}_T)_{i+1} = 0.2904 \div 114.5040 = 0.0025.$

3.5 $u_{i+1}^{(4)} = u_{i+1}^{(3)} + \Delta u^{(3)} = 1.1116 + 0.0025 = 1.1141.$

3.6 Determinación del estado: $(f_S)_{i+1}^{(4)}$

$(f_S)_{i+1}^{(4)} = (f_S)_i + k(u_{i+1}^{(4)} - u_i) = 6.1206 + (10 \times 0.5020) = 11.1410.$

Porque $(f_S)_{i+1}^{(4)} > f_y$, $(f_S)_{i+1}^{(4)} = f_y = 7.5.$

Estos cálculos y los realizados para las iteraciones adicionales, durante el paso de tiempo que va de 0.3 a 0.4 s, se muestran en la tabla E5.6.

TABLA E5.6 SOLUCIÓN NUMÉRICA MEDIANTE EL MÉTODO DE LA ACELERACIÓN PROMEDIO CONSTANTE CON LA ITERACIÓN DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADA

t_i	p_i	$\hat{R}_i$ o $\hat{R}_i^{(j)}$	$(k_T)_i$ o $(k_T)_i^{(j)}$	$(\hat{k}_T)_i$ o $(\hat{k}_T)_i^{(j)}$	$\Delta u^{(j)}$	u_i o $u_i^{(j+1)}$	$(f_S)_i^{(j+1)}$	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$
0.0	0.0000		10			0.0000		0.0000	0.0000
0.1	5.0000	5.0000	10	114.504	0.0437	0.0437	0.4367	0.8733	17.4666
0.2	8.6603	21.6355	10	114.504	0.1889	0.2326	2.3262	2.9057	23.1801
0.3	10.0000	43.4481	10	114.504	0.3794	0.6121	6.1206	4.6833	12.3719
0.4	8.6603	53.8698	10	114.504	0.4705	1.0825	7.5000		
		3.3253			0.02904	1.1116	7.5000		
		0.2904			2.536E-3	1.1141	7.5000		
		2.536E-2			2.215E-4	1.1143	7.5000		
		2.215E-3			1.934E-5	1.1143	7.5000	5.3623	1.2095
0.5	5.0000	55.9912	0	104.504	0.5071	1.6214	7.5000	4.7791	−12.8734
0.6	0.0000	38.4222	0	104.504	0.3677	1.9891	7.5000	2.5741	−31.2270
0.7	0.0000	11.0810	0	104.504	0.1060	2.0951	7.5000	−0.4534	−29.3242
0.8	0.0000	−19.5936	0	104.504	−0.1875	1.9076	5.6250		
		1.8750			1.794E-2	1.9256	5.8044		
		−0.1794			−1.717E-3	1.9238	5.7873		
		1.717E-2			1.643E-4	1.9240	5.7889		
		1.643E-3			−1.572E-5	1.9240	5.7888	−2.9690	−20.9879
0.9	0.0000	−41.6600	10	114.504	−0.3638	1.5602	2.1505	−4.3076	−5.7824
1.0	0.0000	−47.9451	10	114.504	−0.4187	1.1414	−2.0367	−4.0668	10.5969

La iteración de Newton-Raphson original converge con mayor rapidez que la modificada, como es evidente al comparar las tablas E5.5 y E5.6 que resumen los resultados de los dos métodos, respectivamente. Observe lo siguiente: (1) los resultados de la primera iteración son idénticos en los dos casos porque ambos usan la rigidez tangente inicial. En consecuencia, la fuerza restauradora $(f_S)_{i+1}^{(2)}$ y la fuerza residual $\hat{R}_{i+}^{(2)}$ son idénticas. (2) Si en la segunda iteración se usa la rigidez tangente actual $(k_T)_{i+1}^{(2)}$ y el valor asociado de $(\hat{k}_T)_{i+1}^{(2)}$ de la ecua-

ción (5.7.13), el método de Newton-Raphson original conduce a una fuerza residual menor $\hat{R}_{i+1}^{(3)} = 0$ (ejemplo 5.5) en comparación con $\hat{R}_{i+1}^{(3)} = 0.2904$ del método de Newton-Raphson modificado (ejemplo 5.6). (3) Como ahora en cada iteración la fuerza residual $\hat{R}_{i+1}^{(j)}$ es más pequeña, se logra la convergencia en menos iteraciones; para el paso de tiempo de este ejemplo se requieren dos iteraciones del método de Newton-Raphson original (ejemplo 5.5), mientras que con el método de Newton-Raphson modificado se necesitan cinco (ejemplo 5.6).

LECTURAS ADICIONALES

Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996, capítulo 9.

Filippou, F. C. y Fenves, G. L., "Methods of Analysis for Earthquake-Resistant Structures", en: *Earthquake Engineering: From Engineering Seismology to Performance-Based Engineering* (eds. Y. Bozorgnia y V. V. Bertero), CRC Press, Nueva York, 2004, capítulo 6.

Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987, capítulo 9.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, 2a. ed., A. A. Balkema Publishers, Lisse, Los Países Bajos, 2002, capítulo 8.

Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **85**, 1959, pp. 67-94.

PROBLEMAS

5.1. En la sección 5.2 se desarrollaron fórmulas de recurrencia para resolver numéricamente la ecuación de movimiento de un sistema lineal de 1GDL, con base en la interpolación lineal de la función de excitación $p(t)$ durante cada paso de tiempo. Desarrolle un procedimiento similar utilizando una representación constante por partes de la función de excitación, en la que el valor de la fuerza en el intervalo de t_i a t_{i+1} sea una constante igual a $\tilde{p}_i$ (figura P5.1). Demuestre que las fórmulas de recurrencia para la respuesta de un sistema no amortiguado son

$$u_{i+1} = u_i \cos(\omega_n \Delta t_i) + \dot{u}_i \frac{\operatorname{sen}(\omega_n \Delta t_i)}{\omega_n} + \frac{\tilde{p}_i}{k}[1 - \cos(\omega_n \Delta t_i)]$$

$$\dot{u}_{i+1} = u_i[-\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n \Delta t_i)] + \dot{u}_i \cos(\omega_n \Delta t_i) + \frac{\tilde{p}_i}{k}\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n \Delta t_i)$$

Especifique las fórmulas de recurrencia para la siguiente definición de la fuerza constante por partes: $\tilde{p}_i = (p_i + p_{i+1})/2$. Escriba las fórmulas de recurrencia en la forma siguiente:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1}$$

con ecuaciones para las constantes $A, B, C, \ldots, D'$.

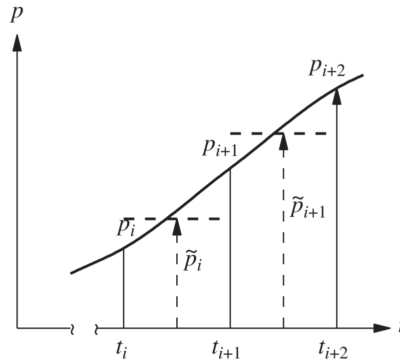


Figura P5.1

***5.2** Resuelva el ejemplo 5.1 utilizando la aproximación constante por partes de la función de fuerza; desprecie el amortiguamiento en el sistema de 1GDL.

***5.3** Resuelva el problema del ejemplo 5.1 por el método de la diferencia central, implementado mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección, con $\Delta t = 0.1$ s. Tenga en cuenta que este problema se resolvió en el ejemplo 5.2 y que los resultados se presentan en la tabla E5.2.

***5.4** Repita el problema 5.3 con $\Delta t = 0.05$ s. ¿Cómo afecta el paso de tiempo a la precisión de la solución?

***5.5** Un sistema de 1GDL tiene la misma masa y rigidez que en el ejemplo 5.1, pero la fracción de amortiguamiento es $\zeta = 20\%$. Determine la respuesta de este sistema ante la excitación del ejemplo 5.1 mediante el método de la diferencia central utilizando $\Delta t = 0.05$ s. Grafique la respuesta en función del tiempo, compare la solución con la del problema 5.3 y comente sobre cómo afecta el amortiguamiento a la respuesta pico.

***5.6** Resuelva el problema del ejemplo 5.1 mediante el método de la diferencia central con $\Delta t = \frac{1}{3}$ s. Traslade su solución a 2 s y comente sobre lo que ocurre con la solución y por qué.

***5.7** Resuelva el problema del ejemplo 5.1 por el método de la aceleración promedio constante, implementado mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección, con $\Delta t = 0.1$ s. Tenga en cuenta que este problema se resolvió en el ejemplo 5.3 y que los resultados se presentan en la tabla E5.3. Compare sus resultados con los del ejemplo 5.2 y comente sobre la precisión relativa de los métodos de la aceleración promedio constante y de la diferencia central.

***5.8** Repita el problema 5.7 usando $\Delta t = 0.05$ s. ¿Cómo afecta el paso de tiempo a la precisión de la solución?

***5.9** Resuelva el problema del ejemplo 5.1 mediante el método de la aceleración promedio constante con $\Delta t = \frac{1}{3}$ s. Traslade su solución a 2 s, y comente sobre la precisión y la estabilidad de la solución.

***5.10** Resuelva el problema del ejemplo 5.1 por el método de la aceleración lineal, implementado mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección, con $\Delta t = 0.1$ s. Tenga en cuenta que este problema se resolvió en el ejemplo 5.4 y que los resultados se presentan en la tabla E5.4. Compare su solución con la del ejemplo 5.3 y comente sobre la precisión relativa de los métodos de la aceleración promedio constante y la aceleración lineal.

***5.11** Repita el problema 5.10 con $\Delta t = 0.05$ s. ¿Cómo afecta el paso de tiempo a la precisión de la solución?

*Indica que la solución del problema requiere una computadora.

***5.12** Resuelva el problema del ejemplo 5.5 por el método de la diferencia central, implementado mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección, con $\Delta t = 0.05$ s.

***5.13** Resuelva el ejemplo 5.5 por el método de la aceleración promedio constante con una iteración de Newton-Raphson, implementada mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección. Tenga en cuenta que este problema se resolvió en el ejemplo 5.5 y que los resultados se presentan en la tabla E5.5.

***5.14** Resuelva el ejemplo 5.6 por el método de la aceleración promedio constante con una iteración de Newton-Raphson modificada, implementada mediante un programa de computadora en el lenguaje de su elección. Tenga en cuenta que este problema se resolvió en el ejemplo 5.6 y que los resultados se presentan en la tabla E5.6.

***5.15** Resuelva el ejemplo 5.5 mediante el método de la aceleración lineal, utilizando una iteración de Newton-Raphson y $\Delta t = 0.1$ s.

***5.16** Resuelva el ejemplo 5.5 mediante el método de la aceleración lineal, utilizando una iteración de Newton-Raphson modificada y $\Delta t = 0.1$ s.

*Indica que la solución del problema requiere una computadora.

6

Respuesta sísmica de sistemas lineales

AVANCE

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de la dinámica estructural es el análisis de la respuesta de las estructuras a los movimientos del terreno causados por un sismo. En este capítulo se estudia la respuesta sísmica de sistemas lineales de 1GDL. Por definición, los sistemas lineales son sistemas elásticos y también se hace referencia a éstos como sistemas elástico-lineales para enfatizar ambas propiedades. Debido a que los sismos pueden causar daño a muchas estructuras, también se tiene interés en la respuesta de los sistemas que han fluido o inelásticos, el tema del capítulo 7.

La primera parte de este capítulo se enfoca en la respuesta a los sismos (deformación, fuerzas elementales internas, esfuerzos, etcétera) de estructuras simples como una función del tiempo y la forma en que esta respuesta depende de los parámetros del sistema. Después, se presenta el concepto del espectro de respuesta, que es fundamental para la ingeniería sísmica, así como los procedimientos para determinar la respuesta máxima de los sistemas, obtenida directamente del espectro de respuesta. A lo que le sigue un estudio de las características de los espectros de respuesta de los sismos, que conduce al espectro de diseño para diseñar nuevas estructuras y a la evaluación de la seguridad de las estructuras existentes contra sismos futuros. Por último, se identifican las diferencias importantes entre los espectros de diseño y de respuesta, y el capítulo concluye con un análisis de dos tipos de espectro de respuesta que no se usan comúnmente.

6.1 EXCITACIÓN SÍSMICA

Para los propósitos de la ingeniería, la variación en el tiempo de la aceleración del terreno es la forma más útil de definir el movimiento del terreno durante un sismo. La aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ aparece del lado derecho de la ecuación diferencial (1.7.4) que rige la

respuesta de las estructuras a la excitación sísmica. Así, para una aceleración del terreno dada, el problema a resolver se define por completo para un sistema de 1GDL con propiedades conocidas de masa, rigidez y amortiguamiento.

El instrumento básico para registrar las tres componentes del movimiento del terreno durante un sismo es el acelerógrafo de movimiento fuerte (figura 6.1.1), que no registra de manera continua pero se activa con la llegada de las primeras ondas del sismo. Esto se debe a que, incluso en las regiones propensas a sismos como California y Japón, es posible que no haya ningún movimiento fuerte del terreno producido por un sismo y que deba registrarse durante meses, o incluso años. En consecuencia, el registro continuo de cientos de tales instrumentos

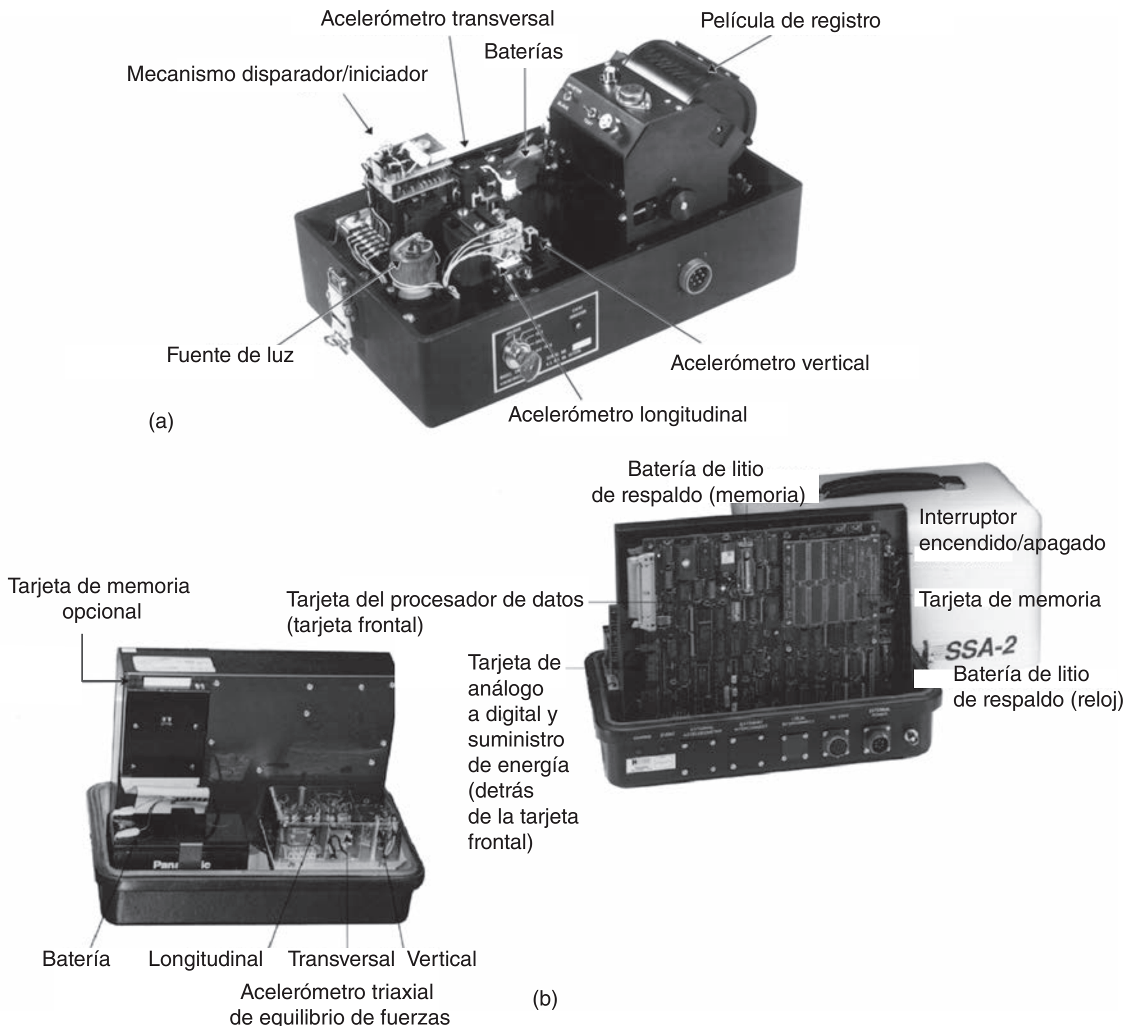


Figura 6.1.1 Acelerógrafos de movimiento fuerte: (a) SMA-1, un instrumento de registro analógico con frecuencia natural no amortiguada de 25 Hz y 60% de amortiguamiento crítico; (b) SSA-2, un instrumento de registro digital con frecuencia natural no amortiguada de 50 Hz y 70% de amortiguamiento crítico. (Cortesía de Kinemetrics, Inc.).

sería un ejercicio inútil. Después de la activación, el registro continúa durante unos minutos o hasta que el movimiento del terreno vuelve a descender a niveles imperceptibles. Es evidente que los instrumentos deben recibir mantenimiento y repararse con regularidad para que produzcan un registro al momento de ocurrir un movimiento.

El elemento básico de un acelerógrafo es un elemento transductor, que en su forma más simple es un sistema de 1GDL de masa-resorte-amortiguador (sección 3.7). Por lo tanto, el elemento transductor se caracteriza por su frecuencia natural f_n y su fracción de amortiguamiento viscoso ζ; por lo general, $f_n = 25$ Hz y $\zeta = 60\%$ para los acelerógrafos analógicos modernos y $f_n = 50$ Hz y $\zeta = 70\%$ en los acelerógrafos digitales modernos.[†] Estos parámetros del transductor permiten que el instrumento digital haga un registro, sin exceso de distorsión, de las funciones de aceleración-tiempo con frecuencias muy bajas de hasta, por ejemplo, 30 Hz; el instrumento analógico es exacto en un intervalo de frecuencias más estrecho, por ejemplo, de hasta 15 Hz.

Lo ideal sería que hubiera muchas estaciones instrumentadas antes de un sismo para registrar los movimientos del suelo. Sin embargo, al no saber con exactitud cuándo y dónde se producirán los sismos y al tener presupuestos limitados para la instalación y mantenimiento de los instrumentos, no siempre es posible obtener tales registros en la región que presenta movimientos fuertes. Por ejemplo, no existen registros de fuertes movimientos que se produjeron a partir de dos sismos que causaron mucha destrucción: Killari, Maharashtra, India, el 30 de septiembre de 1993 y Guam, un territorio de Estados Unidos, el 8 de agosto de 1993; sólo hay un registro del devastador sismo en Haití del 12 de enero de 2010. En contraste, puede esperarse que un sismo en Japón o California, dos regiones bien instrumentadas, produzcan un gran número de registros. Por ejemplo, el sismo de magnitud 9.0 en Tohoku el 11 de marzo de 2011, cerca de la costa este de Honshu, Japón, produjo varios cientos de registros de una fuerte sacudida.

El primer acelerograma de un movimiento fuerte se registró durante el sismo de Long Beach de 1933, y para abril de 2011, se habían obtenido más de 3000 registros. Como era de esperarse, la mayoría de estos registros son de movimientos pequeños y sólo una fracción de ellos tiene una aceleración de 20% g o más. La distribución geográfica de estos registros de movimiento del terreno es muy desigual. Una gran mayoría de ellos son de California, Japón y Taiwán; la mayoría de los registros son de seis sismos intensos: el sismo de San Fernando del 9 de febrero de 1971, el de Loma Prieta del 17 de octubre de 1989, y el de Northridge del 17 de enero de 1994, en California; el sismo de Kobe del 16 de enero de 1995 y el de Tohoku del 11 de marzo de 2011, en Japón; y el sismo de Chi-Chi del 20 de septiembre de 1999 en Taiwán. En la figura 6.1.2 se muestran los valores máximos de las aceleraciones registradas en muchos lugares diferentes durante el sismo de Loma Prieta. Estos valores de aceleración son más grandes cerca del epicentro del sismo y tienden a disminuir con la distancia a la falla que lo provocó. Sin embargo, las aceleraciones registradas a distancias similares pueden variar mucho debido a diferentes factores, en especial por las condiciones locales del terreno.

La figura 6.1.3 muestra una colección de registros representativos de la aceleración contra el tiempo, durante movimientos sísmicos en la región de mayor intensidad. Para cada sitio y

[†]Es necesario tener en cuenta que la mayoría, aunque no todos, de los acelerógrafos digitales utilizan un tipo de transductor de equilibrio de fuerzas, para el cual dos parámetros no definirán por completo la respuesta del instrumento. Esta respuesta es la de un sistema de orden superior (al sistema masa-resorte- amortiguador).

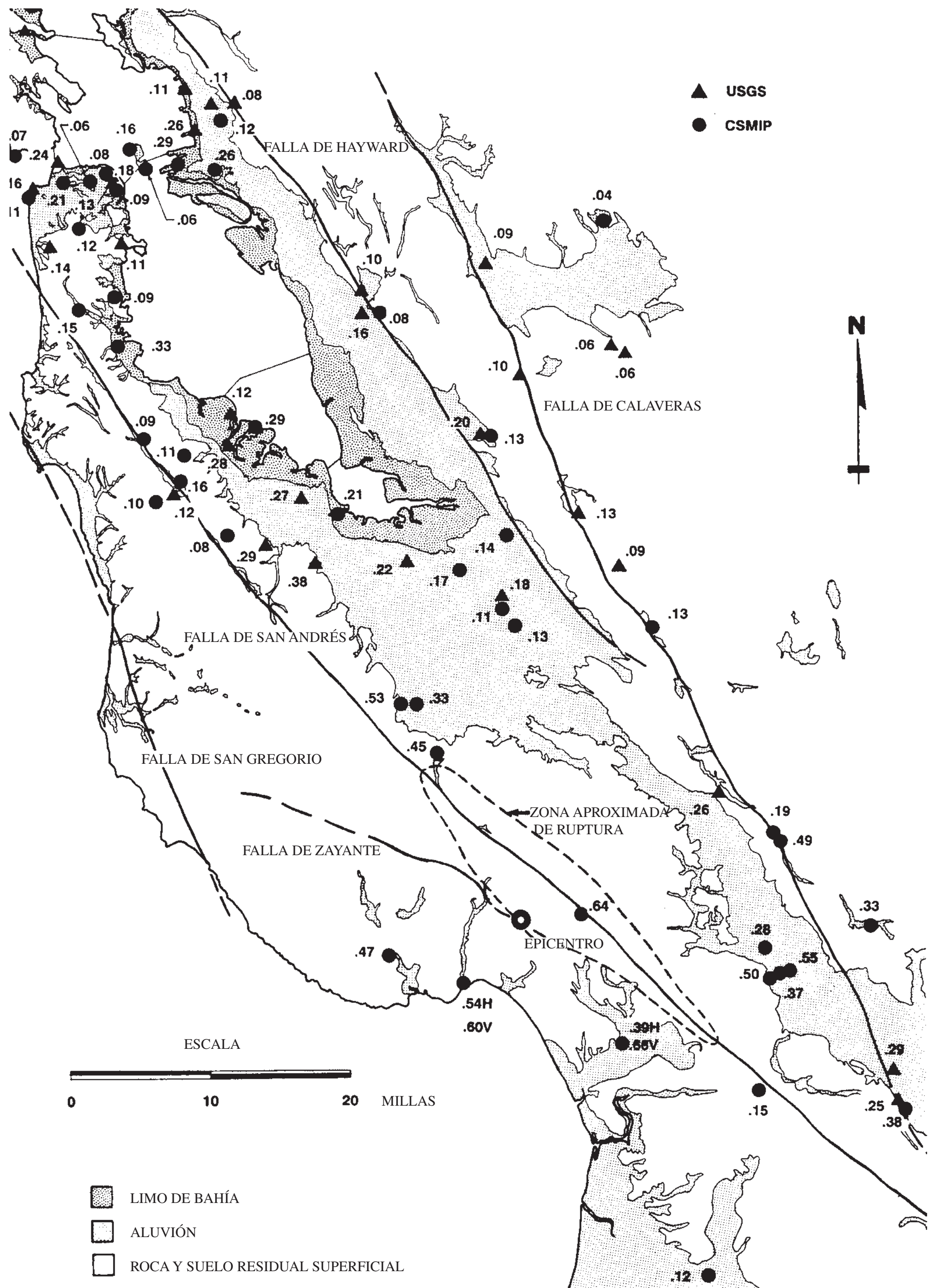


Figura 6.1.2 Aceleraciones máximas horizontales del terreno, registradas durante el sismo de Loma Prieta el 17 de octubre de 1989. (Cortesía de R. B.Seed).

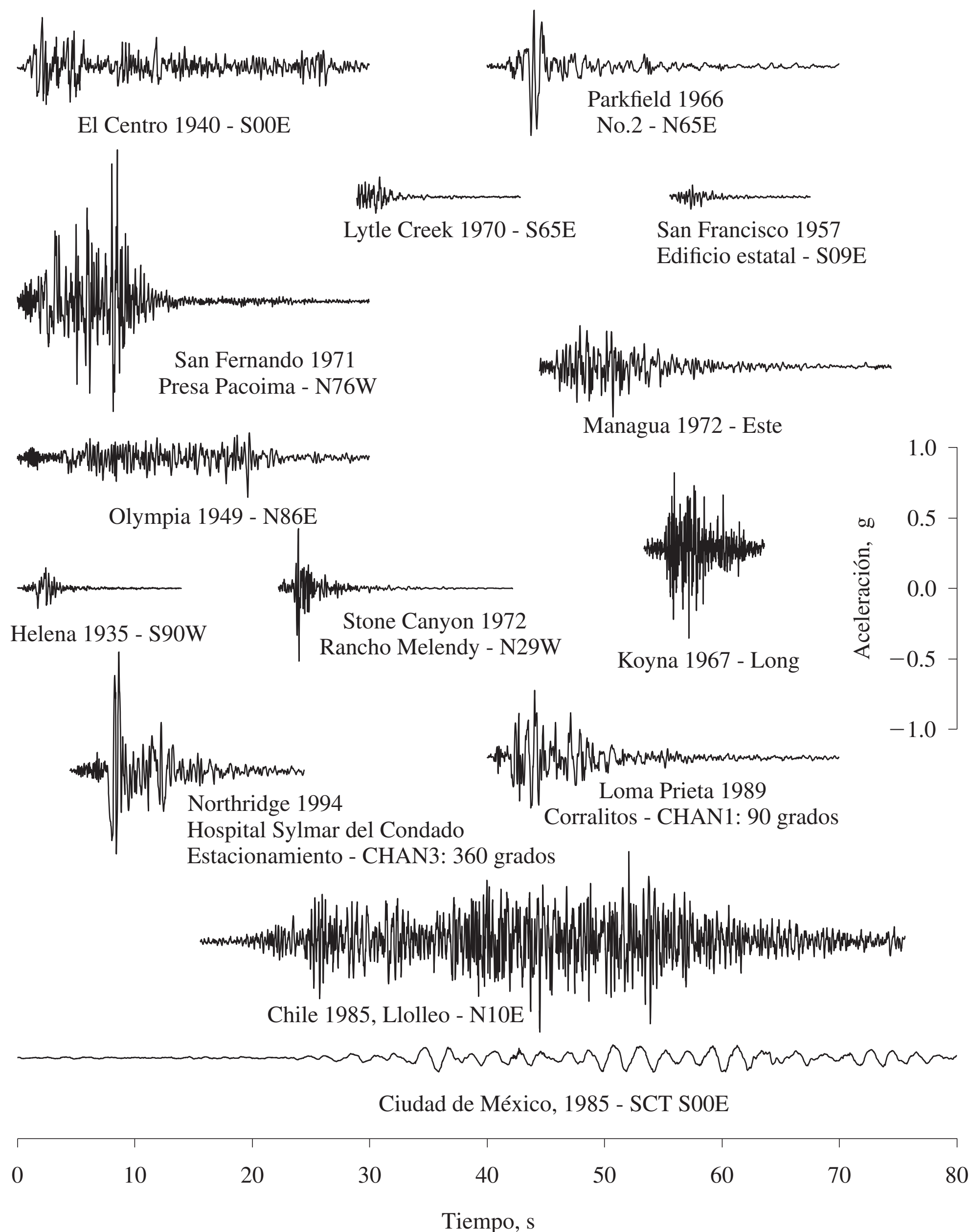


Figura 6.1.3 Movimientos del terreno registrados durante varios sismos. [Basado en parte en Hudson (1979)].

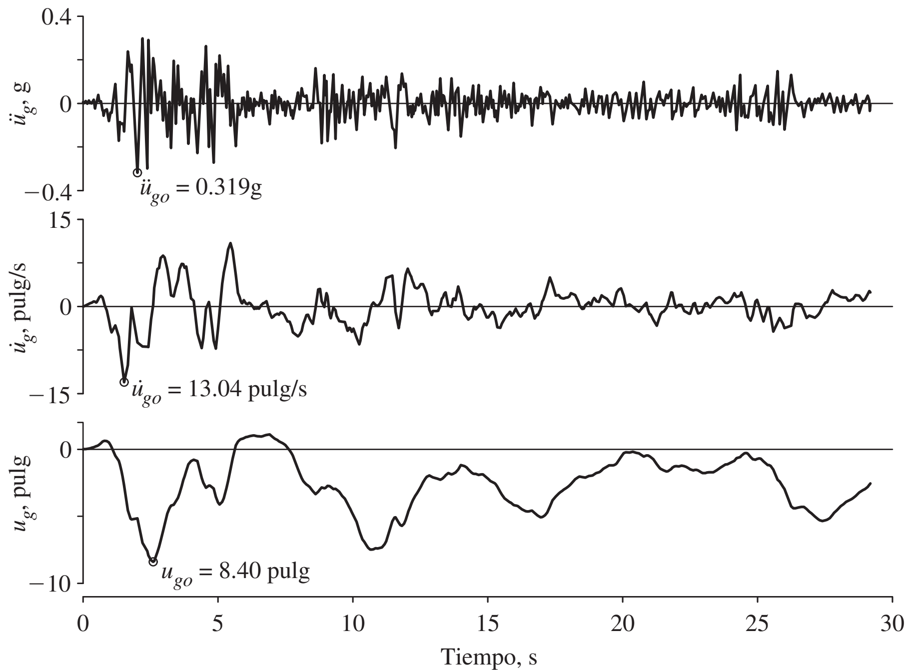


Figura 6.1.4 Componente norte-sur de la aceleración horizontal del terreno registrada en la subestación del distrito de riego del Valle Imperial, en El Centro, California, durante el sismo del Valle Imperial el 18 de mayo de 1940. La velocidad y el desplazamiento del suelo se calcularon mediante la integración de su aceleración.

sismo se da un componente horizontal. Todos se graficaron en la misma escala de aceleración y tiempo. La gran y tan real variabilidad de la amplitud, la duración y el aspecto general de los diferentes registros puede verse con claridad. Uno de estos registros se amplía en la figura 6.1.4. Éste es el componente norte-sur del movimiento del terreno registrado en un sitio de El Centro, California, durante el sismo del Valle Imperial el 18 de mayo de 1940.† A esta escala es evidente que la aceleración del terreno varía con el tiempo de una manera muy irregular. Sin importar lo irregular que sea, se supone que el movimiento del terreno es conocido e independiente de la respuesta estructural. Esto equivale a decir que el terreno de cimentación es rígido, lo que implica que no hay ninguna interacción entre el terreno y la estructura. Si la estructura estuviera cimentada en un terreno muy flexible, el movimiento de la estructura y las fuerzas resultantes impuestas sobre el suelo subyacente podrían modificar el movimiento de la base.

La aceleración del suelo se define mediante valores numéricos en instantes de tiempo discretos. Estos instantes de tiempo deben estar muy espaciados para describir con precisión la variación tan irregular de la aceleración en el tiempo. Por lo general, el intervalo de tiempo se elige entre $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{50}$ de segundo, con lo que se requieren entre 1500 y 3000 ordenadas para describir el movimiento del terreno de la figura 6.1.4.

†Esta aceleración del suelo se utiliza mucho en este libro y, por razones de brevedad, se llamará *movimiento del terreno de El Centro*, aunque en el mismo sitio se han registrado tres componentes de movimiento durante varios sismos a partir de 1940.

La curva superior de la figura 6.1.4 muestra la variación de la aceleración del terreno de El Centro a través del tiempo. La aceleración máxima del terreno $\ddot{u}_{go}$ es de 0.319g. La segunda curva es la velocidad del terreno, que se obtiene al integrar la función de aceleración-tiempo. La velocidad máxima del terreno $\dot{u}_{go}$ es de 13.04 pulg/s. Si se integra la velocidad del terreno se obtiene su desplazamiento, el cual se presenta en el trazo inferior. El desplazamiento máximo del terreno u_{go} es de 8.40 pulg. La velocidad y el desplazamiento del terreno son difíciles de determinar con precisión, porque los acelerógrafos analógicos no registran la parte inicial (hasta que el instrumento se activa) de la función de aceleración-tiempo y, por lo tanto, se desconoce la línea base (aceleración cero). Los acelerógrafos digitales superan este problema proporcionando una memoria corta de modo que pueda medirse el inicio del movimiento del terreno.

Existen varias versiones distintas del movimiento de terreno de El Centro. Las variaciones entre éstas surgen de las diferencias en (1) cómo se digitalizó el trazo original analógico de la aceleración en función del tiempo para convertirlo en datos numéricos, y (2) el procedimiento elegido para introducir la línea de base perdida en el registro. En este libro se utiliza la versión mostrada en la figura 6.1.4 y tabulada en el apéndice 6.

6.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación (1.7.4) rige el movimiento de un sistema lineal de 1GDL (figura 6.2.1) sometido a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Al dividir esta ecuación entre m resulta

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \tag{6.2.1}$$

Resulta claro que para una $\ddot{u}_g(t)$ dada, la respuesta de la deformación $u(t)$ del sistema depende sólo de la frecuencia natural ω_n o del periodo natural T_n del sistema y de su fracción de amortiguamiento, ζ; escrito de manera formal, $u \equiv u(t, T_n, \zeta)$. Así, cualesquiera dos sistemas que tengan los mismos valores de T_n y ζ tendrán la misma respuesta de deformación $u(t)$, aunque uno de ellos sea más grande o más rígido que el otro.

La aceleración del terreno durante un sismo varía irregularmente hasta tal punto (vea la figura 6.1.4) que la solución analítica de la ecuación de movimiento debe descartarse. Por lo tanto, se requieren métodos numéricos para determinar la respuesta estructural y podría utilizarse cualquiera de los métodos presentados en el capítulo 5. Los resultados de la respuesta presentados en este capítulo se obtuvieron mediante la solución exacta de la

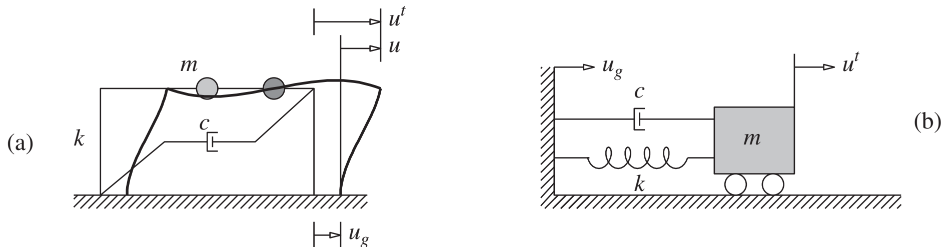


Figura 6.2.1 Sistemas de un solo grado de libertad.

ecuación de movimiento para un movimiento del suelo que varía linealmente en cada paso de tiempo, $\Delta t = 0.02$ s (sección 5.2).

6.3 CANTIDADES DE RESPUESTA

La deformación del sistema o el desplazamiento $u(t)$ de la masa respecto al terreno en movimiento, con el que las fuerzas internas se relacionan linealmente, es de gran interés en la ingeniería estructural. Las fuerzas internas son los momentos de flexión y los esfuerzos cortantes en las vigas y columnas de la estructura de una sola planta que se muestra en la figura 6.2.1a o la fuerza del resorte en el sistema de la figura 6.2.1b. Es útil conocer el desplazamiento total $u^t(t)$ de la masa para proporcionar la separación suficiente entre edificios adyacentes, a fin de impedir que se golpeen entre sí durante un sismo. Las colisiones son la causa de daños en muchos edificios durante casi todos los sismos (vea la figura 6.3.1). Del mismo modo, si la estructura aloja equipos sensibles y se requiere determinar el movimiento impartido a dicho equipamiento, sería necesario conocer la aceleración total $\ddot{u}^t(t)$ de la masa.

La solución numérica de la ecuación (6.2.1) puede implementarse para proporcionar los resultados de las cantidades relativas $u(t)$, $\dot{u}(t)$ y $\ddot{u}(t)$ así como de las cantidades totales $u^t(t)$, $\dot{u}^t(t)$ y $\ddot{u}^t(t)$.



Figura 6.3.1 Dos imágenes de daños por colisión en el edificio de Sanborns (más bajo) y el edificio de la Avenida Reforma 33 (más alto), en la Ciudad de México, debido al sismo del 28 de julio de 1957. (De la colección Steinbrugge, Servicio Nacional de Información de Ingeniería Sísmica de la Universidad de California, Berkeley).

6.4 HISTORIA DE LA RESPUESTA

Para un movimiento de terreno dado $\ddot{u}_g(t)$, la respuesta de deformación $u(t)$ de un sistema de 1GDL depende sólo del periodo de vibración natural del sistema y de su fracción de amortiguamiento. En la figura 6.4.1a se muestra la respuesta de deformación de tres sistemas diferentes, debido a la aceleración del terreno de El Centro. La fracción de amortiguamiento, $\zeta = 2\%$, es la misma para los tres sistemas, de modo que sólo las diferencias en sus periodos naturales son responsables de las grandes diferencias en las respuestas de deformación. Se observa que el tiempo requerido para que un sistema de 1GDL complete un ciclo de vibración, cuando se somete a este movimiento sísmico del terreno, está muy cerca del periodo natural del sistema. (Este resultado interesante, válido para movimientos del terreno típicos que contienen un intervalo amplio de frecuencias, puede probarse usando la teoría de las vibraciones aleatorias, que no se incluye en este libro). La deformación máxima [ecuación (1.11.1)] también se observa en cada caso. Note que en estos tres sistemas entre más largo es el periodo de vibración, mayor es la deformación máxima. Como se verá más adelante, esta tendencia no es perfecta ni válida en todo el intervalo de periodos.

La figura 6.4.1b muestra la respuesta de deformación de tres sistemas para el mismo movimiento del terreno. El periodo de vibración T_n es el mismo para los tres sistemas, de modo que las diferencias en las respuestas de deformación se asocian con sus amortigua-

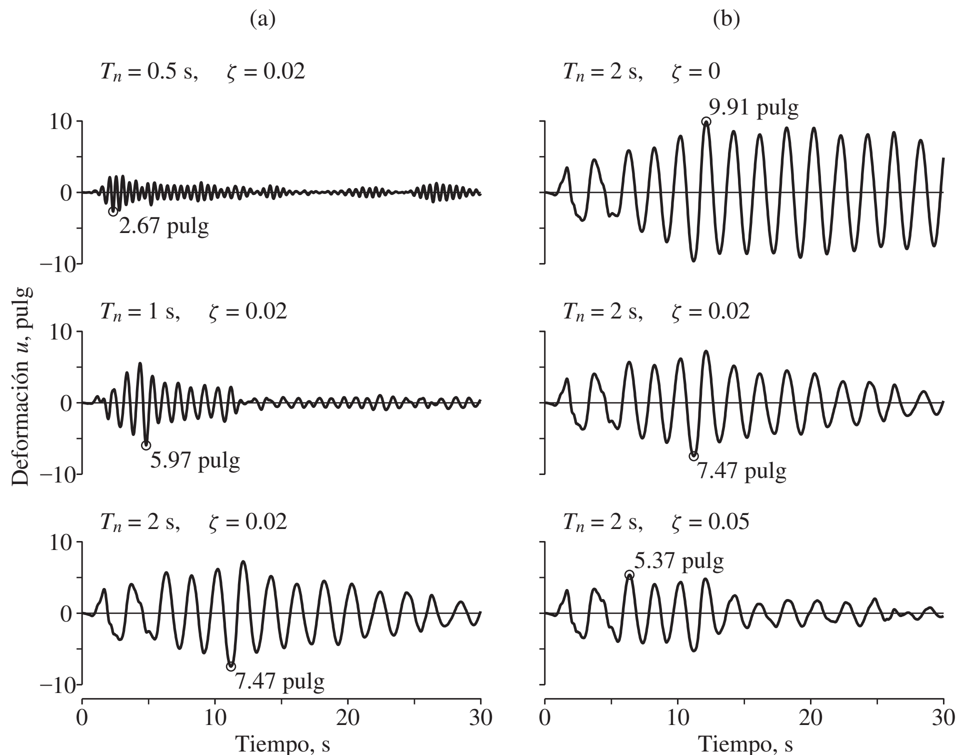


Figura 6.4.1 Respuesta de deformación de los sistemas de 1GDL al movimiento de terreno de El Centro.

mientos. Se observa la tendencia esperada de que los sistemas con más amortiguamiento responden menos que los sistemas ligeramente amortiguados. Como los tres sistemas tienen el mismo periodo natural, sus respuestas muestran una similitud en el tiempo requerido para completar un ciclo de vibración y en los tiempos en que se producen los máximos y mínimos.

Una vez que la historia de la respuesta de deformación $u(t)$ se ha evaluado mediante el análisis dinámico de la estructura, es posible determinar las fuerzas internas por medio del análisis estático de la estructura en cada instante de tiempo. Existen dos métodos para poner en práctica este tipo de análisis que se han mencionado en la sección 1.8. Entre ellos, el enfoque preferido en la ingeniería sísmica se basa en el concepto de la *fuerza estática equivalente* f_S (figura 6.4.2) porque puede relacionarse con las fuerzas sísmicas especificadas en los códigos de construcción; f_S se definió en la ecuación (1.8.1), que se repite aquí por conveniencia:

$$f_S(t) = ku(t) \tag{6.4.1}$$

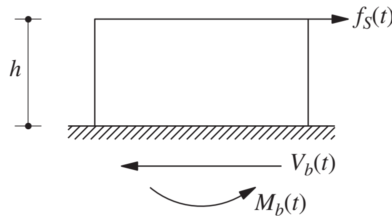


Figura 6.4.2 Fuerza estática equivalente.

donde k es la rigidez lateral del marco (figura 6.2.1a). Si se expresa k en términos de la masa m se obtiene

$$f_S(t) = m\,\omega_n^2\,u(t) = mA(t) \tag{6.4.2}$$

donde

$$A(t) = \omega_n^2\,u(t) \tag{6.4.3}$$

Observe que la fuerza estática equivalente es m por $A(t)$, la *pseudo-aceleración*, no m por la aceleración total $\ddot{u}^t(t)$. Esta distinción se analiza en la sección 6.6.3.

La respuesta de pseudo-aceleración $A(t)$ del sistema puede calcularse con facilidad a partir de la respuesta de deformación $u(t)$. Para los tres sistemas con $T_n = 0.5$, 1 y 2 s, todos ellos con $\zeta = 0.02$, $u(t)$ puede encontrarse en la figura 6.4.1. Al multiplicar cada $u(t)$ por la correspondiente $\omega_n^2 = (2\pi/T_n)^2$ se obtienen las respuestas de pseudo-aceleración para estos sistemas; éstas se presentan en la figura 6.4.3, donde puede observarse el valor máximo para cada sistema.

Para el caso del marco de un nivel, las fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas cortantes y los momentos en las columnas y vigas, o el esfuerzo en cualquier ubicación) pueden determinarse en un instante de tiempo dado mediante el análisis estático de la estructura sometida a la fuerza lateral estática equivalente $f_S(t)$ en el mismo instante de tiempo (figura 6.4.2). Así, sería necesario un análisis estático de la estructura en cada instante de tiempo en el que se deseen las respuestas. En particular, el cortante basal $V_b(t)$ y el momento de volteo básico $M_b(t)$ son

$$V_b(t) = f_S(t) \qquad M_b(t) = hf_S(t) \tag{6.4.4a}$$

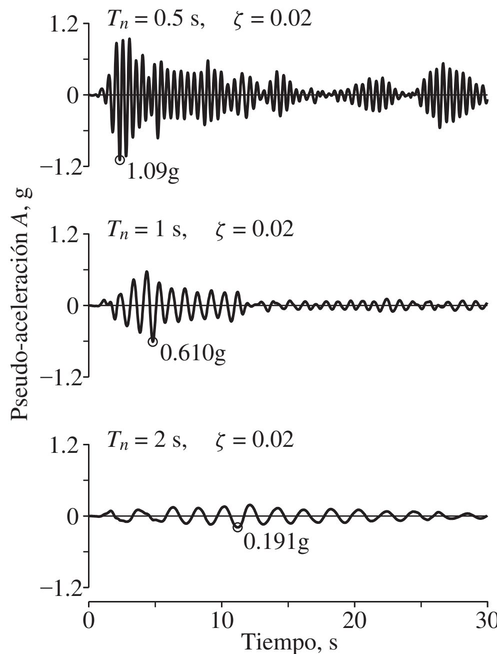


Figura 6.4.3 Respuesta de pseudo-aceleración de sistemas de 1GDL para el movimiento del terreno de El Centro.

donde h es la altura de la masa por encima de la base. Sustituyendo la ecuación (6.4.2) en estas ecuaciones se obtiene

$$V_b(t) = mA(t) \qquad M_b(t) = hV_b(t) \tag{6.4.4b}$$

Si el sistema de 1GDL se ve como un sistema masa-resorte-amortiguador (figura 6.2.1b), no se requiere la noción de la fuerza estática equivalente. Es posible visualizar que la fuerza del resorte está dada por la ecuación (6.4.1).

6.5 CONCEPTO DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

G. W. Housner jugó un papel decisivo en la gran aceptación del concepto del espectro de respuesta del sismo (iniciado por M. A. Biot en 1932) como un medio práctico para caracterizar los movimientos del terreno y sus efectos sobre las estructuras. Ahora que es un concepto central en la ingeniería sísmica, el espectro de respuesta proporciona un medio conveniente para resumir la respuesta máxima de todos los posibles sistemas lineales de 1GDL a un componente particular del movimiento del terreno. También proporciona un enfoque práctico para la aplicación del conocimiento de la dinámica estructural al diseño de estructuras y al desarrollo de los requisitos de fuerza lateral en los códigos de construcción.

Una gráfica del valor máximo de una cantidad de respuesta como una función del periodo de vibración natural T_n del sistema, o de un parámetro relacionado, como la frecuencia circular ω_n o la frecuencia cíclica f_n, se denomina *espectro de respuesta* para dicha cantidad. Cada una de estas gráficas es para los sistemas de 1GDL que tienen una fracción de amortiguamiento ζ fijo y es necesario incluir varias de dichas gráficas para diferentes valores de ζ, a fin de cubrir el intervalo de valores de amortiguamiento en las estructuras

reales. Si la respuesta máxima se grafica en función f_n o T_n, es un asunto de preferencia personal. Aquí se ha elegido la segunda opción debido a que los ingenieros prefieren utilizar el periodo natural en vez de la frecuencia natural, porque el periodo de vibración es un concepto más familiar y por intuición resulta atractivo.

Es posible definir una variedad de espectros de respuesta en función de la cantidad de respuesta que se grafica. Considere las siguientes respuestas máximas:

$$u_o(T_n, \zeta) \equiv \max_t \left|u(t, T_n, \zeta)\right|$$

$$\dot{u}_o(T_n, \zeta) \equiv \max_t \left|\dot{u}(t, T_n, \zeta)\right|$$

$$\ddot{u}_o^t(T_n, \zeta) \equiv \max_t \left|\ddot{u}^t(t, T_n, \zeta)\right|$$

El *espectro de respuesta de deformación* es una gráfica de u_o contra T_n para un ζ fijo. Una gráfica similar para $\dot{u}_o$ es el *espectro de respuesta de velocidad relativa*, y para $\ddot{u}_o^t$ es el *espectro de respuesta de aceleración*.

6.6 ESPECTROS DE RESPUESTA DE DEFORMACIÓN, DE PSEUDO-VELOCIDAD Y DE PSEUDO-ACELERACIÓN

En esta sección se analizan el espectro de respuesta de deformación y dos espectros relacionados, los espectros de respuesta de pseudo-velocidad y de pseudo-aceleración. Como se muestra en la sección 6.4, para calcular las fuerzas internas sólo se requiere la deformación $u(t)$. Entonces, resulta obvio que el espectro de deformación proporciona toda la información necesaria para calcular los valores máximos de la deformación $D \equiv u_o$ y las fuerzas internas. Sin embargo, se incluyen los espectros de respuesta de pseudo-velocidad y de pseudo-aceleración, porque son útiles para el estudio de las características de los espectros de respuesta, la construcción de los espectros de diseño y la correlación de los resultados de la dinámica estructural con los códigos de construcción.

6.6.1 Espectro de respuesta de deformación

La figura 6.6.1 muestra el procedimiento para determinar el espectro de respuesta de deformación. El espectro se ha desarrollado para el movimiento de terreno de El Centro, que se muestra en el inciso (a) de esta figura. En el inciso (b) se presenta la variación en el tiempo de la deformación inducida por este movimiento del terreno en tres sistemas de 1GDL. Para cada sistema, el valor máximo de deformación $D \equiv u_o$ se determina a partir de la historia de deformación. (Por lo general, el pico se produce durante los movimientos del terreno; sin embargo, para los sistemas ligeramente amortiguados con periodos muy largos, la respuesta máxima puede ocurrir durante la fase de vibración libre después de que el temblor del terreno ha terminado). Las deformaciones máximas son $D = 2.67$ pulg para un sistema con un periodo natural $T_n = 0.5$ s y fracción de amortiguamiento $\zeta = 2\%$; $D = 5.97$ pulg para un sistema con $T_n = 1$ s y $\zeta = 2\%$; y $D = 7.47$ pulg para un sistema con $T_n = 2$ s y $\zeta = 2\%$. El valor D, determinado de esta manera para cada sistema, proporciona un punto en el espectro de respuesta de deformación; estos tres valores de D se identifican en la figura 6.6.1c. La repetición de estos cálculos para un intervalo de valores de T_n mientras ζ se man-

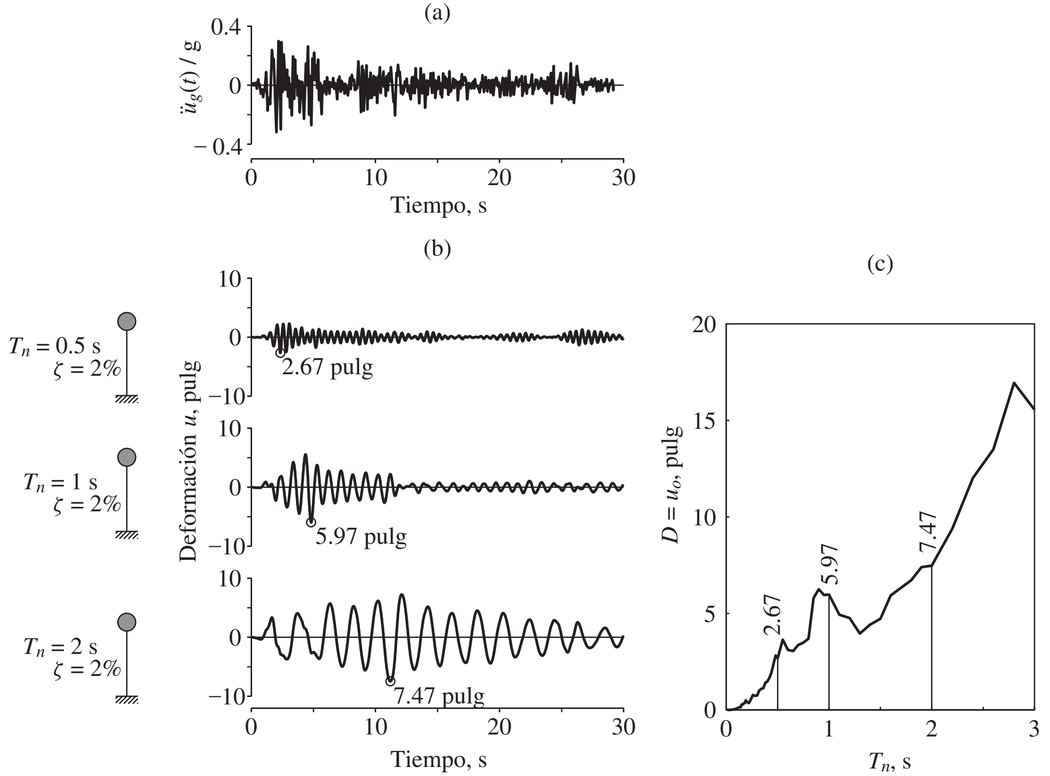


Figura 6.6.1 (a) Aceleración del terreno; (b) respuesta de deformación de tres sistemas de 1GDL con $\zeta = 2\%$ y $T_n = 0.5$, 1 y 2 segundos; (c) espectro de respuesta de deformación para $\zeta = 2\%$.

tiene constante en 2%, proporciona el espectro de respuesta de deformación que se muestra en la figura 6.6.1c. Como se verá más adelante, el espectro de respuesta completo incluye estas curvas de espectro para varios valores de amortiguamiento.

6.6.2 Espectro de respuesta de pseudo-velocidad

Considere una cantidad V para un sistema de 1GDL con una frecuencia natural ω_n, relacionada con su deformación máxima $D \equiv u_o$ debida a un movimiento sísmico del terreno:

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D \tag{6.6.1}$$

La cantidad V tiene unidades de velocidad. Se relaciona con el valor máximo de la energía de deformación E_{So} almacenada en el sistema durante el sismo, mediante la ecuación

$$E_{So} = \frac{mV^2}{2} \tag{6.6.2}$$

Esta relación puede deducirse a partir de la definición de energía de deformación y del uso de la ecuación (6.6.1) en la forma siguiente:

$$E_{So} = \frac{ku_o^2}{2} = \frac{kD^2}{2} = \frac{k(V/\omega_n)^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$$

El lado derecho de la ecuación (6.6.2) es la energía cinética de la masa estructural m con una velocidad V, llamada la *pseudo-velocidad* máxima. El prefijo *pseudo* se utiliza porque V no es igual a la velocidad máxima relativa $\dot{u}_o$, aunque tiene las unidades correctas. Este tema se retomará en la sección 6.12.

El *espectro de respuesta de pseudo-velocidad* es una gráfica de V en función del periodo de vibración natural T_n, o de la frecuencia de vibración natural f_n, del sistema. Para el movimiento del terreno de la figura 6.6.1a, la pseudo-velocidad máxima V de un sistema con periodo natural T_n puede determinarse a partir de la ecuación (6.6.1) y la deformación máxima D del mismo sistema, disponible en el espectro de respuesta de la figura 6.6.1c, que se ha reproducido en la figura 6.6.2a. Como ejemplo, para un sistema con $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 2\%$, $D = 2.67$ pulg; a partir de la ecuación (6.6.1), $V = (2\pi/0.5)2.67 = 33.7$ pulg/s. De manera similar, para un sistema con $T_n = 1$ s y el mismo ζ, $V = (2\pi/1)5.97 = 37.5$ pulg/s; y para un sistema con $T_n = 2$ s y el mismo ζ, $V = (2\pi/2)7.47 = 23.5$ pulg/s. Estos tres valores de pseudo-velocidad máxima se identifican en la figura 6.6.2b. La repetición de estos cálculos para un intervalo de valores de T_n, mientras ζ se mantiene constante en 2%, proporciona el espectro de pseudo-velocidad mostrado en la figura 6.6.2b.

6.6.3 Espectro de respuesta de pseudo-aceleración

Considere una cantidad A para un sistema de 1GDL con frecuencia natural ω_n, que se relaciona con su deformación máxima $D \equiv u_o$ debida a un movimiento sísmico del terreno:

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D \tag{6.6.3}$$

La cantidad A tiene unidades de aceleración y se relaciona con el valor máximo del cortante basal V_{bo} (o el valor máximo de la fuerza estática equivalente f_{So}, ecuación 6.4.4a):

$$V_{bo} = f_{So} = mA \tag{6.6.4}$$

Esta relación es sólo la ecuación (6.4.4b) especificada para el tiempo de la respuesta máxima, donde el valor máximo de $A(t)$ se indica mediante A. La fuerza cortante basal máxima puede escribirse en la forma

$$V_{bo} = \frac{A}{g} w \tag{6.6.5}$$

donde w es el peso de la estructura y g la aceleración de la gravedad. Cuando se escribe de esta forma, A/g puede interpretarse como el *coeficiente sísmico* o el *coeficiente de fuerza lateral*. Se utiliza en los códigos de construcción para representar el coeficiente por el cual se multiplica el peso de la estructura para obtener la fuerza cortante basal.

Observe que la fuerza cortante basal es igual a la fuerza de inercia asociada con la masa m mientras experimenta la aceleración A. Esta cantidad, que está definida por la ecuación (6.6.3), suele ser diferente de la aceleración máxima $\ddot{u}_o^t$ del sistema. Es por esta razón que A se

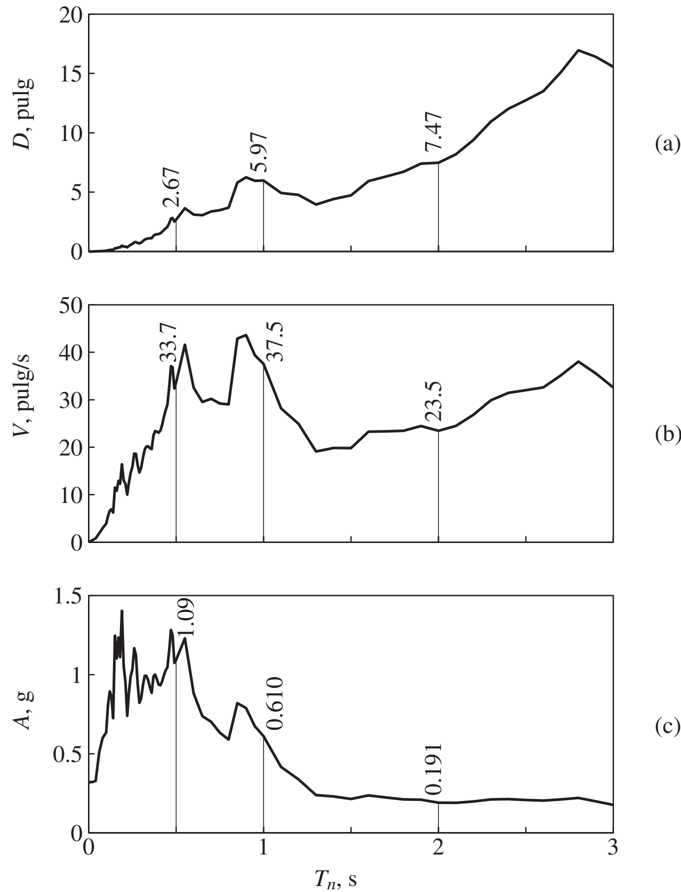


Figura 6.6.2 Espectros de respuesta ($\zeta = 0.02$) para el movimiento del terreno de El Centro: (a) espectro de respuesta de deformación; (b) espectro de respuesta de pseudo-velocidad; (c) espectro de respuesta de pseudo-aceleración.

denomina la *pseudo-aceleración máxima*; el prefijo *pseudo* se utiliza para evitar posibles confusiones con la aceleración máxima verdadera $\ddot{u}^t_o$. Este tema se retomará en la sección 6.12.

El *espectro de respuesta de pseudo-aceleración* es una gráfica de A en función del periodo de vibración natural T_n, o de la frecuencia de vibración natural f_n, del sistema. Para el movimiento del terreno de la figura 6.6.1a, la pseudo-aceleración máxima A para un sistema con periodo natural T_n y fracción de amortiguamiento ζ puede determinarse a partir de la ecuación (6.6.3) y de la deformación máxima D del sistema, obtenida del espectro de la figura 6.6.2a. Como ejemplo, para un sistema con $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 2\%$, $D = 2.67$ pulg; con base en la ecuación (6.6.3), $A = (2\pi/0.5)^2 2.67 = 1.09$g, donde g $= 386$ pulg/s^2. De manera similar, para un sistema con $T_n = 1$ s y el mismo ζ, $A = (2\pi/1)^2 5.97 = 0.610$g; y para un sistema con $T_n = 2$ s y el mismo ζ, $A = (2\pi/2)^2 7.47 = 0.191$g. Observe que los mismos valores de A se muestran como valores máximos $A(t)$ en la figura 6.4.3. Estos tres valores de pseudo-aceleración máxima se identifican en la figura 6.6.2c. La repetición de

estos cálculos para un intervalo de valores de T_n, mientras ζ se mantiene constante en 2%, proporciona el espectro de pseudo-aceleración mostrado en la figura 6.6.2c.

6.6.4 Espectro combinado *D-V-A*

Cada uno de los espectros de respuesta de deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración para un movimiento sísmico dado contiene la misma información, ni más ni menos. Los tres espectros constituyen tan sólo formas distintas de presentar la misma información sobre la respuesta estructural. Si se conoce uno de los espectros, los otros dos pueden deducirse mediante operaciones algebraicas, usando las ecuaciones (6.6.1) y (6.6.3).

¿Por qué se requieren tres espectros si cada uno de ellos contiene la misma información? Una de las razones es que cada espectro proporciona de manera directa una cantidad física significativa. El espectro de deformación proporciona la deformación máxima del sistema. El espectro de pseudo-velocidad se relaciona directamente con la energía de deformación máxima almacenada en el sistema durante el sismo; vea la ecuación (6.6.2). El espectro de pseudo-aceleración se relaciona directamente con los valores máximos de la fuerza estática equivalente y de la fuerza cortante basal; vea la ecuación (6.6.4). La segunda razón reside en el hecho de que la forma del espectro puede aproximarse con más facilidad, para fines de diseño, con la ayuda de las tres cantidades espectrales en lugar de cualquiera de ellas de manera independiente, vea las secciones 6.8 y 6.9. Para este propósito resulta muy útil un diagrama combinado que muestre las tres cantidades espectrales. Al parecer, este tipo de gráfica fue desarrollada por primera vez para los espectros de respuesta sismica por A. S. Veletsos y N. M. Newmark en 1960.

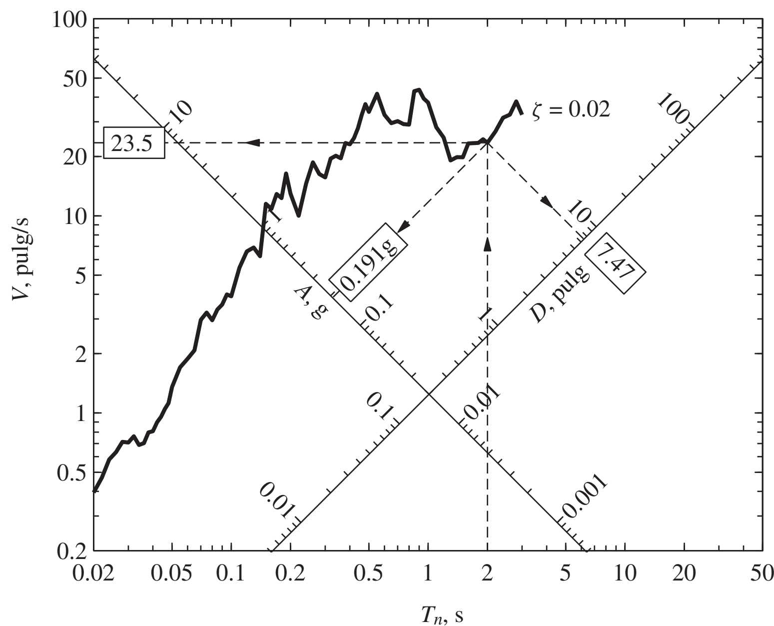


Figura 6.6.3 Espectro de respuesta combinado *D-V-A* para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 2\%$.

Esta presentación integrada es posible porque las tres magnitudes espectrales están relacionadas entre sí por las ecuaciones (6.6.1) y (6.6.3), reescritas como

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{o} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D \tag{6.6.6}$$

Observe la similitud entre estas ecuaciones que relacionan a D, V y A con la ecuación (3.2.21) para los factores de respuesta dinámica R_d, R_v y R_a en un sistema de 1GDL sometido a una excitación armónica. La ecuación (3.2.21) permite presentar en forma conjunta a R_d, R_v y R_a, en papel logarítmico de cuatro escalas (figura 3.2.8), construido mediante el procedimiento descrito en el apéndice 3 (capítulo 3). De manera similar, es posible construir el papel de gráfico mostrado en la figura A6.1 (apéndice 6) con cuatro escalas para visualizar de manera conjunta a D, V y A. Las escalas vertical y horizontal para V y T_n son escalas logarítmicas estándar. Las dos escalas para D y A, inclinadas respectivamente en $+45°$ y $-45°$, respecto al eje de T_n, también son escalas logarítmicas pero no idénticas a la escala vertical; vea el apéndice 3.

Una vez construida esta gráfica, los tres espectros de respuesta (deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración) de la figura 6.6.2 pueden combinarse con facilidad en una sola gráfica. Los pares de datos numéricos para V y T_n, que se representan en la figura 6.6.2b

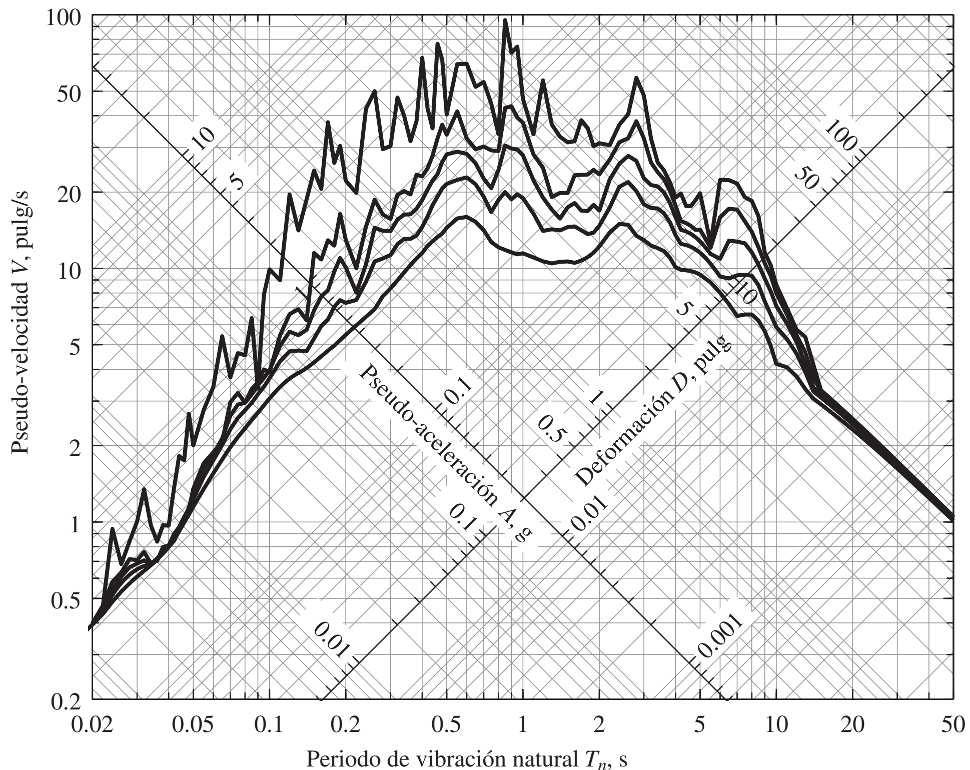


Figura 6.6.4 Espectro de respuesta combinado *D-V-A* para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 0$, 2, 5, 10 y 20%.

en escalas lineales, vuelven a representarse en la figura 6.6.3 en escalas logarítmicas. Para un periodo natural dado T_n, los valores de D y A se pueden leer en las escalas diagonales. Como ejemplo, para $T_n = 2$ s, la figura 6.6.3 indica que $D = 7.47$ pulg y $A = 0.191$g. (En realidad, estos números no pueden leerse con tanta precisión en la gráfica; en este caso estaban disponibles a partir de la figura 6.6.2). La gráfica de cuatro escalas es una presentación compacta de tres espectros de respuesta (deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración) a fin de reemplazar las tres gráficas de la figura 6.6.2 por una sola.

Un espectro de respuesta debe cubrir un amplio intervalo de periodos de vibración natural y varios valores de amortiguamiento, de modo que proporcione la respuesta máxima de todas las estructuras posibles. El intervalo de periodos en la figura 6.6.3 debe extenderse porque los edificios altos y los puentes con claros grandes, entre otras estructuras, pueden tener periodos de vibración más largos (figura 2.1.2). También deben incluirse varios valores de amortiguamiento para cubrir el intervalo práctico de $\zeta = 0$ a 20%. La figura 6.6.4 muestra curvas de espectro para $\zeta = 0$, 2, 5, 10 y 20% en el intervalo de periodos de 0.02 a 50 s. Por lo tanto, éste es el espectro de respuesta para el componente norte-sur del movimiento del suelo registrado en un solo lugar durante el sismo del Valle Imperial el 18 de mayo de 1940. Como la fuerza lateral o cortante basal de un sistema de 1GDL se relaciona con A/g por medio de la ecuación (6.6.5), en la figura 6.6.5, también se grafica este espectro normalizado de pseudo-aceleración. Del mismo modo, como la deformación máxima está dada por D, este espectro de respuesta de deformación también se grafica en la figura 6.6.6.

El espectro de respuesta ha resultado tan útil en la ingeniería sísmica que en la actualidad se calculan y publican los espectros para casi todos los movimientos del terreno lo suficientemente fuertes como para ser de interés en la ingeniería; tales cálculos y publicaciones

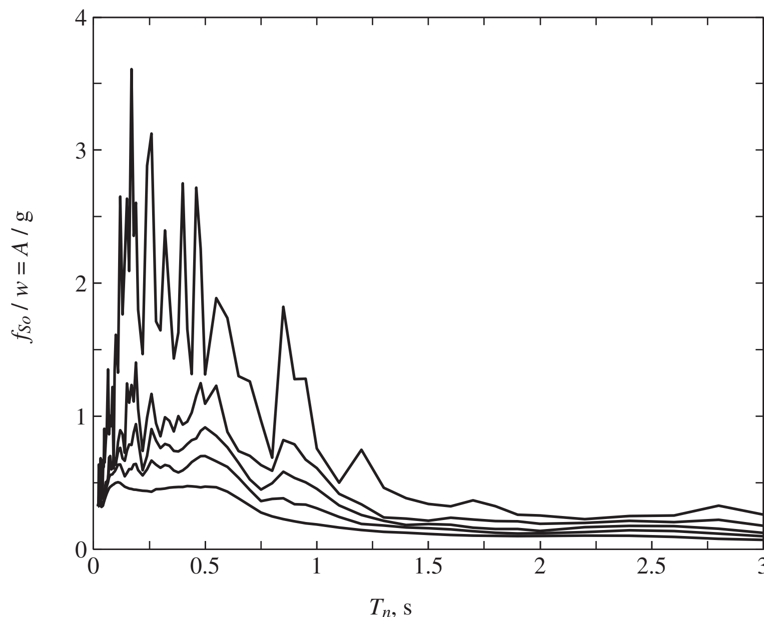


Figura 6.6.5 Espectro de respuesta de pseudo-aceleración normalizada, o coeficiente sísmico, para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 0$, 2, 5, 10 y 20%.

se realizan poco después de registrar el movimiento. Se han obtenido suficientes espectros como para poseer una idea razonable del tipo de movimiento cuya ocurrencia es probable en los sismos futuros, y de cómo se ven afectados los espectros de respuesta por la distancia a la falla que los ocasiona, las condiciones locales del terreno y la geología regional.

6.6.5 Construcción del espectro de respuesta

El espectro de respuesta para un componente del movimiento del terreno dado $\ddot{u}_g(t)$ puede desarrollarse mediante la ejecución de los pasos siguientes:

1. Defina numéricamente la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$; por lo general, las ordenadas del movimiento del terreno se definen cada 0.02 s.

2. Seleccione el periodo de vibración natural T_n y la fracción de amortiguamiento ζ de un sistema de 1GDL.

3. Calcule la respuesta de deformación $u(t)$ de este sistema de 1GDL, debida al movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$, por medio de cualquiera de los métodos numéricos

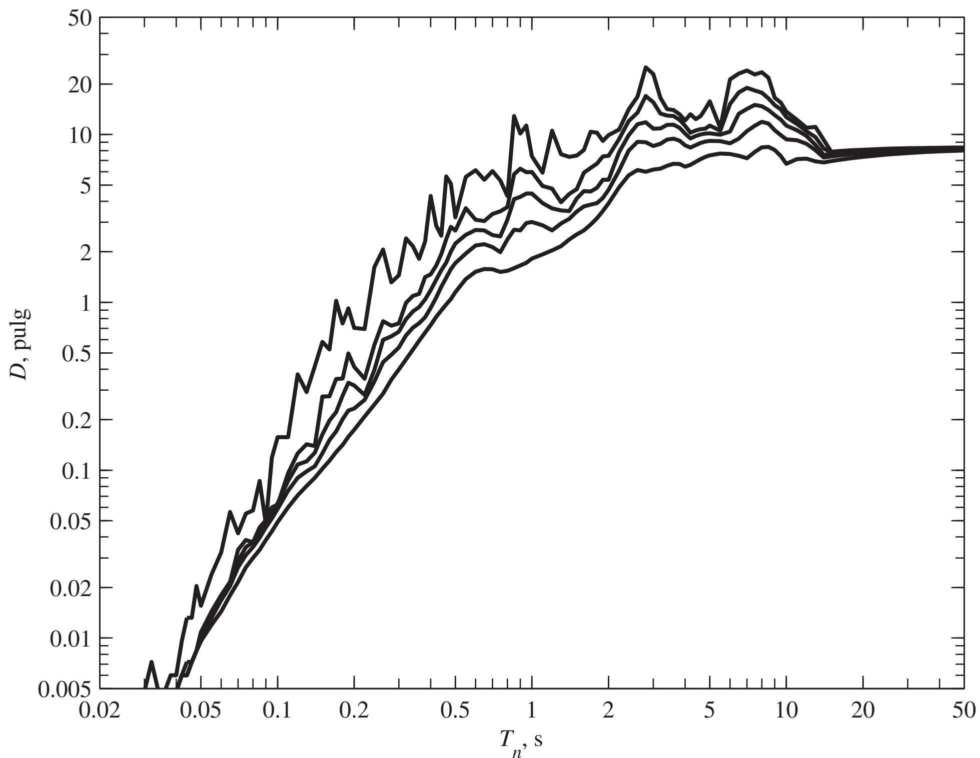


Figura 6.6.6 Espectro de la respuesta de deformación para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 0, 2, 5, 10$ y 20%.

descritos en el capítulo 5. [Para obtener las respuestas mostradas en la figura 6.6.1 se usó la solución exacta de la ecuación (6.2.1) para un movimiento del terreno que se supone lineal por partes cada $\Delta t = 0.02$ s; consulte la sección 5.2)].

4. Determine u_o, el valor máximo de $u(t)$.

5. Las ordenadas espectrales son $D = u_o$, $V = (2\pi/T_n)D$ y $A = (2\pi/T_n)^2 D$.

6. Repita los pasos 2 a 5 para un intervalo de valores de T_n y ζ que cubran todos los posibles sistemas de interés para la ingeniería.

7. Presente los resultados de los pasos 2 a 6 mediante gráficas para producir tres espectros separados como los de la figura 6.6.2 o un espectro combinado como el de la figura 6.6.4.

La generación de un espectro de respuesta del sismo requiere un esfuerzo de cálculo considerable. Un análisis dinámico completo para determinar la variación en el tiempo (o historia) de la deformación de un sistema de 1GDL proporciona los datos para un punto en el espectro correspondiente al T_n y la ζ del sistema. Cada curva del espectro de respuesta de la figura 6.6.4 se produce a partir de tales datos para 112 valores de T_n distribuidos de manera desigual en todo el intervalo de T_n de 0.02 a 50 s.

Ejemplo 6.1

Deduzca y grafique las ecuaciones de los espectros de respuesta de deformación, de pseudo-velocidad y de pseudo-aceleración para la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t) = \dot{u}_{go}\delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac y $\dot{u}_{go}$ es el incremento en la velocidad, o la magnitud del impulso de aceleración. Considere sólo los sistemas sin amortiguamiento.

Solución

1. *Determine la historia de la respuesta*. La respuesta de un sistema de 1GDL a $p(t) = \delta(t - \tau)$ está disponible en la ecuación (4.1.6). Al adaptar esta solución para $p_{\text{ef}}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = -m\dot{u}_{go}\delta(t)$ resulta

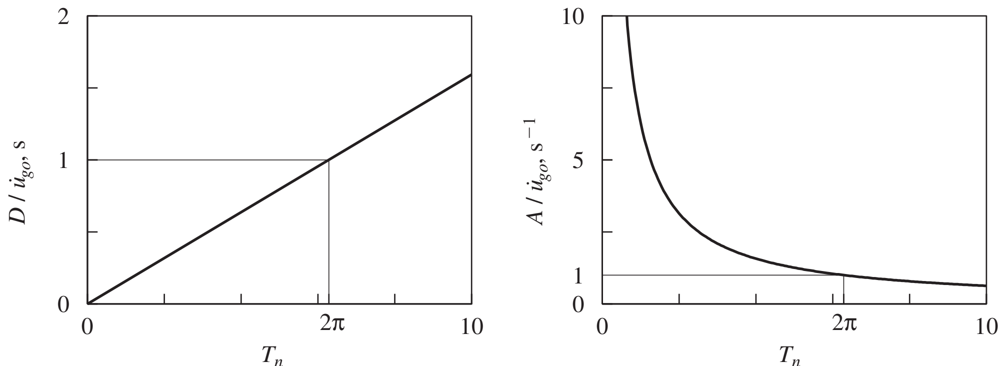


Figura E6.1

$$u(t) = -\frac{\dot{u}_{go}}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{a}$$

El valor máximo de $u(t)$ es

$$u_o = \frac{\dot{u}_{go}}{\omega_n} \tag{b}$$

2. *Determine los valores espectrales.*

$$D \equiv u_o = \frac{\dot{u}_{go}}{\omega_n} = \frac{\dot{u}_{go}}{2\pi} T_n \tag{c}$$

$$V = \omega_n D = \dot{u}_{go} \qquad A = \omega_n^2 D = \frac{2\pi \dot{u}_{go}}{T_n} \tag{d}$$

Dos de estos espectros de respuesta se grafican en la figura E6.1.

6.7 RESPUESTA ESTRUCTURAL MÁXIMA A PARTIR DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

Si el espectro de respuesta para un componente del movimiento de suelo dado está disponible, es posible determinar con facilidad el valor máximo de la deformación, o de una fuerza interna, en cualquier sistema lineal de 1GDL. Éste es el caso aquí, porque ya se han completado los análisis dinámicos computacionalmente intensivos que se resumen en la sección 6.6.5 para la generación del espectro de respuesta. Los valores de D, V o A, correspondientes al periodo de vibración natural T_n y a la fracción de amortiguamiento ζ del sistema, se leen de los espectros, como los de las figuras 6.6.6, 6.6.4 y 6.6.5. Ahora todas las cantidades de respuesta interesantes pueden expresarse en términos de D, V o A y de las propiedades de masa o rigidez del sistema. En particular, la deformación máxima del sistema es

$$u_o = D = \frac{T_n}{2\pi} V = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A \tag{6.7.1}$$

y el valor máximo de la fuerza estática equivalente f_{So} es (con base en las ecuaciones 6.6.4 y 6.6.3)

$$fs_o = kD = mA \tag{6.7.2}$$

El análisis estático del marco de un solo nivel, sometido a la fuerza lateral f_{So} (figura 6.7.1), proporciona las fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas cortantes y los momentos en las columnas y vigas). Lo anterior implica la aplicación de procedimientos bien conocidos del

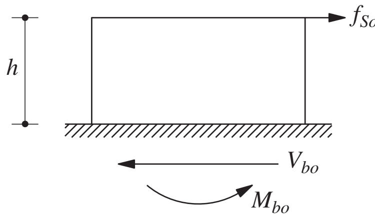


Figura 6.7.1 Valor máximo de la fuerza estática equivalente.

análisis estructural estático, como se ilustrará más adelante mediante ejemplos. De nuevo se hace énfasis en que no es necesario extender el análisis dinámico más allá de lo necesario para establecer $u(t)$. En particular, los valores máximos de la fuerza cortante y del momento de volteo en la base de la estructura de un nivel son

$$V_{bo} = kD = mA \qquad M_{bo} = hV_{bo} \tag{6.7.3}$$

Se observa que cualquiera de estos espectros de respuesta (de deformación, de pseudo-velocidad o de pseudo-aceleración) es suficiente para calcular las deformaciones y fuerzas máximas requeridas en el diseño estructural. Para tales aplicaciones, los espectros de velocidad o aceleración (definidos en la sección 6.5) no son necesarios; pero a fin de que el análisis sea completo, tales espectros se discuten brevemente al final de este capítulo.

Ejemplo 6.2

Un cantiliver vertical de 12 pies de largo, hecho con un tubo estándar de acero con un diámetro nominal de 4 pulgadas, soporta un peso de 5200 libras conectado en la punta, como se muestra en la figura E6.2. Las propiedades del tubo son: diámetro exterior, $d_o = 4.500$ pulg, diámetro interior $d_i = 4.026$ pulg, espesor $t = 0.237$ pulg, momento de inercia en su sección transversal $I = 7.23$ pulg^4, módulo de elasticidad $E = 29{,}000$ ksi y peso $= 10.79$ libras/pie de longitud. Determine la deformación y el esfuerzo de flexión máximos en el cantiliver debidos al movimiento de suelo de El Centro. Suponga que $\zeta = 2\%$.

Solución La rigidez lateral de este sistema de 1GDL es

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(29 \times 10^3)7.23}{(12 \times 12)^3} = 0.211 \text{ kip/pulg}$$

El peso total del tubo es de $10.79 \times 12 = 129.5$ lb, que puede despreciarse en relación con el peso concentrado de 5200 lb. Así,

$$m = \frac{w}{g} = \frac{5.20}{386} = 0.01347 \text{ kip-s}^2/\text{pulg}$$

La frecuencia y el periodo de vibración natural del sistema son

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.211}{0.01347}} = 3.958 \text{ rad/s} \qquad T_n = 1.59 \text{ s}$$

Con base en la curva del espectro de respuesta considerando $\zeta = 2\%$ (figura E6.2b), para $T_n = 1.59$ s, $D = 5.0$ pulg y $A = 0.20$ g. La deformación máxima es

$$u_o = D = 5.0 \text{ pulg}$$

El valor máximo de la fuerza estática equivalente es

$$f_{So} = \frac{A}{g} w = 0.20 \times 5.2 = 1.04 \text{ kips}$$

El diagrama del momento flexionante se muestra en la figura E6.2d con el momento máximo en la base $= 12.48$ kip-pie. Los puntos A y B mostrados en la figura E6.2e son las ubicaciones del esfuerzo flexionante máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(12.48 \times 12)(4.5/2)}{7.23} = 46.5 \text{ ksi}$$

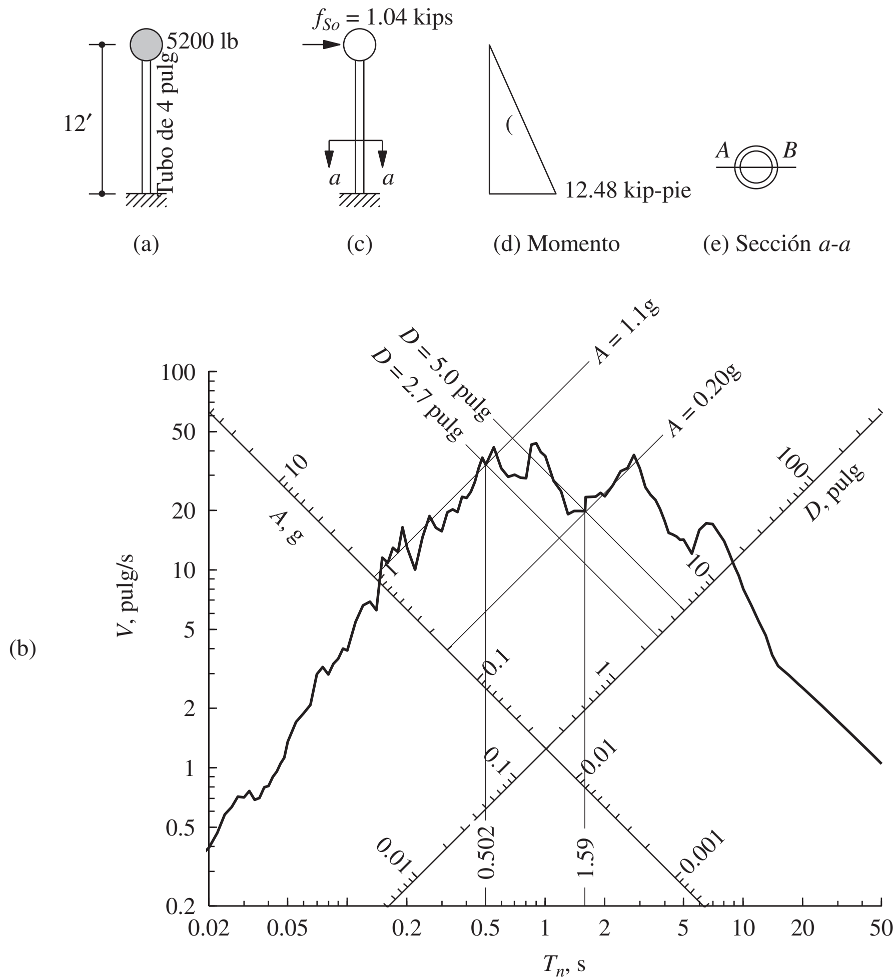


Figura E6.2

Por lo tanto, $\sigma = +46.5$ ksi en A y $\sigma = -46.5$ ksi en B, donde + indica tensión. Los signos algebraicos de estos esfuerzos son irrelevantes porque la dirección de la fuerza máxima no se conoce, mientras que el espectro de pseudo-aceleración es positivo por definición.

Ejemplo 6.3

El esfuerzo calculado en el ejemplo 6.2 superó el esfuerzo permisible y el diseñador decidió aumentar el tamaño de la tubería usando un tubo de acero estándar con un diámetro nominal de 8 pulg. Sus propiedades son $d_o = 8.625$ pulg, $d_i = 7.981$ pulg, $t = 0.322$ pulg e $I = 72.5$ pulg^4. Comente las ventajas y desventajas de utilizar esta tubería más grande.

Solución

$$k = \frac{3(29 \times 10^3)72.5}{(12 \times 12)^3} = 2.112 \text{ kips/pulg}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2.112}{0.01347}} = 12.52 \text{ rad/s} \qquad T_n = 0.502 \text{ s}$$

A partir del espectro de respuesta (figura E6.2b): $D = 2.7$ pulg y $A = 1.1$g. Por lo tanto,

$$u_o = D = 2.7 \text{ pulg}$$

$$f_{So} = 1.1 \times 5.2 = 5.72 \text{ kips}$$

$$M_{\text{base}} = 5.72 \times 12 = 68.64 \text{ kip-pie}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{(68.64 \times 12)(8.625/2)}{72.5} = 49.0 \text{ ksi}$$

Si se usa la tubería de 8 pulg de diámetro, la deformación se reduce de 5.0 a 2.7 pulg. Sin embargo, contrario al objetivo del diseñador, el esfuerzo flexionante aumenta ligeramente.

Este ejemplo puntualiza una diferencia importante entre la respuesta de las estructuras a una excitación sísmica y a un valor fijo de fuerza estática. En este último caso resulta evidente que al aumentar el tamaño del miembro el esfuerzo disminuirá. En el caso de la excitación sísmica, el aumento del diámetro de la tubería acorta el periodo de vibración natural de 1.59 a 0.50 s, que para este espectro de respuesta tiene el efecto de aumentar la fuerza estática equivalente f_{So}. Que el esfuerzo flexionante disminuya o aumente al incrementar el diámetro del tubo, depende del aumento del módulo de la sección, I/c, y del aumento o disminución de la f_{So}, en función del espectro de respuesta.

Ejemplo 6.4

Un pequeño edificio de un nivel, construido en concreto reforzado, se idealiza para fines de un análisis estructural como un marco sin masa que soporta una carga muerta total de 10 kips al nivel de la viga (figura E6.4a). El marco tiene 24 pies de ancho y 12 pies de altura. Cada una de las columnas y la viga tienen una sección transversal de 10 pulg cuadradas. Suponga que el módulo de Young del concreto es de 3×10^3 ksi y la fracción de amortiguamiento para el edificio se calcula en 5%. Determine la respuesta máxima de este marco al movimiento del terreno de El Centro. En particular, determine la deformación lateral máxima al nivel de la viga y grafique el diagrama de momentos flexionantes en el instante de la respuesta máxima.

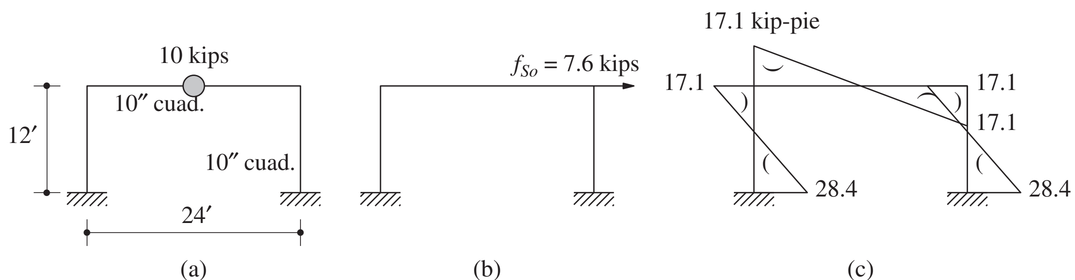


Figura E6.4 (a) Marco; (b) fuerza estática equivalente; (c) diagrama de momento flexionante.

Solución La rigidez lateral de este marco se calculó en el capítulo 1: $k = 96EI/7h^3$, donde EI es la rigidez a la flexión de la viga y las columnas, y h es la altura del marco. Para este sistema en particular,

$$k = \frac{96(3 \times 10^3)(10^4/12)}{7(12 \times 12)^3} = 11.48 \text{ kips/pulg}$$

El periodo de vibración natural es

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = 2\pi\sqrt{\frac{10/386}{11.48}} = 0.30 \text{ s}$$

Para $T_n = 0.3$ y $\zeta = 0.05$, en el espectro de respuesta de la figura 6.6.4 se lee que $D = 0.67$ pulg y $A = 0.76$g. Deformación máxima: $u_o = D = 0.67$ pulg. Fuerza estática equivalente: $f_{So} = (A/\text{g})w = 0.76 \times 10 = 7.6$ kips. El análisis estático del marco para esta fuerza lateral, que se muestra en la figura E6.4b, proporciona los momentos flexionantes que se grafican en la figura E6.4c.

Ejemplo 6.5

El marco del ejemplo 6.4 se modifica para su uso en un edificio que se encuentra en un terreno inclinado (figura E6.5). La viga ahora es mucho mayor que las columnas y puede suponerse que es rígida. Las secciones transversales de las dos columnas son de 10 pulg cuadradas, como antes, pero sus longitudes son de 12 y 24 pies, respectivamente. Determine las fuerzas cortantes basales de las dos columnas en el instante de la respuesta máxima, debidas al movimiento del terreno de El Centro. Suponga que la fracción de amortiguamiento es de 5%.

Solución

1. *Calcular el periodo de vibración natural*.

$$k = \frac{12(3 \times 10^3)(10^4/12)}{(12 \times 12)^3} + \frac{12(3 \times 10^3)(10^4/12)}{(24 \times 12)^3}$$
$$= 10.05 + 1.26 = 11.31 \text{ kips/pulg}$$

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{10/386}{11.31}} = 0.30 \text{ s}$$

2. *Calcular la fuerza cortante basal de las columnas corta y larga*.

$$u_o = D = 0.67 \text{ pulg}, \qquad A = 0.76\text{g}$$

$$V_{\text{corta}} = k_{\text{corta}} u_o = (10.05)0.67 = 6.73 \text{ kips}$$

$$V_{\text{larga}} = k_{\text{larga}} u_o = (1.26)0.67 = 0.84 \text{ kip}$$

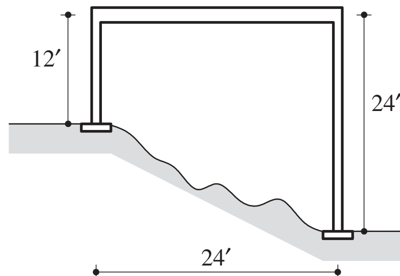


Figura E6.5

Observe que las dos columnas experimentan la misma deformación. Al sufrir deformaciones iguales, la columna más rígida soporta una fuerza mayor que la columna flexible; la fuerza lateral se distribuye hacia los elementos en proporción a sus rigideces relativas. En ocasiones no se ha reconocido en absoluto este principio básico para el diseño de edificios, lo que conduce a un daño imprevisto de los elementos más rígidos.

Ejemplo 6.6

Para el puente con tres claros y viga cajón del ejemplo 1.3, determine la fuerza cortante basal de cada una de las seis columnas para las dos inclinaciones debidas al movimiento del terreno de El Centro aplicado en la dirección longitudinal. Suponga que la fracción de amortiguamiento es de 5%.

Solución El peso de la cubierta del puente se calculó en el ejemplo 1.3: w = 6919 kips. El periodo natural de vibración longitudinal del puente se calculó en el ejemplo 2.2: $T_n = 0.573$ s. Para $T_n = 0.573$ s y $\zeta = 0.05$, en el espectro de respuesta de la figura 6.6.4 se lee que $D = 2.591$ pulg y $A = 0.807$g.

Todas las columnas tienen la misma rigidez y sufren la misma deformación $u_o = D =$ 2.591 pulg. Por lo tanto, la fuerza cortante basal será la misma en todas las columnas, que puede calcularse en una de dos formas: la fuerza estática equivalente total en el puente (a partir de la ecuación 6.6.5) es

$$f_{so} = 0.807 \times 6919 = 5584 \text{ kips}$$

La fuerza cortante basal para una columna, $V_b = 5584 \div 6 = 931$ kips. De manera alternativa, la fuerza cortante basal de cada columna es

$$V_b = k_{\text{col}} u_o = 4313 \times \frac{2.591}{12} = 931 \text{ kips}$$

6.8 CARACTERÍSTICAS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

Ahora se estudiarán las propiedades importantes de los espectros de respuesta de los sismos. En la figura 6.8.1 se muestra el espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro junto con $\ddot{u}_{go}$, $\dot{u}_{go}$, y u_{go} los valores máximos de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento del terreno, respectivamente, identificados en la figura 6.1.4. Para mostrar más directamente la relación entre el espectro de respuesta y los parámetros del movimiento del terreno, los datos de la figura 6.8.1 se presentan de nuevo en la figura 6.8.2 usando escalas normalizadas: D/u_{go}, $V/\dot{u}_{go}$, y $A/\ddot{u}_{go}$. La figura 6.8.3 muestra una de las curvas del espectro de la figura 6.8.2, la del amortiguamiento de 5%, junto con una versión idealizada que se muestra en líneas discontinuas; esta última proporcionará una base para la construcción de espectros de diseño regulares directamente de los parámetros máximos del movimiento del terreno (vea la sección 6.9). Con base en las figuras 6.8.1 a 6.8.3, primero se estudian las propiedades del espectro de respuesta en distintos intervalos del periodo de vibración natural del sistema separados por los valores del periodo en a, b, c, d, e y f: $T_a =$ 0.035 s, $T_b = 0.125$, $T_c = 0.5$, $T_d = 3.0$, $T_e = 10$ y $T_f = 15$ s. Posteriormente, se identifican los efectos del amortiguamiento en las ordenadas del espectro.

Para los sistemas con un periodo muy corto, por ejemplo $T_n < T_a = 0.035$ s, la pseudo-aceleración máxima A se aproxima a $\ddot{u}_{go}$ y D es muy pequeño. Esta tendencia puede entenderse con base en un razonamiento físico. Para una masa fija, un sistema con un periodo

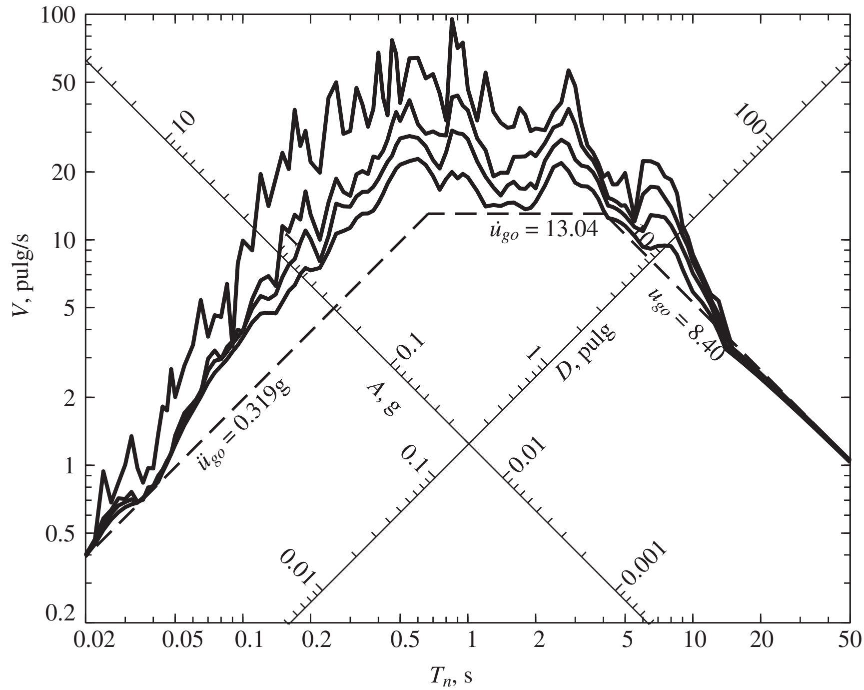


Figura 6.8.1 Espectro de respuesta (ζ = 0, 2, 5 y 10%) y valores máximos de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento del terreno para el movimiento de El Centro.

muy corto es extremado o esencialmente rígido. Es de esperar que tal sistema experimente una deformación muy pequeña y que su masa se mueva de manera rígida con el suelo; su aceleración máxima debe ser aproximadamente igual a $\ddot{u}_{go}$ (figura 6.8.4d). Esta expectativa se confirma con la figura 6.8.4, donde la aceleración del terreno se presenta en el inciso (a), la aceleración total $\ddot{u}^t(t)$ de un sistema con $T_n = 0.02$ s y $\zeta = 2\%$ en el inciso (b), y la pseudo-aceleración $A(t)$ para el mismo sistema en el inciso (c). Observe que $\ddot{u}^t(t)$ y $\ddot{u}_g(t)$ son funciones casi idénticas y $\ddot{u}^t_o \simeq \ddot{u}_{go}$. Además, para los sistemas ligeramente amortiguados $\ddot{u}^t(t) \simeq -A(t)$ y $\ddot{u}^t_o \simeq A$ (sección 6.12.2); por lo tanto, $A \simeq \ddot{u}_{go}$.

Para los sistemas con un periodo muy largo, por ejemplo, $T_n > T_f = 15$ s, D se aproxima a u_{go} para todos los valores de amortiguamiento y A es muy pequeña, por lo que las fuerzas en la estructura, que se relacionan con mA, serían muy pequeñas. Esta tendencia puede explicarse de nuevo con base en el razonamiento físico. Para una masa fija, un sistema de muy largo periodo es demasiado flexible. Se espera que la masa permanezca estacionaria mientras que el suelo se mueve debajo de ella (figura 6.8.5c). Así $\ddot{u}^t(t) \simeq 0$, lo que implica que $A(t) \simeq 0$ (vea la sección 6.12.2); y $u(t) \simeq -u_g(t)$, lo que implica que $D \simeq u_{go}$. Esta expectativa se confirma con la figura 6.8.5, donde la respuesta de deformación $u(t)$ de un sistema con $T_n = 30$ s y $\zeta = 2\%$ para el movimiento del terreno de El Centro se compara con el desplazamiento del suelo $u_g(t)$. Observe que los valores máximos de u_o y u_{go} son cercanos y la variación en el tiempo de $u(t)$ es similar a la de $-u_g(t)$, pero para la rotación de la línea de base. La discrepancia entre ambas surge, en parte, por la pérdida de la porción inicial del movimiento del terreno ocurrido antes de que el acelerógrafo iniciara su registro.

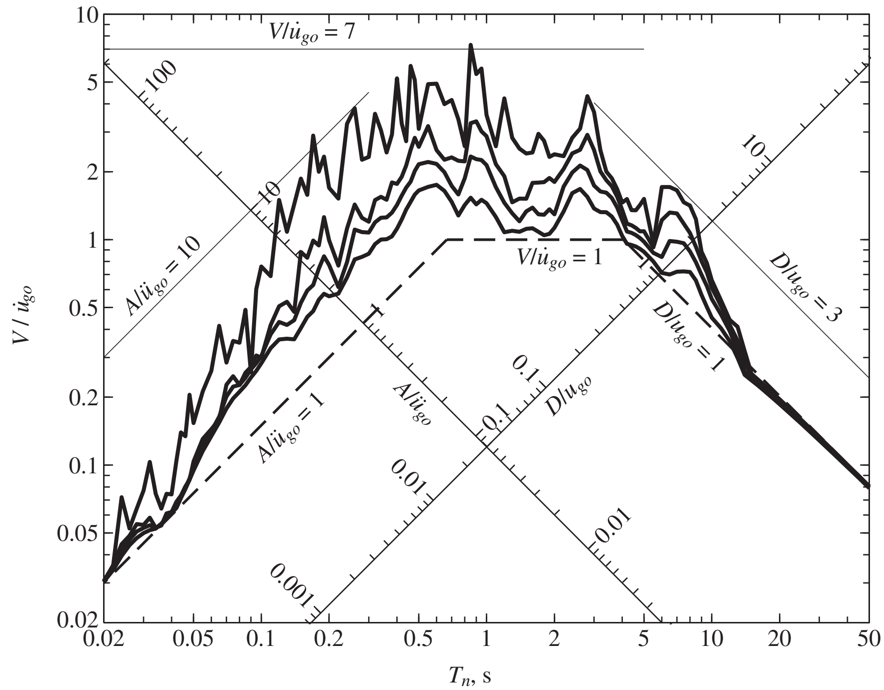


Figura 6.8.2 Espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro graficado con las escalas normalizadas $A/\ddot{u}_{go}$, $V/\dot{u}_{go}$, y D/u_{go}; $\zeta = 0, 2, 5$ y 10%.

Para los sistemas de periodo corto con T_n entre $T_a = 0.035$ s y $T_c = 0.50$ s, A es mayor que $\ddot{u}_{go}$ y la amplificación depende de T_n y ζ. En una porción de este intervalo de periodos, $T_b = 0.125$ s a $T_c = 0.5$ s, A puede idealizarse como una constante con valor igual a $\ddot{u}_{go}$, amplificada por un factor que depende de ζ.

Para los sistemas de periodo largo con T_n entre $T_d = 3$ s y $T_f = 15$ s, D suele ser mayor que u_{go}, con la amplificación que depende de T_n y ζ. En una porción de este intervalo de periodos, de $T_d = 3.0$ s a $T_e = 10$ s, D puede idealizarse como una constante con un valor igual a u_{go} amplificada por un factor que depende de ζ.

Para los sistemas de periodo intermedio con T_n entre $T_c = 0.5$ s y $T_d = 3.0$ s, V es mayor que $\dot{u}_{go}$. En este intervalo de periodos, V puede idealizarse como una constante con un valor igual a $\dot{u}_{go}$, amplificado por un factor que depende de ζ.

Con base en estas observaciones, resulta lógico dividir el espectro en tres intervalos de periodos (figura 6.8.3). La región de periodos largos a la derecha del punto d, $T_n > T_d$, se denomina *región sensible al desplazamiento* porque la respuesta estructural se relaciona más directamente con el desplazamiento del terreno. La región de periodos cortos a la izquierda del punto c, $T_n < T_c$, se llama la *región sensible a la aceleración* porque la respuesta estructural está más directamente relacionada con la aceleración del terreno. La región de periodos intermedios entre los puntos c y d, $T_c < T_n < T_d$, se denomina la *región sensible a la velocidad* debido a que la respuesta estructural parece estar más relacionada con la velocidad del terreno que con los otros parámetros del movimiento sísmico. Para un

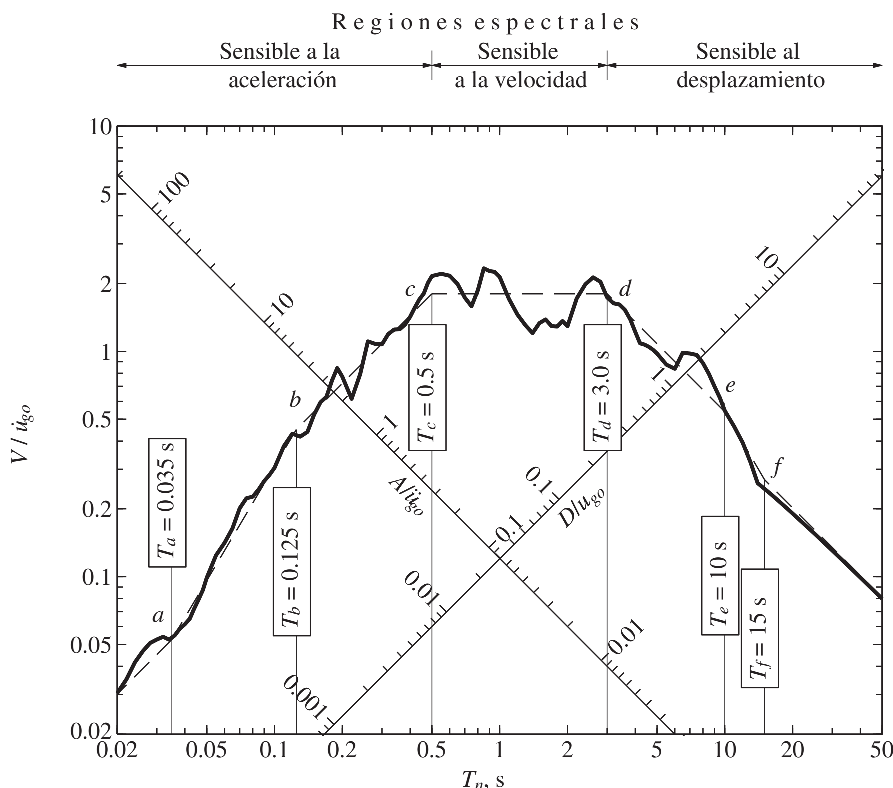


Figura 6.8.3 Espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro mostrado mediante la línea continua, junto con una versión idealizada que se muestra por medio de la línea discontinua; $\zeta = 5\%$.

movimiento del terreno particular, los periodos T_a, T_b, T_e y T_f en el espectro idealizado son independientes del amortiguamiento, pero T_c y T_d varían con él.

Las observaciones y el análisis anteriores han puesto de manifiesto la utilidad de la representación logarítmica a cuatro escalas de los espectros de respuesta combinados de deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración. Sería difícil deducir estas observaciones a partir de los tres espectros por separado.

Obviamente, la idealización del espectro mediante una serie de líneas rectas *a-b-c-d-e-f* en la representación logarítmica de cuatro escalas, no es un proceso preciso. Para un movimiento del terreno, los valores de periodo asociados con los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*, y con los factores de amplificación para los segmentos *b-c*, *c-d* y *d-e* resultan de alguna manera críticos en la ruta que se ha abordado. Sin embargo, es posible utilizar técnicas formales para el ajuste de curvas a fin de reemplazar el espectro real por un espectro idealizado de una forma seleccionada. En cualquier caso, el espectro idealizado de la figura 6.8.3 no es una aproximación cercana al espectro real. Esto puede no ser claramente visible, pero se hace evidente cuando se observa que las escalas son logarítmicas. Como se verá en la siguiente sección, el mayor beneficio del espectro idealizado se da en la construcción de un espectro de diseño representativo de muchos movimientos del terreno.

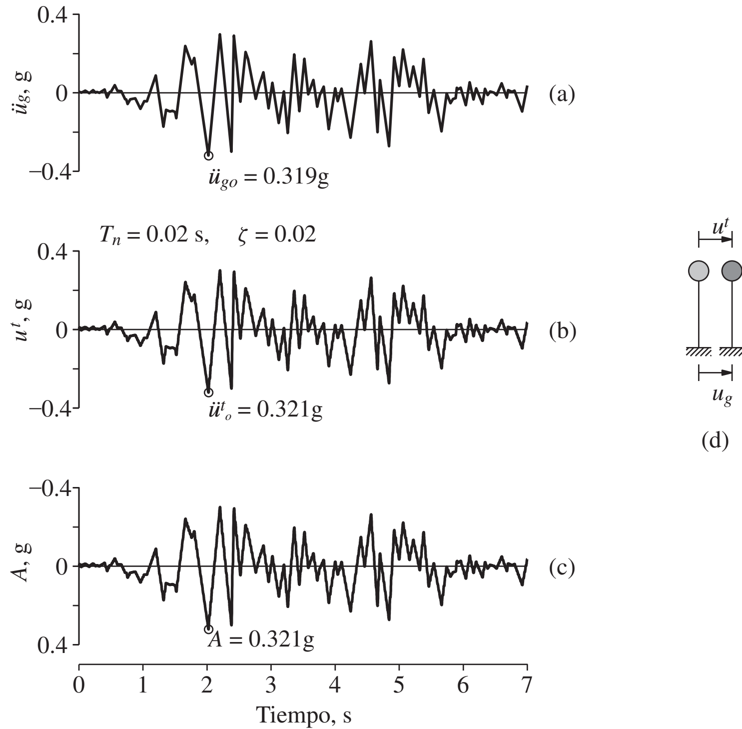


Figura 6.8.4 (a) Aceleración del terreno de El Centro; (b) respuesta de aceleración total de un sistema de 1GDL con $T_n = 0.02$ s y $\zeta = 2\%$; (c) respuesta de pseudo-aceleración para el mismo sistema; (d) sistema rígido.

Los periodos T_a, T_b, T_c, T_d, T_e y T_f que separan las regiones espectrales y los factores de amplificación para los segmentos *b-c*, *c-d* y *d-e* dependen de la variación en el tiempo del movimiento del terreno; en particular, los valores relativos de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento máximos del terreno, como lo indican sus relaciones: $\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go}$ y $u_{go}/\dot{u}_{go}$. Estas características del movimiento del terreno dependerán de la magnitud del sismo, la distancia al sitio de falla, la geología desde la falla hasta el sitio y las condiciones del terreno en el sitio.

Los movimientos del terreno registrados en la región próxima a la falla de un sismo, en las estaciones ubicadas en la dirección de la ruptura de la falla, son cualitativamente muy diferentes de los movimientos sísmicos que en general se registran lejos de ella. El componente normal de la falla de un movimiento sísmico registrado en la región próxima a la falla del sismo de Northridge, California, del 17 de enero 1994, muestra un pulso de periodo largo en la historia de la aceleración que aparece como un pulso coherente en las historias de la velocidad y el desplazamiento (figura 6.8.6a). Tal pulso pronunciado no existe en los movimientos del terreno registrados en lugares alejados de la región cercana a la falla, como el registro Taft obtenido en el Condado de Kern, California, para el sismo del 21 de julio de 1952 (figura 6.8.6b).

Las relaciones $\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go}$ y $u_{go}/\dot{u}_{go}$ son muy diferentes entre los componentes normales de la falla para movimientos cercanos y lejanos a ésta. Como resulta evidente en los

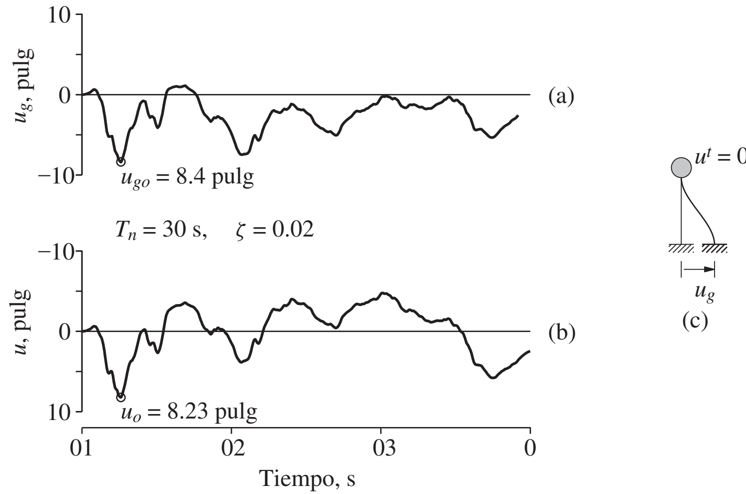


Figura 6.8.5 (a) Desplazamiento del terreno de El Centro; (b) respuesta de deformación de un sistema de 1GDL con T_n = 30 s y ζ = 2%; (c) sistema muy flexible.

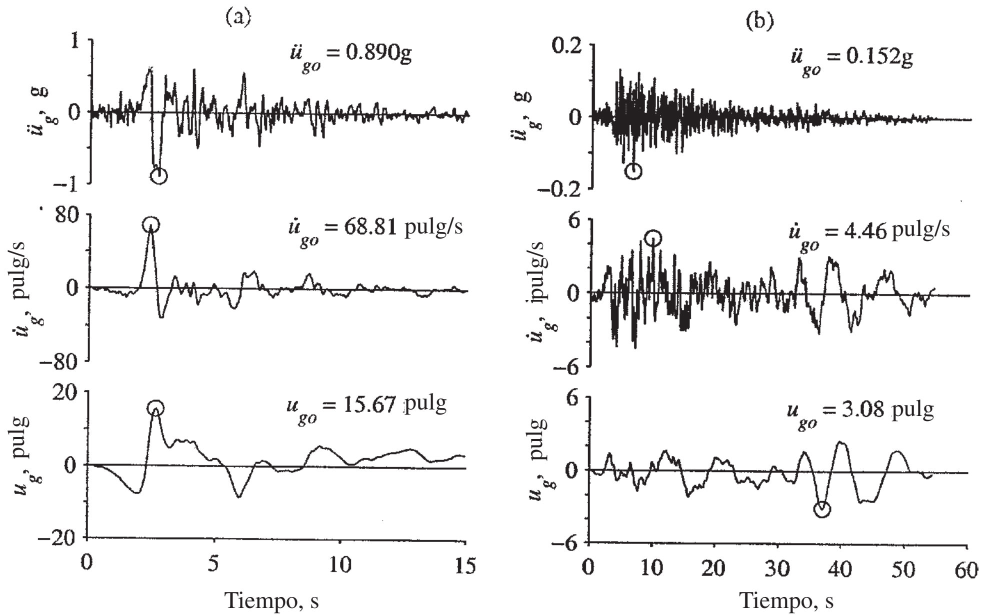


Figura 6.8.6 Componente normal de la falla de los movimientos del terreno registrados en (a) la estación de recepción Rinaldi, sismo de Northridge 1994 y (b) Taft, sismo del condado de Kern 1952.

valores máximos que se indican en la figura 6.8.6, la relación $\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go}$ para los movimientos cercanos a la falla es mucho mayor que la relación para los movimientos alejados de ella, mientras que la relación $u_{go}/\dot{u}_{go}$ para los movimientos cercanos a la falla es mucho menor.

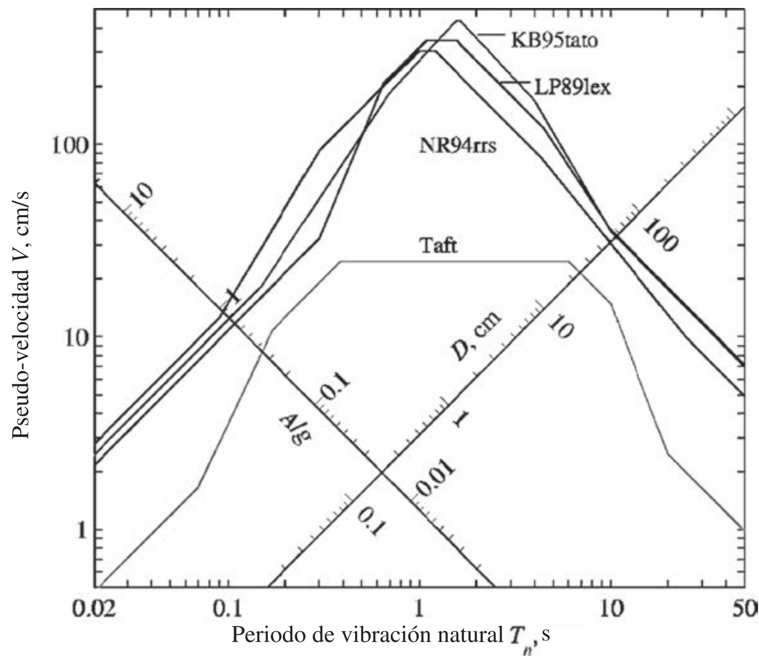


Figura 6.8.7 Espectros de respuesta idealizados para el componente normal de la falla de tres registros de movimiento del terreno cercanos a la falla (LP89Lex: Presa Lexington, 1989 en el sismo de Loma Prieta; NR94rrs: Estación de recepción Rinaldi, 1994 en el sismo de Northridge; y KB95tato: Estación Takatori, 1994 en el sismo de Hygogo-Ken-Nanbu (o Kobe) y del registro Taft de 1952; $\zeta = 5\%$.

Como resultado, los espectros de respuesta para los movimientos cercanos y lejanos a la falla son muy diferentes en forma. En la figura 6.8.7 se muestran las versiones idealizadas de los espectros de respuesta para los componentes normales de la falla de un movimiento alejado de ésta (el movimiento Taft de la figura 6.8.6a) y para tres movimientos cercanos a la falla (incluyendo el de la figura 6.8.6b) de sismos con magnitudes similares. La comparación de los registros indica que la región sensible a la velocidad es mucho más estrecha y se mueve en un periodo más largo para los movimientos cercanos a la falla, y que sus regiones sensibles a la aceleración y el desplazamiento son mucho más amplias que las correspondientes a los movimientos alejados de ella. A pesar de estas diferencias, los investigadores han demostrado que las tendencias de respuesta identificadas anteriormente a partir de las tres regiones espectrales de los movimientos del terreno alejados de la falla, suelen ser válidas para las regiones espectrales de los correspondientes movimientos del terreno cercanos a ella. Esta afirmación se retomará en la sección 22.3.3.

Ahora se abordará el amortiguamiento que tiene una influencia significativa en el espectro de respuesta del sismo (figuras 6.6.4 a 6.6.6). La curva de amortiguamiento cero está marcada por variaciones abruptas, lo cual indica que la respuesta es muy sensible a pequeñas diferencias en el periodo de vibración natural. La introducción del amortiguamiento hace que la respuesta sea mucho menos sensible al periodo.

El amortiguamiento reduce la respuesta de una estructura, como es de esperarse, y la reducción lograda con una cantidad dada de amortiguamiento es diferente en las tres regio-

nes espectrales. En el límite cuando $T_n \to 0$, el amortiguamiento no afecta a la respuesta porque la estructura se mueve de manera rígida con el terreno. En el otro límite cuando $T_n \to \infty$, el amortiguamiento de nuevo no afecta a la respuesta porque la masa estructural permanece inmóvil mientras el terreno se mueve debajo de ella. Entre las tres regiones de periodos definidas con anterioridad, el efecto del amortiguamiento tiende a ser mayor en la región del espectro sensible a la velocidad. En esta región espectral, el efecto de amortiguamiento depende de las características del movimiento del terreno. Si el movimiento del terreno es casi armónico durante muchos ciclos (por ejemplo, el registro de la Ciudad de México que se muestra en la figura 6.1.3), el efecto del amortiguamiento sería muy importante para los sistemas cercanos a la "resonancia" (capítulo 3). Si el movimiento del terreno es de corta duración con sólo unos pocos ciclos principales (por ejemplo, el registro de Parkfield, California, que se muestra en la figura 6.1.3), la influencia del amortiguamiento sería pequeña, como en el caso de las excitaciones de pulso (capítulo 4).

En la figura 6.8.8 se muestra la pseudo-aceleración máxima $A(\zeta)$, normalizada en relación con $A(\zeta = 0)$ y representada como una función de ζ para varios valores de T_n. Éstos son algunos de los datos del espectro de respuesta de las figuras 6.6.4 y 6.6.5 que vuelven a representarse en un formato diferente. Observe que el efecto del amortiguamiento es más fuerte para los valores más pequeños de amortiguación. Esto significa que si la fracción de amortiguamiento se incrementa de 0 a 2%, la reducción en la respuesta es mayor que la reducción correspondiente debida a un aumento del amortiguamiento de 10% a 12%. El efecto del amortiguamiento en la reducción de la respuesta depende del periodo T_n del sistema, pero no hay una tendencia clara que pueda observarse en la figura 6.8.8. Éste es otro indicio de la complejidad de la respuesta estructural a los sismos.

El movimiento de una estructura y las fuerzas asociadas podrían reducirse al aumentar el amortiguamiento efectivo de la estructura. La adición de amortiguadores logra este objetivo sin cambiar demasiado los periodos naturales de vibración de la estructura. Existen muchas estructuras a las que se les han añadido amortiguadores viscoelásticos; por ejemplo, se instalaron 10,000 amortiguadores en toda la altura de cada torre del World Trade Center

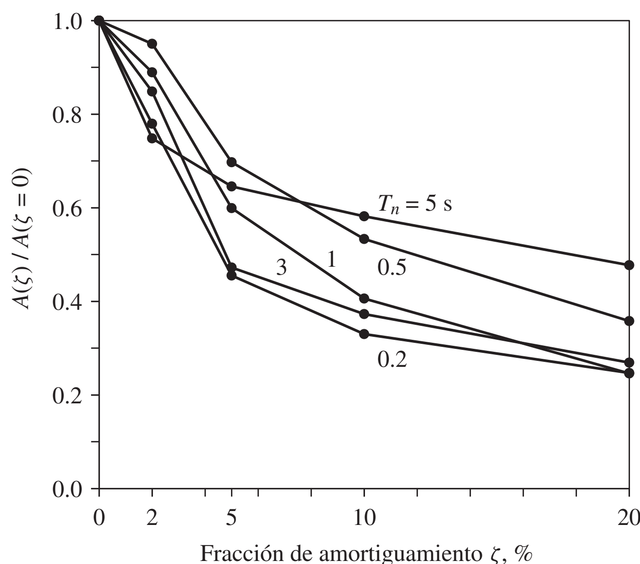


Figura 6.8.8 Variación de la pseudo-aceleración máxima con el amortiguamiento, para sistemas con $T_n = 0.2$, 0.5, 1, 3 y 5 s; movimiento del terreno de El Centro.

en Nueva York para reducir el movimiento inducido por el viento dentro de un intervalo confortable para los ocupantes. En los últimos años ha existido un creciente interés en el desarrollo de amortiguadores adecuados para estructuras en las regiones propensas a los sismos. En virtud de que el amortiguamiento inherente en la mayoría de las estructuras es muy pequeño, su respuesta a los sismos puede reducirse en gran medida al agregar amortiguadores. Éstos pueden ser de mucha utilidad para mejorar la seguridad sísmica de una estructura existente. Este tema se abordará de nuevo en el capítulo 7.

6.9 ESPECTRO DE DISEÑO ELÁSTICO

En esta sección se presenta el concepto del espectro de diseño sísmico para los sistemas elásticos y se presenta un procedimiento para construirlo a partir de los valores máximos estimados de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento del terreno.

El espectro de diseño debe satisfacer ciertos requisitos, ya que está pensado para diseñar nuevas estructuras o para evaluar la seguridad sísmica de las estructuras existentes, a fin de que puedan resistir a sismos futuros. Con este propósito, el espectro de respuesta para un movimiento del terreno registrado durante un sismo pasado es inapropiado. La variación en el espectro de respuesta, como se ve en la figura 6.6.4, es característica de esa excitación particular. El espectro de respuesta para otro movimiento del terreno registrado en el mismo sitio durante un sismo diferente también es irregular, pero los picos y los valles no se presentan necesariamente en los mismos periodos. Esto es evidente en la figura 6.9.1, donde se representan los espectros de respuesta para movimientos de suelo registrados en el mismo sitio durante tres sismos pasados. Del mismo modo, no es posible predecir la variación del espectro de respuesta en todos sus detalles para un movimiento del terreno que puede producirse en el futuro. Así, el espectro de diseño debe consistir en un conjunto de curvas suaves o en una serie de líneas rectas con una curva para cada nivel de amortiguamiento.

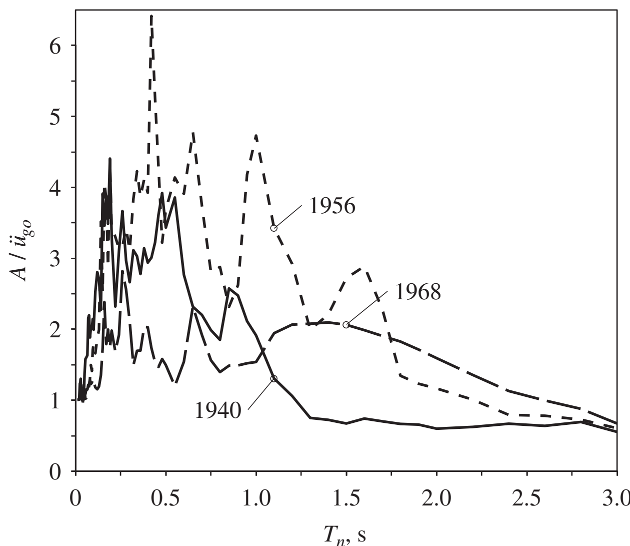


Figura 6.9.1 Espectros de respuesta para el componente norte-sur de los movimientos de suelo registrados en la subestación del distrito de riego del Valle Imperial, El Centro, California; durante los sismos del 18 de mayo de 1940, 9 de febrero de 1956 y 8 de abril de 1968. $\zeta = 2\%$.

El espectro de diseño debe, en un sentido general, ser representativo de los movimientos del terreno registrados en el sitio durante los sismos pasados. Si no ha habido registros en el sitio, el espectro de diseño debe basarse en los movimientos del terreno registrados en otras instalaciones con condiciones similares. Los factores que deben intentarse hacer coincidir en la selección incluyen la magnitud del sismo, la distancia del lugar a la falla causante, el mecanismo de falla, la geología en la trayectoria de desplazamiento de las ondas sísmicas desde la fuente hasta el sitio, y las condiciones locales del terreno en el sitio. Si bien este enfoque es factible para algunas partes del mundo, como California y Japón, donde existen numerosos registros de los movimientos del terreno, en muchas otras regiones se ve obstaculizado por la falta de un número suficiente de tales registros. En estas situaciones es necesario hacer concesiones en el enfoque, tomando en cuenta los datos de los movimientos sísmicos que se registraron en condiciones diferentes a las del sitio. Un análisis detallado de estos temas está más allá del alcance de este libro. La presentación aquí se centra en el limitado aspecto de cómo desarrollar un espectro de diseño que sea representativo de una serie (o conjunto) disponible de movimientos del terreno registrados.

El espectro de diseño se basa en el análisis estadístico de los espectros de respuesta para un conjunto de movimientos del terreno. Suponga que I es el número de movimientos del terreno en el conjunto, el i-ésimo movimiento del terreno se indica por $\ddot{u}^i{}_g(t)$ y u^i_{go}, $\dot{u}^i_{go}$ y $\ddot{u}^i{}_{go}$ son su desplazamiento, velocidad y aceleración máximos, respectivamente. Cada movimiento del terreno se normaliza (escalado hacia arriba o hacia abajo) de manera que todos los movimientos del terreno tengan la misma aceleración máxima, es decir $\ddot{u}_{go}$; también es posible elegir otras bases para la normalización. El espectro de respuesta para cada movimiento del terreno normalizado se calcula mediante los procedimientos descritos en la sección 6.6. En cada periodo T_n hay tantos valores espectrales como el numero I de registros de movimiento del terreno en el conjunto: D^i, V^i y A^i ($i = 1, 2, \ldots, I$), son las ordenadas espectrales de deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración. Estos datos se generaron para un conjunto de 10 registros sísmicos, y en la figura 6.9.2 se presentan aspectos seleccionados de los resultados. Las cantidades u_{go}, $\dot{u}_{go}$ y $\ddot{u}_{go}$ en las escalas normalizadas de la figura 6.9.2 son los valores promedio del desplazamiento, la velocidad y la aceleración máximos del terreno (promediados durante los I movimientos del terreno). El análisis estadístico de estos datos proporciona la distribución de probabilidad para la ordenada espectral, su valor medio y su desviación estándar en cada periodo T_n. Las distribuciones de probabilidad se muestran en forma esquemática en tres valores seleccionados de T_n, lo que indica que el coeficiente de variación (= desviación estándar ÷ valor medio) varía con T_n. Al conectar todos los valores medios, se obtiene el *espectro de respuesta promedio*. Asimismo, si se conectan todos los valores medios más una desviación estándar, se obtiene el *espectro de respuesta media más una desviación estándar*. Observe que estos dos espectros de respuesta son mucho más uniformes que el espectro de respuesta para un movimiento de tierra individual (figura 6.6.4). Como se muestra en la figura 6.9.2, una curva de espectro uniforme se presta mucho mejor a la idealización mediante una serie de líneas rectas que el espectro para un movimiento del terreno individual (figura 6.8.3).

Los investigadores han desarrollado procedimientos para construir tales espectros de diseño, a partir de los parámetros del movimiento del terreno. Uno de estos procedimientos, que se ilustra en la figura 6.9.3, se resumirá más adelante. Los valores de periodo recomendados $T_a = \frac{1}{33}$ s, $T_b = \frac{1}{8}$ s, $T_e = 10$ s y $T_f = 33$ s, así como los factores de amplificación α_A, α_V y α_D para las tres regiones espectrales, se desarrollaron mediante el análisis previo de un conjunto mayor de movimientos del terreno registrados en tierra firme (roca, roca suave y

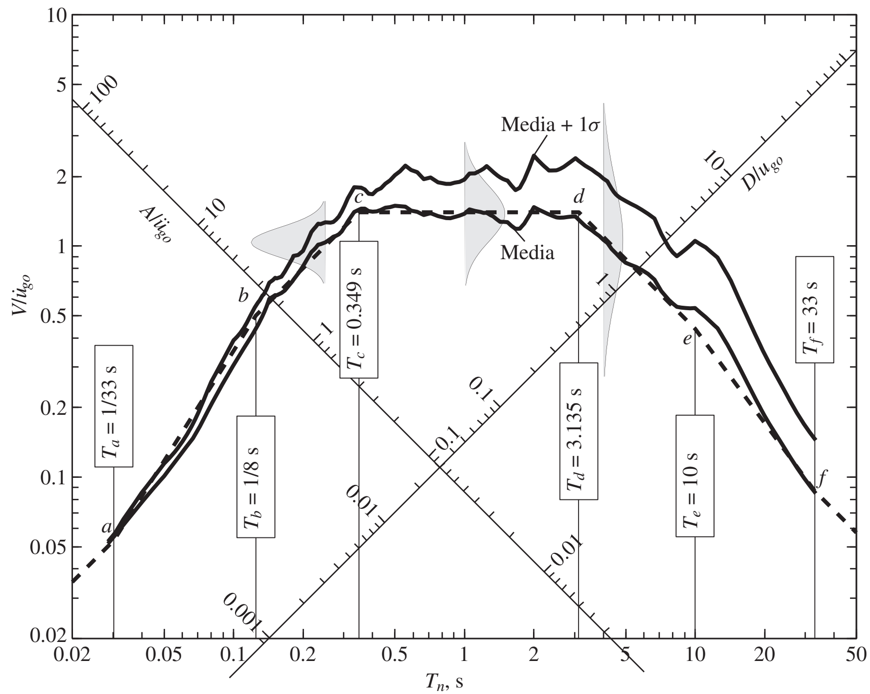


Figura 6.9.2 Espectros de la media y la media más una σ con distribuciones de probabilidad para V en $T_n = 0.25$, 1 y 4 s; $\zeta = 5\%$. Las líneas discontinuas muestran un espectro de diseño idealizado. (Basado en los datos numéricos de R. Riddell y Newmark NM, 1979).

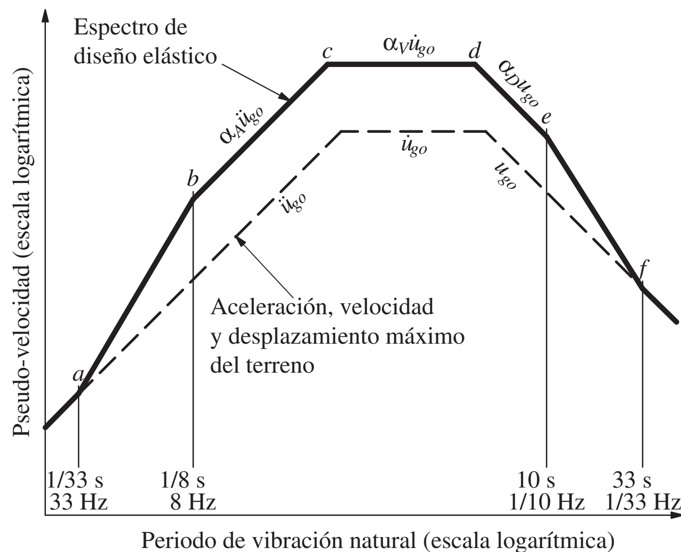


Figura 6.9.3 Construcción del espectro de diseño elástico.

TABLA 6.9.1 FACTORES DE AMPLIFICACIÓN: ESPECTROS DE DISEÑO ELÁSTICO

Amortiguamiento, ζ (%)	Mediana (percentil 50)			Uno Sigma (percentil 84.1)		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

Fuente: N. M. Newmark y W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 35 y 36.

TABLA 6.9.2 FACTORES DE AMPLIFICACIÓN: ESPECTROS DE DISEÑO ELÁSTICO[a]

	Mediana (percentil 50)	Uno Sigma (percentil 84.1)
α_A	$3.21 - 0.68 \ln \zeta$	$4.38 - 1.04 \ln \zeta$
α_V	$2.31 - 0.41 \ln \zeta$	$3.38 - 0.67 \ln \zeta$
α_D	$1.82 - 0.27 \ln \zeta$	$2.73 - 0.45 \ln \zeta$

Fuente: N. M. Newmark y W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 35 y 36.

sedimentos competentes). Los factores de amplificación para dos probabilidades diferentes de no excedencia, 50% y 84.1%, se proporcionan en la tabla 6.9.1 para varios valores de amortiguamiento y en la tabla 6.9.2 como una función de la fracción de amortiguamiento. La probabilidad de no excedencia del 50% representa el valor de la media de las ordenadas espectrales y la del 84.1% se aproxima al valor de la media más una desviación estándar suponiendo una distribución de probabilidad logarítmica normal para las ordenadas espectrales.

Observe que los valores de periodo T_a, T_b, T_e y T_f son fijos; los valores en la figura 6.9.3 corresponden a terreno firme. Los valores de periodo T_c y T_d se determinan mediante las intersecciones de las ramas de la constante A ($= \alpha_A \ddot{u}_{go}$), la constante V ($= \alpha_v \, \dot{u}_{go}$), y la constante D ($= \alpha_D u_{go}$) del espectro. Como α_A, α_V y α_D son funciones de ζ (tablas 6.9.1 y 6.9.2), T_c y T_d dependerán de la fracción de amortiguamiento.

Resumen. Ahora se resume un procedimiento para construir un espectro de diseño con referencia a la figura 6.9.3:

1. Trace las tres líneas discontinuas que corresponden a los valores máximos de la aceleración $\ddot{u}_{go}$, la velocidad $\dot{u}_{go}$, y el desplazamiento u_{go} del suelo para el movimiento del terreno de diseño.
2. Obtenga de las tablas 6.9.1 o 6.9.2 los valores de α_A, α_V y α_D para el ζ seleccionado.

3. Multiplique $\ddot{u}_{go}$ por el factor de amplificación α_A para obtener la línea recta *b-c* que representa un valor constante *A* de pseudo-aceleración.

4. Multiplique $\dot{u}_{go}$ por el factor de amplificación α_V para obtener la línea recta *c-d* que representa un valor constante *V* de pseudo-velocidad.

5. Multiplique u_{go} por el factor de amplificación α_D para obtener la línea recta *d-e* que representa un valor constante *D* de deformación.

6. Trace la línea $A = \ddot{u}_{go}$ para los periodos más cortos que T_a y la línea $D = u_{go}$ para los periodos más largos que T_f.

7. Complete el espectro con las líneas de transición *a-b* y *e-f*.

Ahora se ilustrará el uso de este procedimiento mediante la construcción del espectro de diseño del percentil 84.1 para sistemas con amortiguamiento del 5%. Por conveniencia, se selecciona un valor máximo de aceleración $\ddot{u}_{go} = 1$g; el espectro resultante puede escalarse mediante η para obtener el espectro de diseño correspondiente a $\ddot{u}_{go} = \eta$g. Tenga en cuenta también que no se proporcionan estimaciones específicas para la velocidad máxima $\dot{u}_{go}$ y el desplazamiento máximo u_{go} del terreno; por lo tanto, se usan los valores típicos $\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go} = 48$ pulg/s/g y $\ddot{u}_{go} \times u_{go}/\dot{u}_{go}^2 = 6$, recomendados para el terreno firme. Para $\ddot{u}_{go} = 1$g, estas proporciones dan $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg.

El espectro de diseño que se muestra en la figura 6.9.4 se determina mediante los siguientes pasos:

1. Se grafican los parámetros máximos para el movimiento del terreno: $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg.

2. A partir de la tabla 6.9.1 se obtienen los factores de amplificación para el espectro del percentil 84.1, con 5% de amortiguamiento: $\alpha_A = 2.71$, $\alpha_V = 2.30$ y $\alpha_D = 2.01$.

3-5. La ordenada para la rama de la constante *A* es $A = 1\text{g} \times 2.71 = 2.71$g, para la rama de la constante *V*: $V = 48 \times 2.30 = 110.4$ y para la rama de la constante *D*: $D = 36 \times 2.01 = 72.4$. Las tres ramas se dibujan de la manera mostrada.

6. Se grafica la línea $A = 1$g para $T_n < \frac{1}{33}$ s y $D = 36$ pulg para $T_n > 33$ s.

7. Se dibuja la línea de transición *b-a* para conectar el punto $A = 2.71$g en $T_n = \frac{1}{8}$ s con $\ddot{u}_{go} = 1$ g en $T_n = \frac{1}{33}$ s. De manera similar, se traza la línea de transición *e-f* para conectar el punto $D = 72.4$ en $T_n = 10$ s con $u_{go} = 36$ pulg en $T_n = 33$ s.

Al conocer el espectro de diseño de pseudo-velocidad (figura 6.9.4), se determinan el espectro de diseño de pseudo-aceleración y el espectro de diseño de deformación utilizando la ecuación (6.6.6), y se representan en las figuras 6.9.5 y 6.9.6, respectivamente. Observe que *A* se aproxima $\ddot{u}_{go} = 1$g en $T_n = 0$ y *D* tiende a $u_{go} = 36$ pulg en $T_n = 50$ s. El espectro de diseño puede definirse por completo mediante valores numéricos para T_a, T_b, T_c, T_d, T_e y T_f y ecuaciones para $A(T_n)$, $V(T_n)$ o $D(T_n)$ en cada rama del espectro. Como se ha mencionado antes, algunos de estos periodos (T_a, T_b, T_e y T_f) son fijos, pero otros (T_c y T_d) dependen del amortiguamiento. Las intersecciones de $A = 2.71$g, $V = 110.4$ pulg/s y $D = 72.4$ pulg, se determinan a partir de la ecuación (6.6.6): $T_c = 0.66$ s y $T_d = 4.12$ s para $\zeta = 5\%$. En la figura 6.9.5 se proporcionan ecuaciones que describen diversas ramas del espectro de diseño de pseudo-aceleración.

Si se repite la construcción anterior del espectro de diseño para valores adicionales de la fracción de amortiguamiento, se obtienen las figuras 6.9.7 a 6.9.10. Entonces, éste

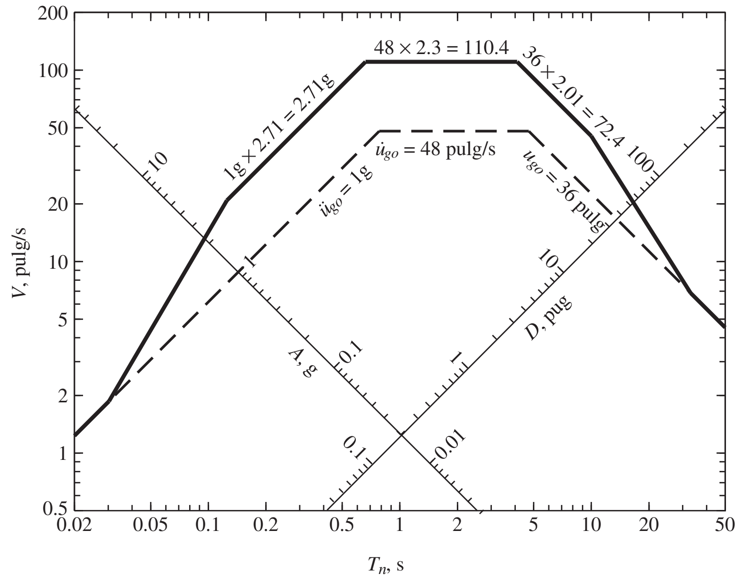


Figura 6.9.4 Construcción del espectro de diseño elástico (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 5\%$.

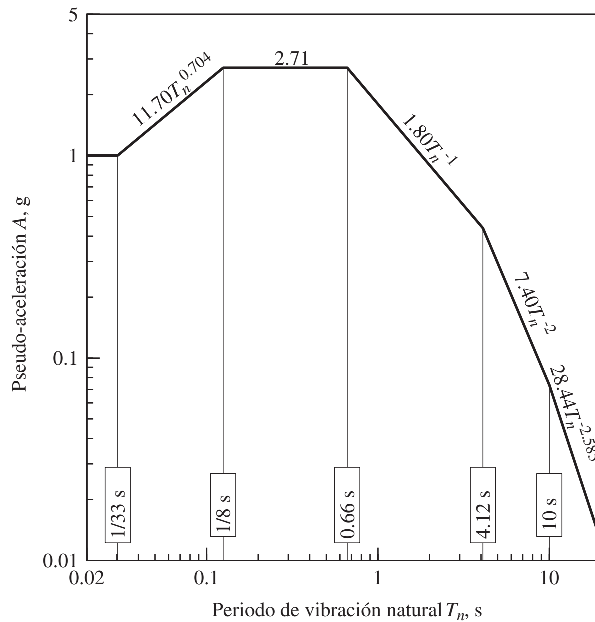


Figura 6.9.5 Espectro de diseño elástico de pseudo-aceleración (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 5\%$.

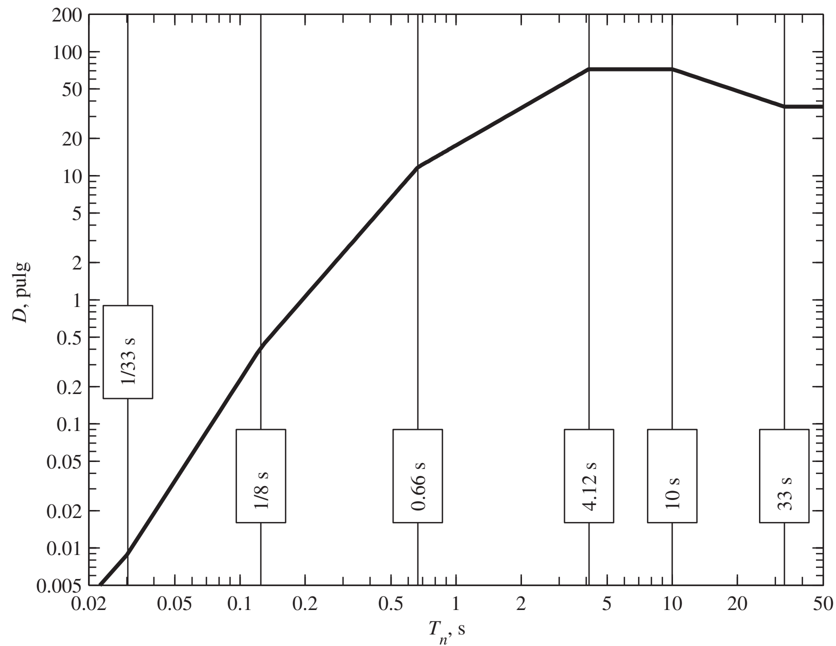


Figura 6.9.6 Espectro de diseño de deformación (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 5\%$.

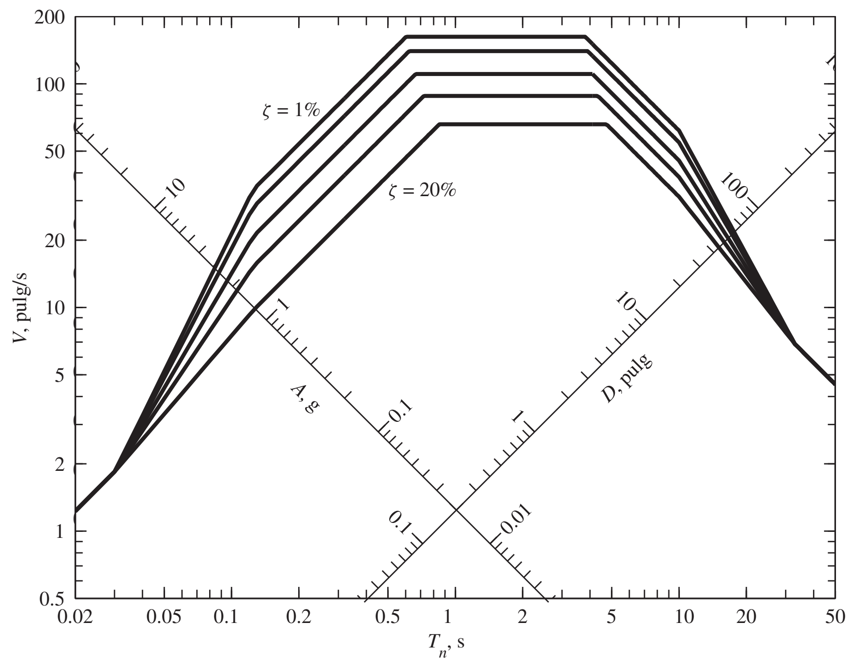


Figura 6.9.7 Espectro de diseño de pseudo-velocidad para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 1, 2, 5, 10$ y 20%.

es el espectro de diseño para movimientos de suelo en terreno firme con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} =$ 48 pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg en tres formas diferentes: pseudo-velocidad, pseudo-aceleración y deformación. Observe que el espectro de diseño de pseudo-aceleración se ha graficado en dos formatos: escalas logarítmicas (figura 6.9.8) y escalas lineales (figura 6.9.9).

El espectro de diseño elástico proporciona una base para calcular la fuerza y la deformación de diseño para los sistemas de 1GDL que deben diseñarse para permanecer elásticos. Con este propósito, el espectro de diseño se utiliza en la misma forma que se usó el espectro de respuesta para calcular la respuesta máxima; vea los ejemplos del 6.2 al 6.6. Sin embargo, pueden evitarse los errores al leer las ordenadas espectrales de una gráfica logarítmica de cuatro escalas, ya que las funciones simples de T_n definen diferentes ramas del espectro en las figuras 6.9.4 a 6.9.6.

Los parámetros que entran en la construcción del espectro de diseño elástico deben seleccionarse considerando los factores que influyen en el movimiento del terreno mencionados con anterioridad. Por lo tanto, la selección del parámetro del movimiento del terreno de diseño $\ddot{u}_{go}$, $\dot{u}_{go}$, y u_{go} debe basarse en la magnitud del sismo, la distancia a la falla sísmica, el mecanismo de falla, la geología en la trayectoria de la onda y las condiciones locales del sitio. Los resultados de la investigación sobre estos factores y aspectos relacionados

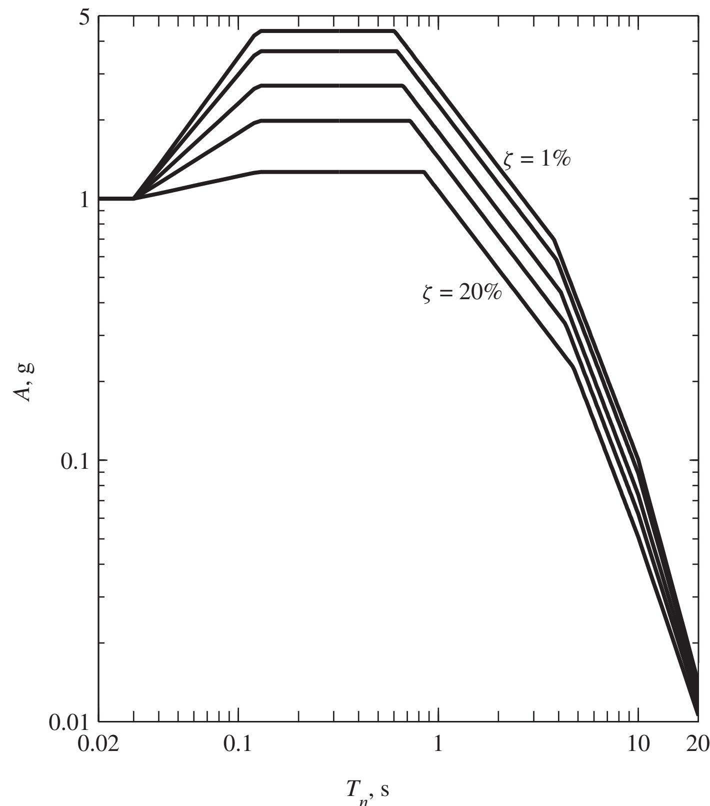


Figura 6.9.8 Espectro de diseño de pseudo-aceleración (percentil 84.1) para movimientos de tierra con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 1, 2, 5, 10$ y 20%.

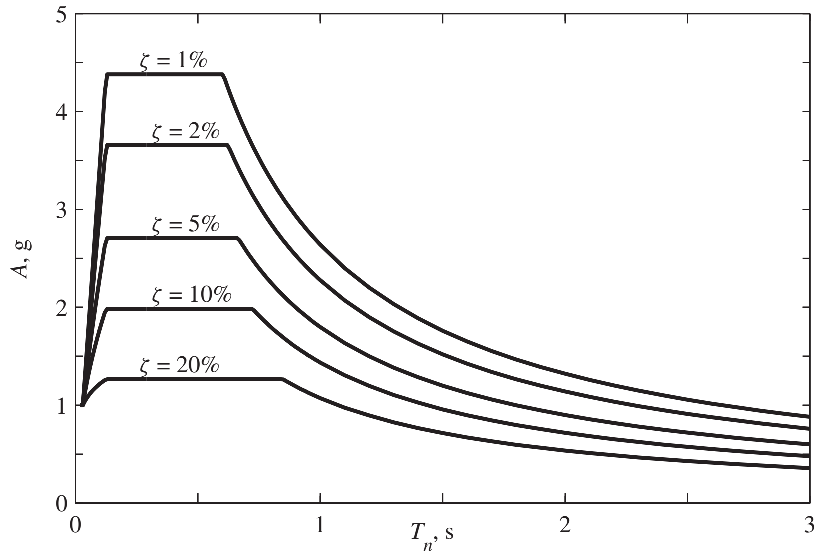


Figura 6.9.9 Espectro de diseño de pseudo-aceleración (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 1, 2, 5, 10$ y 20%.

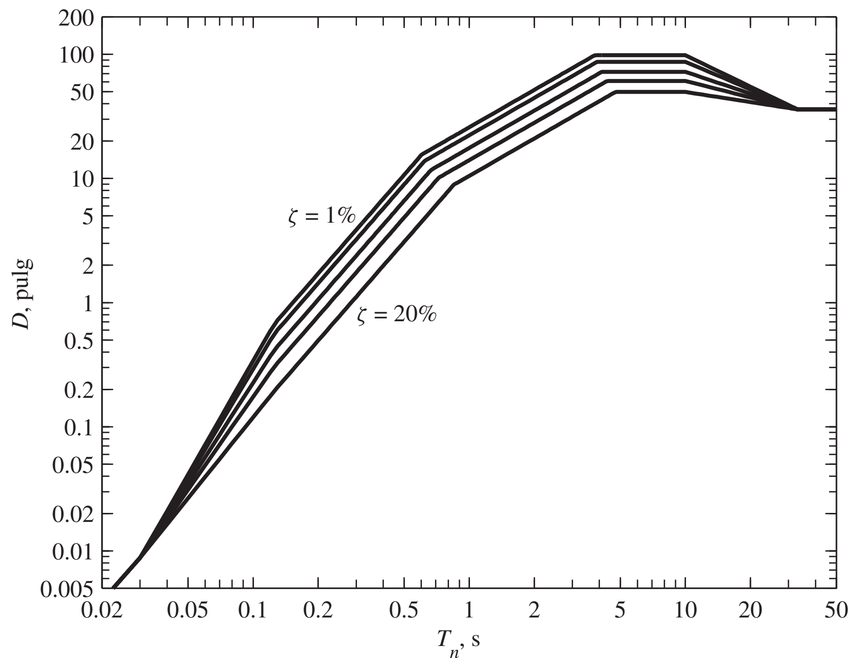


Figura 6.9.10 Espectro de diseño de deformación (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 1, 2, 5, 10$ y 20%.

están disponibles; se usan para determinar los espectros de diseño dependientes del sitio en proyectos importantes. De manera análoga, los valores numéricos de los factores de amplificación α_A, α_V y α_D deben elegirse en concordancia con el contenido de la frecuencia esperada para el movimiento del terreno.

Los valores seleccionados de $\ddot{u}_{go}$, $\dot{u}_{go}$, y u_{go} son consistentes con $\dot{u}_{go}/\ddot{u}_{go} = 48$ pulg/s/g y $\ddot{u}_{go} \times u_{go}/\dot{u}_{go}^2 = 6$. Estas razones se consideran representativas de los movimientos de suelo en terreno firme. Para tales sitios, el espectro resultante puede escalarse de modo que se ajuste a la aceleración máxima estimada del terreno. Entonces, si esta estimación es 0.4g, el espectro de las figuras 6.9.7 a 6.9.9 multiplicado por 0.4 da el espectro de diseño para el sitio. Un enfoque tan simple puede ser razonable si no se tiene planeado un análisis específico del sitio con amenaza sísmica.

6.10 COMPARACIÓN DE LOS ESPECTROS DE DISEÑO Y RESPUESTA

La comparación del espectro de diseño "estándar" desarrollado en la sección 6.9 para el terreno firme con un espectro de respuesta real para condiciones del terreno similares resulta instructiva. En la figura 6.10.1 se muestra un espectro de diseño estándar para $\ddot{u}_{go} = 0.319$g, la aceleración máxima para el movimiento del terreno de El Centro; los valores implícitos para $\dot{u}_{go}$ y u_{go} son 15.3 pulg/s y 11.5 pulg, respectivamente, con base en las razones estándar mencionadas en el párrafo anterior. En la figura 6.10.1 también se muestra el espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro; recuerde que los valores máximos reales de este movimiento son $\dot{u}_{go}$= 13.04 pulg/s y $u_{go} = 8.40$ pulg. El espectro de respuesta de El Centro concuerda bien con el espectro de diseño en la región sensible a la aceleración, en gran parte debido a que las aceleraciones máximas coinciden. Sin embargo, los dos espectros son muy diferentes en la región sensible a la velocidad debido a las diferencias (15.3 pulg/s contra 13.04 pulg/s) en la velocidad máxima del terreno. De manera similar, son incluso más diferentes en la región sensible al desplazamiento a causa de las diferencias más grandes (11.5 pulg contra 8.4 pulg) en el desplazamiento máximo del terreno.

El espectro de respuesta para un movimiento individual del terreno difiere del espectro de diseño, aun cuando los valores máximos $\ddot{u}_{go}$, $\dot{u}_{go}$ y u_{go} de los dos espectros coinciden. En la figura 6.10.2 se compara el espectro de respuesta para el movimiento de El Centro con el espectro de diseño para los parámetros de movimiento del terreno $\ddot{u}_{go} = 0.319$g, $\dot{u}_{go}$ = 13.04 pulg/s y $u_{go} = 8.40$ pulg (los mismos que para el movimiento de El Centro). Se incluyen dos espectros de diseño: el espectro del percentil 50 y el espectro del percentil 84.1. La concordancia entre los espectros de respuesta y de diseño es ahora mejor, porque los parámetros de movimiento del terreno coinciden. Sin embargo, siguen existiendo diferencias significativas: en la región sensible a la aceleración, el espectro de respuesta está cerca del espectro de diseño del percentil 84.1; en las regiones sensibles a la velocidad y al desplazamiento, el espectro de respuesta está entre los dos espectros de diseño para algunos periodos y por debajo del espectro de diseño de la mediana para otros periodos.

Tales diferencias eran de esperarse porque el espectro de diseño no está diseñado de modo que coincida con el espectro de respuesta para cualquier movimiento del terreno en particular, sino que se construye para representar las características promedio de muchos movimientos. Estas diferencias se deben a la variabilidad inherente en los movimientos del terreno, tal como se refleja en las distribuciones de probabilidad de los factores de amplificación y en las respuestas; vea la figura 6.9.2.

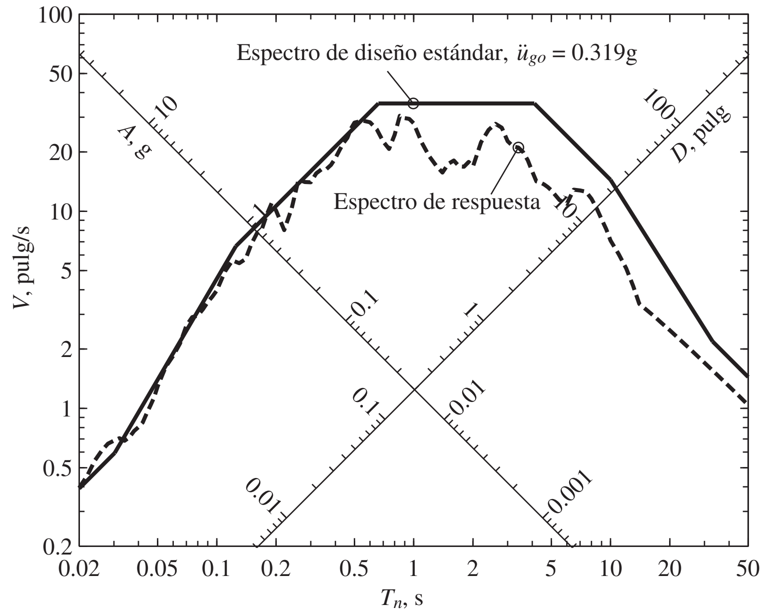


Figura 6.10.1 Comparación del espectro de diseño estándar ($\ddot{u}_{go} = 0.319$g) con el espectro de respuesta elástico para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 5\%$.

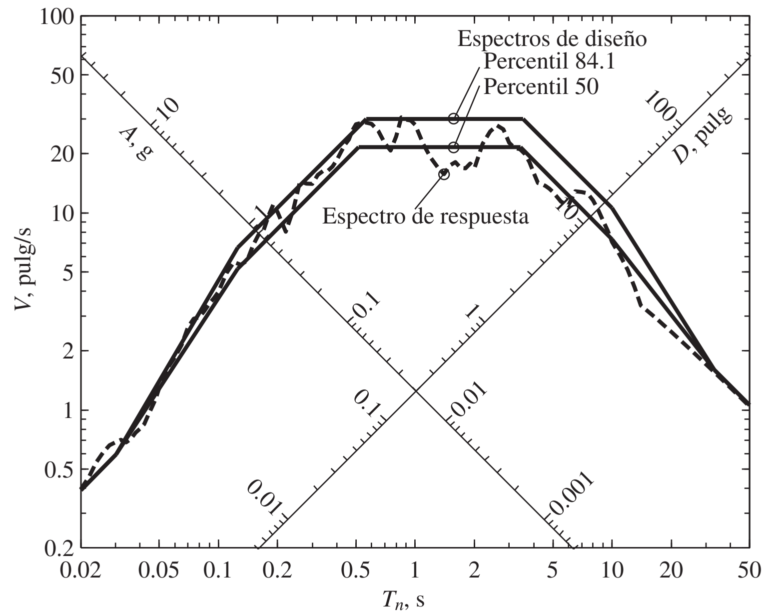


Figura 6.10.2 Comparación de los espectros de diseño ($\ddot{u}_{go} = 0.319$g, $\dot{u}_{go} = 13.04$ pulg/s, $u_{go} = 8.40$ pulg) con el espectro de respuesta elástico para el movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 5\%$.

6.11 DISTINCIÓN ENTRE LOS ESPECTROS DE DISEÑO Y DE RESPUESTA

Un espectro de diseño difiere conceptualmente de un espectro de respuesta en dos formas importantes. En primer lugar, el variable espectro de respuesta es una gráfica de la respuesta máxima de todos los sistemas de 1GDL posibles y, por lo tanto, es una descripción de un movimiento del terreno en particular. Por su parte, el espectro de diseño uniforme es una especificación del nivel de fuerza, o deformación, de diseño sísmico como una función del periodo de vibración natural y de la fracción de amortiguamiento. Esta diferencia conceptual entre los dos espectros debe reconocerse, aunque en algunas situaciones sus formas pueden ser similares. Tal es el caso del espectro de diseño cuando se determina mediante un análisis estadístico de varios espectros de respuesta comparables.

En segundo lugar, para algunos sitios un espectro de diseño es la envolvente de dos espectros de diseño elástico diferentes. Considere un sitio en el sur de California que podría verse afectado por dos tipos de sismos: un sismo de magnitud 6.5 que se origina en una falla cercana y otro de magnitud 8.5 en la lejana falla de San Andrés. El espectro de diseño para cada sismo podría determinarse mediante el procedimiento desarrollado en la sección 6.9. Las ordenadas y las formas de los dos espectros de diseño serían distintas, como se muestra esquemáticamente en la figura 6.11.1, debido a las diferencias en la magnitud del sismo y en la distancia del sitio a la falla causante del sismo. El espectro de diseño para este sitio se define como la envolvente de los espectros de diseño para los dos diferentes tipos de sismo. Observe que la porción de periodo corto del espectro de diseño se rige por el sismo en la zona, mientras que la porción de periodo largo del espectro de diseño está controlada por el sismo distante.

Antes de abandonar el tema se enfatiza en que en esta presentación limitada sobre la construcción de espectros de diseño elástico sólo se han considerado los métodos que están directamente relacionados con la dinámica estructural que se ha estudiado hasta ahora. En contraste, los métodos modernos para construir espectros de diseño se basan en el análisis probabilístico del riesgo sísmico, que considera la tasa histórica de actividad telúrica en todas las fallas que contribuyen a la amenaza sísmica en el sitio, lo que conduce al espectro de peligro uniforme.

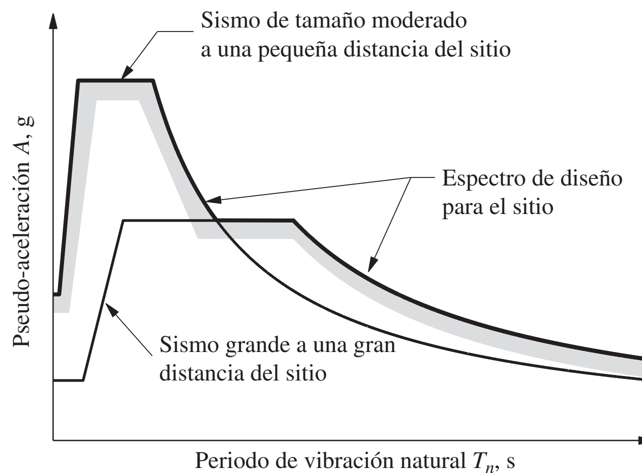


Figura 6.11.1 Espectro de diseño definido como la envolvente de los espectros de diseño para sismos que se originan en dos fallas diferentes.

6.12 ESPECTROS DE RESPUESTA DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Ahora se retoma el espectro de respuesta de velocidad relativa y el espectro de respuesta de aceleración que se introdujeron en la sección 6.5. En un sentido, hay poca motivación para estudiar estos espectros "verdaderos" debido a que no son necesarios para determinar las deformaciones y las fuerzas máximas en un sistema; para este fin, basta con el espectro de respuesta de pseudo-aceleración (o pseudo-velocidad o deformación). Sin embargo, se incluye un breve análisis de estos espectros "verdaderos" debido a que, en las publicaciones previas, no siempre se ha establecido la diferencia entre ellos y los espectros "pseudo", por lo que en ocasiones se utilizan de manera indistinta.

Para estudiar la relación entre estos espectros se escribirán en forma matemática. La respuesta de deformación de un sistema lineal de 1GDL a un movimiento arbitrario del

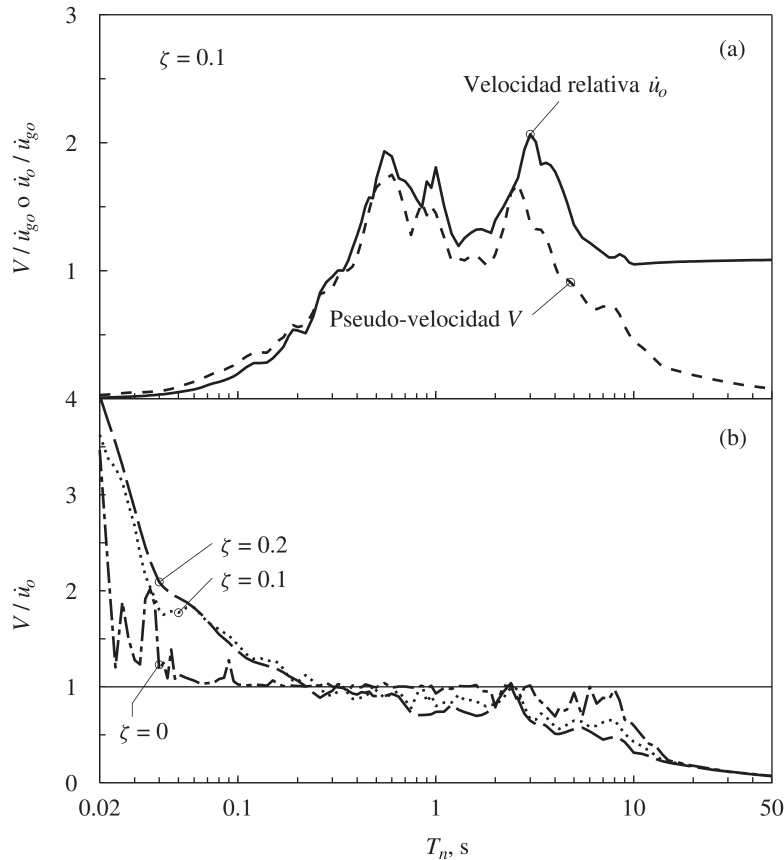


Figura 6.12.1 (a) Comparación entre los espectros de respuesta de pseudo-velocidad y velocidad relativa; $\zeta = 10\%$; (b) relación $V/\dot{u}_o$ para $\zeta = 0$, 10 y 20%.

terreno con condiciones iniciales nulas está dada por la integral de convolución, ecuación (4.2.2), adaptada para la excitación sísmica:

$$u(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{6.12.1}$$

donde la función de respuesta al impulso unitario, $h(t-\tau)$, está dada por la ecuación (4.1.7). Por lo tanto,

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\,\text{sen}[\omega_D(t-\tau)]\,d\tau \tag{6.12.2}$$

Si se usan los teoremas de cálculo para diferenciar bajo la integral se llega a

$$\dot{u}(t) = -\zeta\omega_n u(t) - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cos[\omega_D(t-\tau)]\,d\tau \tag{6.12.3}$$

Es posible obtener una ecuación para la aceleración $\ddot{u}^t(t)$ de la masa al diferenciar la ecuación (6.12.3) y sumarle la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Sin embargo, la ecuación de movimiento para el sistema (ecuación 6.2.1) proporciona una alternativa más conveniente:

$$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) \tag{6.12.4}$$

Como se definió con anterioridad, el espectro de velocidad relativa y el espectro de aceleración son gráficas de $\ddot{u}_o^t$, y $\ddot{u}^t{}_o$, los valores máximos de $\dot{u}(t)$ y $\ddot{u}^t(t)$, respectivamente, como funciones de T_n.

6.12.1 Espectros de pseudo-velocidad y velocidad relativa

En la figura 6.12.1a el espectro de respuesta de velocidad relativa se compara con el espectro de respuesta de pseudo-velocidad, tanto para el movimiento de El Centro como para los sistemas con $\zeta = 10\%$. Este último espectro es tan sólo una de las curvas de la figura 6.6.4 presentada en una forma diferente. Cada punto en el espectro de respuesta de velocidad relativa representa la velocidad máxima de un sistema de 1GDL obtenida de la $\dot{u}(t)$ que se determina mediante los métodos numéricos del capítulo 5. Las diferencias entre los dos espectros dependen del periodo natural del sistema. Para los sistemas de periodo largo, V es menor que $\dot{u}_o$ y las diferencias entre los dos valores son grandes. Esto puede entenderse si se reconoce que a medida que T_n se vuelve más grande, la masa del sistema permanece inmóvil mientras que el terreno se mueve debajo de ella. Así, cuando $T_n \to \infty$, $D \to u_{go}$ (vea la sección 6.8 y la figura 6.8.5) y $\dot{u}_o \to \dot{u}_{go}$. Ahora, $D \to u_{go}$ implica que $V \to 0$ por la ecuación (6.6.1). Estas tendencias se confirman mediante los resultados presentados en la figura 6.12.1a. Para los sistemas de periodo corto, V excede a $\dot{u}_o$, y las diferencias crecen a medida que T_n se acorta. Para los sistemas de periodo medio, las diferencias entre V y $\dot{u}_o$ son pequeñas en un amplio intervalo de T_n.

En la figura 6.12.1b, la relación $V/\dot{u}_o$ se grafica para tres valores de amortiguamiento, $\zeta = 0$, 10 y 20%. Las diferencias entre los dos espectros, como lo indica el tamaño de la variación entre la relación $V/\dot{u}_o$ y la unidad, son más pequeñas para los sistemas no amortiguados y aumenta con el amortiguamiento. Esto puede explicarse a partir de las ecuaciones (6.12.2) y (6.12.3) si se observa que para $\zeta = 0$, $\dot{u}(t)$ y $\omega_n u(t)$ son iguales, excepto por los términos de seno y coseno en el integrando. Con amortiguamiento, el primer término de la

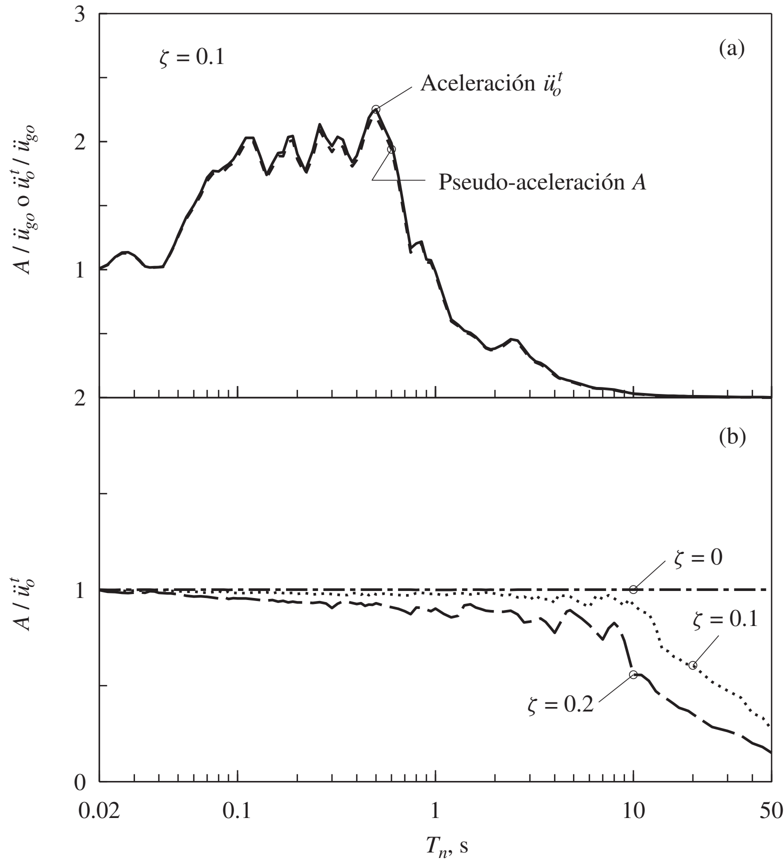


Figura 6.12.2 (a) Comparación entre los espectros de respuesta de pseudo-aceleración y aceleración; $\zeta = 10\%$; (b) relación de $A/\ddot{u}^t_o$ para $\zeta = 0$, 10 y 20%.

ecuación (6.12.3) contribuye a $\dot{u}(t)$, lo que sugiere que $\dot{u}(t)$ diferiría de $\omega_n u(t)$ a un mayor grado. En el intervalo de periodos medios V puede tomarse como una aproximación a $\dot{u}_o$ para el intervalo práctico de amortiguamiento.

6.12.2 Espectros de pseudo-aceleración y aceleración

Los espectros de respuesta de pseudo-aceleración y aceleración son idénticos para los sistemas sin amortiguamiento. Esto es evidente a partir de la ecuación (6.12.4), que se especifica para los sistemas no amortiguados como

$$\ddot{u}^t(t) = -\omega_n^2 u(t) \tag{6.12.5}$$

Por lo tanto, los valores máximos de los dos lados son iguales, es decir,

$$\ddot{u}_o^t = \omega_n^2 u_o = \omega_n^2 D = A \tag{6.12.6}$$

Con amortiguamiento, la ecuación (6.12.5) no es válida en todo momento, sino sólo en los instantes de tiempo cuando $\dot{u}(t) = 0$, en particular cuando $u(t)$ alcanza su pico u_o. En este

instante, $-\omega_n^2 u_o$ representa la aceleración real de la masa. Sin embargo, el valor máximo $\ddot{u}_o^t$ de $\ddot{u}^t(t)$ no se produce en el mismo instante, a menos que $\zeta = 0$. Los valores máximos $\ddot{u}_o^t$ y A se producen al mismo tiempo y son iguales solamente para $\zeta = 0$.

De acuerdo con la ecuación (6.12.4), es de esperar que las diferencias entre A y $\ddot{u}_o^t$ aumenten a medida que se incrementa el amortiguamiento. Esta expectativa se confirma con los datos presentados en la figura 6.12.2, donde se grafican los espectros de pseudo-aceleración y aceleración para el movimiento del terreno de El Centro con $\zeta = 10\%$ y se presenta la relación $A/\ddot{u}_o^t$ para tres valores de amortiguamiento. La diferencia entre los dos espectros es pequeña para los sistemas de periodo corto y sólo tiene cierta importancia para los sistemas de periodo largo con grandes valores de amortiguamiento. Así, para un amplio intervalo de condiciones, la pseudo-aceleración puede tratarse como una aproximación a la aceleración verdadera.

A medida que el periodo de vibración natural T_n de un sistema se aproxima al infinito, la masa del sistema permanece inmóvil mientras el terreno se mueve debajo de ella. Así, cuando $T_n \to \infty$, $\ddot{u}_o^t \to 0$ y $D \to u_{go}$, esto último implica que $A \to 0$ por la ecuación (6.6.3). Tanto A como $(\ddot{u}_t)_o \to 0$ cuando $T_n \to \infty$, pero a velocidades diferentes, como lo evidencia la relación $A/\ddot{u}_o^t$ graficada como una función de T_n; $A \to 0$ a un ritmo mucho más rápido debido a que T_n^2 se encuentra en el denominador de la ecuación (6.6.3).

Otra forma de ver las diferencias entre los dos espectros consiste en recordar que mA es igual al valor máximo de la fuerza de resistencia elástica. En contraste, $m\ddot{u}_o^t$ es igual al valor máximo de la suma de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento. Como se ve en la figura 6.12.3b, la pseudo-aceleración es menor que la aceleración real, puesto que es la parte de la aceleración verdadera que proporciona la fuerza elástica.

A modo de aclaración, se observa que la adopción generalizada del prefijo *pseudo* es engañosa en cierto sentido. El significado literal de *pseudo* (falso) no es en realidad apropiado, puesto que se trata de aproximaciones y no de conceptos falsos o inapropiados (en ningún sentido). De hecho, son pocas las ocasiones en que existe la necesidad de utilizar los "pseudo"-espectros como aproximaciones a los espectros "verdaderos", porque estos últimos pueden calcularse mediante los mismos procedimientos numéricos que se utilizan para los primeros. Además, como se destacó con anterioridad, las cantidades pseudo proporcionan los valores exactos de las deformaciones y fuerzas deseadas.

LECTURAS ADICIONALES

Benioff, H., "The Physical Evaluation of Seismic Destructiveness", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **24**, 1934, pp. 398-403.

Biot, M. A., "Theory of Elastic Systems Under Transient Loading with an Application to Earthquake Proof Buildings", Memorias, *National Academy of Sciences*, **19**, 1933, pp. 262-268.

Biot, M. A., "A Mechanical Analyzer for the Prediction of Earthquake Stresses", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **31**, 1941, pp. 151-171.

Bolt, B. A., *Earthquakes*, W. H. Freeman, Nueva York, 1993, capítulos 1-7.

Clough, R. W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993, pp. 586-597.

Housner, G. W., "Calculating the Response of an Oscillator to Arbitrary Ground Motion", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **31**, 1941, pp. 143-149.

Housner, G. W. y Jennings, P. C., *Earthquake Design Criteria*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 19-41 y 58-88.

Hudson, D. E., "Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology", *Proceedings of the First World Conference in Earthquake Engineering*, Berkeley, California, 1956, pp. 4-1 a 4-12.

Hudson, D. E., *Reading and Interpreting Strong Motion Accelerograms*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1979, pp. 22-70 y 95-97.

Hudson, D. E., "A History of Earthquake Engineering", *Proceedings of the IDNDR International Symposium on Earthquake Disaster Reduction Technology-30th Anniversary of IISEE*, Tsukuba, Japón, 1992, pp. 3-13.

Mohraz, B. y Elghadamsi, F. E., "Earthquake Ground Motion and Response Spectra", capítulo 2 de *The Seismic Design Handbook* (ed. F. Naeim), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1989.

Newmark, N. M. y Hall, W. J., *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 29-37.

Newmark, N. M. y Rosenblueth, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, capítulo 7.

Riddell, R. y Newmark, N. M., "Statistical Analysis of the Response of Nonlinear Systems Subjected to Earthquakes", *Structural Research Series No. 468*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Ill., agosto de 1979.

Rosenblueth, E., "Characteristics of Earthquakes", capítulo 1 de *Design of Earthquake Resistant Structures* (ed. E. Rosenblueth), Pentech Press, Londres, 1980.

Seed, H. B. e Idriss, I. M., *Ground Motions and Soil Liquefaction During Earthquakes*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 21-56.

Veletsos, A. S., "Maximum Deformation of Certain Nonlinear Systems", *Proceedings of the 4th World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile, Vol. 1, 1969, pp. 155-170.

Veletsos, A. S. y Newmark, N. M., "Response Spectra for Single-Degree-of-Freedom Elastic and Inelastic Systems", *reporte No. RTD-TDR-63-3096*, vol. III, Air Force Weapons Laboratory, Albuquerque, N.M., junio de 1964.

Veletsos, A. S., Newmark, N. M. y Chelapati, C. V., "Deformation Spectra for Elastic and Elastoplastic Systems Subjected to Ground Shock and Earthquake Motion", *Proceedings of the 3rd World Conference on Earthquake Engineering*, Nueva Zelanda, vol. II, 1965, pp. 663-682.

APÉNDICE 6: EL CENTRO, MOVIMIENTO DEL TERRENO DE 1940

En la figura 6.1.4 se muestra el componente norte-sur del movimiento del terreno registrado en un sitio de El Centro, California, durante el sismo del Valle Imperial, California, el 18 de mayo de 1940. En el presente libro se utiliza esta versión particular del registro y es necesaria para resolver algunos de los problemas al final de capítulo. Los valores numéricos de la aceleración del terreno en unidades de g, la aceleración debida a la gravedad, se presentan en la tabla A6.1. Ésta incluye 1559 puntos de datos en espaciamientos de tiempo iguales a 0.02 s, de modo que pueda leerse fila por fila; el primer valor está en $t = 0.02$ s; la aceleración en el instante $t = 0$ es cero. Estos datos también están disponibles en formato electrónico en el Servicio Nacional de Información de Ingeniería Sísmica (NISEE) de la Universidad de California en Berkeley, en la siguiente dirección de internet: <http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/a.k.chopra/index.html>.

TABLA A6.1 DATOS DE LA ACELERACIÓN DEL SUELO

0.00630	0.00364	0.00099	0.00428	0.00758	0.01087	0.00682	0.00277
−0.00128	0.00368	0.00864	0.01360	0.00727	0.00094	0.00420	0.00221
0.00021	0.00444	0.00867	0.01290	0.01713	−0.00343	−0.02400	−0.00992
0.00416	0.00528	0.01653	0.02779	0.03904	0.02449	0.00995	0.00961
0.00926	0.00892	−0.00486	−0.01864	−0.03242	−0.03365	−0.05723	−0.04534
−0.03346	−0.03201	−0.03056	−0.02911	−0.02766	−0.04116	−0.05466	−0.06816
−0.08166	−0.06846	−0.05527	−0.04208	−0.04259	−0.04311	−0.02428	−0.00545
0.01338	0.03221	0.05104	0.06987	0.08870	0.04524	0.00179	−0.04167
−0.08513	−0.12858	−0.17204	−0.12908	−0.08613	−0.08902	−0.09192	−0.09482
−0.09324	−0.09166	−0.09478	−0.09789	−0.12902	−0.07652	−0.02401	0.02849
0.08099	0.13350	0.18600	0.23850	0.21993	0.20135	0.18277	0.16420
0.14562	0.16143	0.17725	0.13215	0.08705	0.04196	−0.00314	−0.04824
−0.09334	−0.13843	−0.18353	−0.22863	−0.27372	−0.31882	−0.25024	−0.18166
−0.11309	−0.04451	0.02407	0.09265	0.16123	0.22981	0.29839	0.23197
0.16554	0.09912	0.03270	−0.03372	−0.10014	−0.16656	−0.23299	−0.29941
−0.00421	0.29099	0.22380	0.15662	0.08943	0.02224	−0.04495	0.01834
0.08163	0.14491	0.20820	0.18973	0.17125	0.13759	0.10393	0.07027
0.03661	0.00295	−0.03071	−0.00561	0.01948	0.04458	0.06468	0.08478
0.10487	0.05895	0.01303	−0.03289	−0.07882	−0.03556	0.00771	0.05097
0.01013	−0.03071	−0.07156	−0.11240	−0.15324	−0.11314	−0.07304	−0.03294
0.00715	−0.06350	−0.13415	−0.20480	−0.12482	−0.04485	0.03513	0.11510
0.19508	0.12301	0.05094	−0.02113	−0.09320	−0.02663	0.03995	0.10653
0.17311	0.11283	0.05255	−0.00772	0.01064	0.02900	0.04737	0.06573
0.02021	−0.02530	−0.07081	−0.04107	−0.01133	0.00288	0.01709	0.03131
−0.02278	−0.07686	−0.13095	−0.18504	−0.14347	−0.10190	−0.06034	−0.01877
0.02280	−0.00996	−0.04272	−0.02147	−0.00021	0.02104	−0.01459	−0.05022
−0.08585	−0.12148	−0.15711	−0.19274	−0.22837	−0.18145	−0.13453	−0.08761
−0.04069	0.00623	0.05316	0.10008	0.14700	0.09754	0.04808	−0.00138
0.05141	0.10420	0.15699	0.20979	0.26258	0.16996	0.07734	−0.01527
−0.10789	−0.20051	−0.06786	0.06479	0.01671	−0.03137	−0.07945	−0.12753
−0.17561	−0.22369	−0.27177	−0.15851	−0.04525	0.06802	0.18128	0.14464
0.10800	0.07137	0.03473	0.09666	0.15860	0.22053	0.18296	0.14538
0.10780	0.07023	0.03265	0.06649	0.10033	0.13417	0.10337	0.07257
0.04177	0.01097	−0.01983	0.04438	0.10860	0.17281	0.10416	0.03551
−0.03315	−0.10180	−0.07262	−0.04344	−0.01426	0.01492	−0.02025	−0.05543
−0.09060	−0.12578	−0.16095	−0.19613	−0.14784	−0.09955	−0.05127	−0.00298
−0.01952	−0.03605	−0.05259	−0.04182	−0.03106	−0.02903	−0.02699	0.02515
0.01770	0.02213	0.02656	0.00419	−0.01819	−0.04057	−0.06294	−0.02417
0.01460	0.05337	0.02428	−0.00480	−0.03389	−0.00557	0.02274	0.00679
−0.00915	−0.02509	−0.04103	−0.05698	−0.01826	0.02046	0.00454	−0.01138
−0.00215	0.00708	0.00496	0.00285	0.00074	−0.00534	−0.01141	0.00361
0.01863	0.03365	0.04867	0.03040	0.01213	−0.00614	−0.02441	0.01375
0.01099	0.00823	0.00547	0.00812	0.01077	−0.00692	−0.02461	−0.04230
−0.05999	−0.07768	−0.09538	−0.06209	−0.02880	0.00448	0.03777	0.01773
−0.00231	−0.02235	0.01791	0.05816	0.03738	0.01660	−0.00418	−0.02496
−0.04574	−0.02071	0.00432	0.02935	0.01526	0.01806	0.02086	0.00793
−0.00501	−0.01795	−0.03089	−0.01841	−0.00593	0.00655	−0.02519	−0.05693
−0.04045	−0.02398	−0.00750	0.00897	0.00384	−0.00129	−0.00642	−0.01156
−0.02619	−0.04082	−0.05545	−0.04366	−0.03188	−0.06964	−0.05634	−0.04303

TABLA A6.1 DATOS DE LA ACELERACIÓN DEL SUELO (*Continuación*)

−0.02972	−0.01642	−0.00311	0.01020	0.02350	0.03681	0.05011	0.02436
−0.00139	−0.02714	−0.00309	0.02096	0.04501	0.06906	0.05773	0.04640
0.03507	0.03357	0.03207	0.03057	0.03250	0.03444	0.03637	0.01348
−0.00942	−0.03231	−0.02997	−0.03095	−0.03192	−0.02588	−0.01984	−0.01379
−0.00775	−0.01449	−0.02123	0.01523	0.05170	0.08816	0.12463	0.16109
0.12987	0.09864	0.06741	0.03618	0.00495	0.00420	0.00345	0.00269
−0.05922	−0.12112	−0.18303	−0.12043	−0.05782	0.00479	0.06740	0.13001
0.08373	0.03745	0.06979	0.10213	−0.03517	−0.17247	−0.13763	−0.10278
−0.06794	−0.03310	−0.03647	−0.03984	−0.00517	0.02950	0.06417	0.09883
0.13350	0.05924	−0.01503	−0.08929	−0.16355	−0.06096	0.04164	0.01551
−0.01061	−0.03674	−0.06287	−0.08899	−0.05430	−0.01961	0.01508	0.04977
0.08446	0.05023	0.01600	−0.01823	−0.05246	−0.08669	−0.06769	−0.04870
−0.02970	−0.01071	0.00829	−0.00314	0.02966	0.06246	−0.00234	−0.06714
−0.04051	−0.01388	0.01274	0.00805	0.03024	0.05243	0.02351	−0.00541
−0.03432	−0.06324	−0.09215	−0.12107	−0.08450	−0.04794	−0.01137	0.02520
0.06177	0.04028	0.01880	0.04456	0.07032	0.09608	0.12184	0.06350
0.00517	−0.05317	−0.03124	−0.00930	0.01263	0.03457	0.03283	0.03109
0.02935	0.04511	0.06087	0.07663	0.09239	0.05742	0.02245	−0.01252
0.00680	0.02611	0.04543	0.01571	−0.01402	−0.04374	−0.07347	−0.03990
−0.00633	0.02724	0.06080	0.03669	0.01258	−0.01153	−0.03564	−0.00677
0.02210	0.05098	0.07985	0.06915	0.05845	0.04775	0.03706	0.02636
0.05822	0.09009	0.12196	0.10069	0.07943	0.05816	0.03689	0.01563
−0.00564	−0.02690	−0.04817	−0.06944	−0.09070	−0.11197	−0.11521	−0.11846
−0.12170	−0.12494	−0.16500	−0.20505	−0.15713	−0.10921	−0.06129	−0.01337
0.03455	0.08247	0.07576	0.06906	0.06236	0.08735	0.11235	0.13734
0.12175	0.10616	0.09057	0.07498	0.08011	0.08524	0.09037	0.06208
0.03378	0.00549	−0.02281	−0.05444	−0.04030	−0.02615	−0.01201	−0.02028
−0.02855	−0.06243	−0.03524	−0.00805	−0.04948	−0.03643	−0.02337	−0.03368
−0.01879	−0.00389	0.01100	0.02589	0.01446	0.00303	−0.00840	0.00463
0.01766	0.03069	0.04372	0.02165	−0.00042	−0.02249	−0.04456	−0.03638
−0.02819	−0.02001	−0.01182	−0.02445	−0.03707	−0.04969	−0.05882	−0.06795
−0.07707	−0.08620	−0.09533	−0.06276	−0.03018	0.00239	0.03496	0.04399
0.05301	0.03176	0.01051	−0.01073	−0.03198	−0.05323	0.00186	0.05696
0.01985	−0.01726	−0.05438	−0.01204	0.03031	0.07265	0.11499	0.07237
0.02975	−0.01288	0.01212	0.03711	0.03517	0.03323	0.01853	0.00383
0.00342	−0.02181	−0.04704	−0.07227	−0.09750	−0.12273	−0.08317	−0.04362
−0.00407	0.03549	0.07504	0.11460	0.07769	0.04078	0.00387	0.00284
0.00182	−0.05513	0.04732	0.05223	0.05715	0.06206	0.06698	0.07189
0.02705	−0.01779	−0.06263	−0.10747	−0.15232	−0.12591	−0.09950	−0.07309
−0.04668	−0.02027	0.00614	0.03255	0.00859	−0.01537	−0.03932	−0.06328
−0.03322	−0.00315	0.02691	0.01196	−0.00300	0.00335	0.00970	0.01605
0.02239	0.04215	0.06191	0.08167	0.03477	−0.01212	−0.01309	−0.01407
−0.05274	−0.02544	0.00186	0.02916	0.05646	0.08376	0.01754	−0.04869
−0.02074	0.00722	0.03517	−0.00528	−0.04572	−0.08617	−0.06960	−0.05303
−0.03646	−0.01989	−0.00332	0.01325	0.02982	0.01101	−0.00781	−0.02662
−0.00563	0.01536	0.03635	0.05734	0.03159	0.00584	−0.01992	−0.00201
0.01589	−0.01024	−0.03636	−0.06249	−0.04780	−0.03311	−0.04941	−0.06570
−0.08200	−0.04980	−0.01760	0.01460	0.04680	0.07900	0.04750	0.01600
−0.01550	−0.00102	0.01347	0.02795	0.04244	0.05692	0.03781	0.01870
−0.00041	−0.01952	−0.00427	0.01098	0.02623	0.04148	0.01821	−0.00506

TABLA A6.1 DATOS DE LA ACELERACIÓN DEL SUELO (*Continuación*)

−0.00874	−0.03726	−0.06579	−0.02600	0.01380	0.05359	0.09338	0.05883
0.02429	−0.01026	−0.04480	−0.01083	−0.01869	−0.02655	−0.03441	−0.02503
−0.01564	−0.00626	−0.01009	−0.01392	0.01490	0.04372	0.03463	0.02098
0.00733	−0.00632	−0.01997	0.00767	0.03532	0.03409	0.03287	0.03164
0.02403	0.01642	0.00982	0.00322	−0.00339	0.02202	−0.01941	−0.06085
−0.10228	−0.07847	−0.05466	−0.03084	−0.00703	0.01678	0.01946	0.02214
0.02483	0.01809	−0.00202	−0.02213	−0.00278	0.01656	0.03590	0.05525
0.07459	0.06203	0.04948	0.03692	−0.00145	0.04599	0.04079	0.03558
0.03037	0.03626	0.04215	0.04803	0.05392	0.04947	0.04502	0.04056
0.03611	0.03166	0.00614	−0.01937	−0.04489	−0.07040	−0.09592	−0.07745
−0.05899	−0.04052	−0.02206	−0.00359	0.01487	0.01005	0.00523	0.00041
−0.00441	−0.00923	−0.01189	−0.01523	−0.01856	−0.02190	−0.00983	0.00224
0.01431	0.00335	−0.00760	−0.01856	−0.00737	0.00383	0.01502	0.02622
0.01016	−0.00590	−0.02196	−0.00121	0.01953	0.04027	0.02826	0.01625
0.00424	0.00196	−0.00031	−0.00258	−0.00486	−0.00713	−0.00941	−0.01168
−0.01396	−0.01750	−0.02104	−0.02458	−0.02813	−0.03167	−0.03521	−0.04205
−0.04889	−0.03559	−0.02229	−0.00899	0.00431	0.01762	0.00714	−0.00334
−0.01383	0.01314	0.04011	0.06708	0.04820	0.02932	0.01043	−0.00845
−0.02733	−0.04621	−0.03155	−0.01688	−0.00222	0.01244	0.02683	0.04121
0.05559	0.03253	0.00946	−0.01360	−0.01432	−0.01504	−0.01576	−0.04209
−0.02685	−0.01161	0.00363	0.01887	0.03411	0.03115	0.02819	0.02917
0.03015	0.03113	0.00388	−0.02337	−0.05062	−0.03820	−0.02579	−0.01337
−0.00095	0.01146	0.02388	0.03629	0.01047	−0.01535	−0.04117	−0.06699
−0.05207	−0.03715	−0.02222	−0.00730	0.00762	0.02254	0.03747	0.04001
0.04256	0.04507	0.04759	0.05010	0.04545	0.04080	0.02876	0.01671
0.00467	−0.00738	−0.00116	0.00506	0.01128	0.01750	−0.00211	−0.02173
−0.04135	−0.06096	−0.08058	−0.06995	−0.05931	−0.04868	−0.03805	−0.02557
−0.01310	−0.00063	0.01185	0.02432	0.03680	0.04927	0.02974	0.01021
−0.00932	−0.02884	−0.04837	−0.06790	−0.04862	−0.02934	−0.01006	0.00922
0.02851	0.04779	0.02456	0.00133	−0.02190	−0.04513	−0.06836	−0.04978
−0.03120	−0.01262	0.00596	0.02453	0.04311	0.06169	0.08027	0.09885
0.06452	0.03019	−0.00414	−0.03848	−0.07281	−0.05999	−0.04717	−0.03435
−0.03231	−0.03028	−0.02824	−0.00396	0.02032	0.00313	−0.01406	−0.03124
−0.04843	−0.06562	−0.05132	−0.03702	−0.02272	−0.00843	0.00587	0.02017
0.02698	0.03379	0.04061	0.04742	0.05423	0.03535	0.01647	0.01622
0.01598	0.01574	0.00747	−0.00080	−0.00907	0.00072	0.01051	0.02030
0.03009	0.03989	0.03478	0.02967	0.02457	0.03075	0.03694	0.04313
0.04931	0.05550	0.06168	−0.00526	−0.07220	−0.06336	−0.05451	−0.04566
−0.03681	−0.03678	−0.03675	−0.03672	−0.01765	0.00143	0.02051	0.03958
0.05866	0.03556	0.01245	−0.01066	−0.03376	−0.05687	−0.04502	−0.03317
−0.02131	−0.00946	0.00239	−0.00208	−0.00654	−0.01101	−0.01548	−0.01200
−0.00851	−0.00503	−0.00154	0.00195	0.00051	−0.00092	0.01135	0.02363
0.03590	0.04818	0.06045	0.07273	0.02847	−0.01579	−0.06004	−0.05069
−0.04134	−0.03199	−0.03135	−0.03071	−0.03007	−0.01863	−0.00719	0.00425
0.01570	0.02714	0.03858	0.02975	0.02092	0.02334	0.02576	0.02819
0.03061	0.03304	0.01371	−0.00561	−0.02494	−0.02208	−0.01923	−0.01638
−0.01353	−0.01261	−0.01170	−0.00169	0.00833	0.01834	0.02835	0.03836
0.04838	0.03749	0.02660	0.01571	0.00482	−0.00607	−0.01696	−0.00780
0.00136	0.01052	0.01968	0.02884	−0.00504	−0.03893	−0.02342	−0.00791
0.00759	0.02310	0.00707	−0.00895	−0.02498	−0.04100	−0.05703	−0.02920

TABLA A6.1 DATOS DE LA ACELERACIÓN DEL SUELO (*Continuación*)

−0.00137	0.02645	0.05428	0.03587	0.01746	−0.00096	−0.01937	−0.03778
−0.02281	−0.00784	0.00713	0.02210	0.03707	0.05204	0.06701	0.08198
0.03085	−0.02027	−0.07140	−0.12253	−0.08644	−0.05035	−0.01426	0.02183
0.05792	0.09400	0.13009	0.03611	−0.05787	−0.04802	−0.03817	−0.02832
0.02970	0.03993	0.05017	0.06041	0.07065	0.08089	−0.00192	−0.08473
−0.01846	−0.00861	−0.03652	−0.06444	−0.06169	−0.05894	−0.05618	−0.06073
−0.06528	−0.04628	−0.02728	−0.00829	0.01071	0.02970	0.03138	0.03306
0.03474	0.03642	0.04574	0.05506	0.06439	0.07371	0.08303	0.03605
−0.01092	−0.05790	−0.04696	−0.03602	−0.02508	−0.01414	−0.03561	−0.05708
−0.07855	−0.06304	−0.04753	−0.03203	−0.01652	−0.00102	0.00922	0.01946
−0.07032	−0.05590	−0.04148	−0.05296	−0.06443	−0.07590	−0.08738	−0.09885
−0.06798	−0.03710	−0.00623	0.02465	0.05553	0.08640	0.11728	0.14815
0.08715	0.02615	−0.03485	−0.09584	−0.07100	−0.04616	−0.02132	0.00353
0.02837	0.05321	−0.00469	−0.06258	−0.12048	−0.09960	−0.07872	−0.05784
−0.03696	−0.01608	0.00480	0.02568	0.04656	0.06744	0.08832	0.10920
0.13008	0.10995	0.08982	0.06969	0.04955	0.04006	0.03056	0.02107
0.01158	0.00780	0.00402	0.00024	−0.00354	−0.00732	−0.01110	−0.00780
−0.00450	−0.00120	0.00210	0.00540	−0.00831	−0.02203	−0.03575	−0.04947
−0.06319	−0.05046	−0.03773	−0.02500	−0.01227	0.00046	0.00482	0.00919
0.01355	0.01791	0.02228	0.00883	−0.00462	−0.01807	−0.03152	−0.02276
−0.01401	−0.00526	0.00350	0.01225	0.02101	0.01437	0.00773	0.00110
0.00823	0.01537	0.02251	0.01713	0.01175	0.00637	0.01376	0.02114
0.02852	0.03591	0.04329	0.03458	0.02587	0.01715	0.00844	−0.00027
−0.00898	−0.00126	0.00645	0.01417	0.02039	0.02661	0.03283	0.03905
0.04527	0.03639	0.02750	0.01862	0.00974	0.00086	−0.01333	−0.02752
−0.04171	−0.02812	−0.01453	−0.00094	0.01264	0.02623	0.01690	0.00756
−0.00177	−0.01111	−0.02044	−0.02977	−0.03911	−0.02442	−0.00973	0.00496
0.01965	0.03434	0.02054	0.00674	−0.00706	−0.02086	−0.03466	−0.02663
−0.01860	−0.01057	−0.00254	−0.00063	0.00128	0.00319	0.00510	0.00999
0.01488	0.00791	0.00093	−0.00605	0.00342	0.01288	0.02235	0.03181
0.04128	0.02707	0.01287	−0.00134	−0.01554	−0.02975	−0.04395	−0.03612
−0.02828	−0.02044	−0.01260	−0.00476	0.00307	0.01091	0.00984	0.00876
0.00768	0.00661	0.01234	0.01807	0.02380	0.02953	0.03526	0.02784
0.02042	0.01300	−0.03415	−0.00628	−0.00621	−0.00615	−0.00609	−0.00602
−0.00596	−0.00590	−0.00583	−0.00577	−0.00571	−0.00564	−0.00558	−0.00552
−0.00545	−0.00539	−0.00532	−0.00526	−0.00520	−0.00513	−0.00507	−0.00501
−0.00494	−0.00488	−0.00482	−0.00475	−0.00469	−0.00463	−0.00456	−0.00450
−0.00444	−0.00437	−0.00431	−0.00425	−0.00418	−0.00412	−0.00406	−0.00399
−0.00393	−0.00387	−0.00380	−0.00374	−0.00368	−0.00361	−0.00355	−0.00349
−0.00342	−0.00336	−0.00330	−0.00323	−0.00317	−0.00311	−0.00304	−0.00298
−0.00292	−0.00285	−0.00279	−0.00273	−0.00266	−0.00260	−0.00254	−0.00247
−0.00241	−0.00235	−0.00228	−0.00222	−0.00216	−0.00209	−0.00203	−0.00197
−0.00190	−0.00184	−0.00178	−0.00171	−0.00165	−0.00158	−0.00152	−0.00146
−0.00139	−0.00133	−0.00127	−0.00120	−0.00114	−0.00108	−0.00101	−0.00095
−0.00089	−0.00082	−0.00076	−0.00070	−0.00063	−0.00057	−0.00051	−0.00044
−0.00038	−0.00032	−0.00025	−0.00019	−0.00013	−0.00006	0.00000	

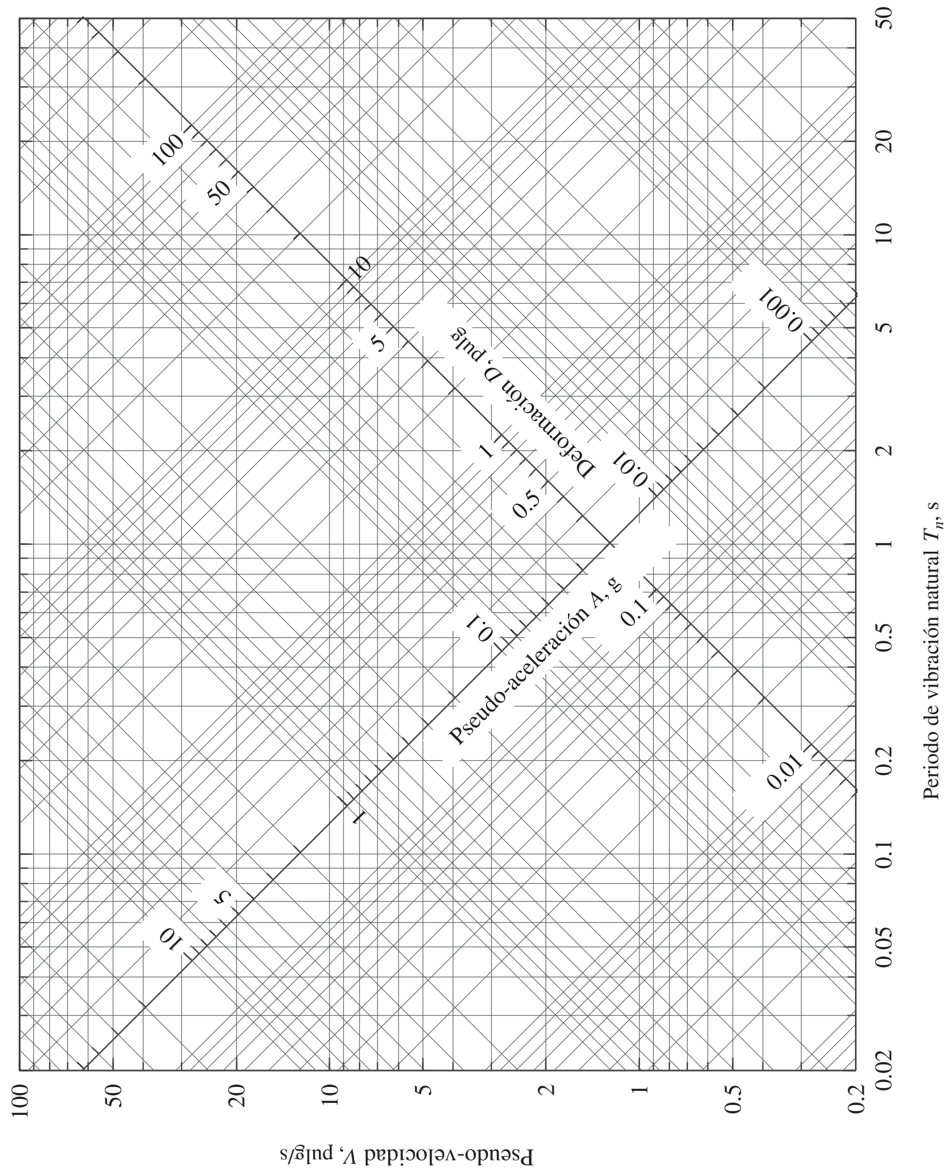


Figura A6.1 Papel gráfico con cuatro escalas logarítmicas.

PROBLEMAS

***6.1** Determine la respuesta de deformación $u(t)$, para $0 \leq t \leq 15$ s, de un sistema de 1GDL con periodo natural $T_n = 2$ s y fracción de amortiguamiento $\zeta = 0$ al movimiento de El Centro en 1940. Los valores de la aceleración del terreno están disponibles en el apéndice 6 para todo $\Delta t = 0.02$ s. Implemente el algoritmo numérico del tiempo escalonado de la sección 5.2. Grafique $u(t)$ y compare la gráfica con la figura 6.4.1.

***6.2** Resuelva el problema 6.1 para $\zeta = 5\%$.

***6.3** Resuelva el problema 6.2 mediante el método de la diferencia central.

6.4 Deduzca ecuaciones para los espectros de respuesta de deformación, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración para una aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t) = \dot{u}_{go}\delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac y $\dot{u}_{go}$ es el incremento en la velocidad o la magnitud del impulso de aceleración. Grafique los espectros para $\zeta = 0$ y 10%.

6.5 Un sistema no amortiguado de 1GDL se somete al movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$ que consiste en una secuencia de dos impulsos de aceleración, cada uno con un incremento de velocidad $\dot{u}_{go}$, como se muestra en la figura P6.5.

(a) Grafique la respuesta de desplazamiento del sistema $t_d/T_n = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ y 1. Para cada caso, muestre la respuesta a los impulsos individuales y la respuesta combinada.

(b) Determine el espectro de respuesta de deformación para esta excitación graficando $u_o/(\dot{u}_{go}/\omega_n)$ como una función del t_d/T_n. Indique por separado el máximo que ocurre durante $t \leq t_d$ y durante $t \geq t_d$.

(c) Determine el espectro de respuesta de pseudo-velocidad para esta excitación con $t_d = 0.5$ s graficando $V/\dot{u}_{go}$ como una función de $f_n = 1/T_n$.

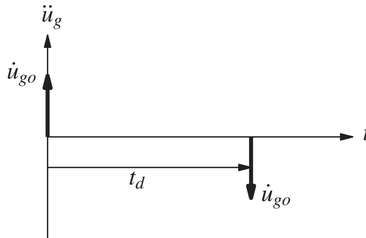


Figura P6.5

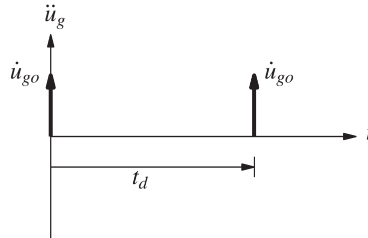


Figura P6.6

6.6 Repita el problema 6.5 considerando que los dos pulsos de velocidad actúan en la misma dirección (figura P6.6).

6.7 Considere un movimiento del terreno armónico $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{go}$ sen$(2\pi t/T)$.

(a) Deduzca las ecuaciones para A y $\ddot{u}_o^t$ en términos del periodo de vibración natural T_n y la fracción de amortiguamiento ζ del sistema de 1GDL. A es el valor máximo de la pseudo-aceleración y $\ddot{u}_o^t$ es el valor máximo de la aceleración verdadera. Considere sólo la respuesta de estado estacionario.

(b) Demuestre que A y $\ddot{u}_o^t$ son idénticas para los sistemas no amortiguados, pero diferentes para los sistemas amortiguados.

(c) Muestre mediante gráficas los dos espectros de respuesta representando los valores normalizados $A/\ddot{u}_{go}$ y $\ddot{u}_o^t/\ddot{u}_{go}$ contra T_n/T, la relación del periodo de vibración natural del sistema y el periodo de la excitación.

*Indica que la solución del problema requiere una computadora.

6.8 Ciertos tipos de movimientos cercanos a la falla pueden representarse mediante un ciclo sinusoidal completo de aceleración del terreno (figura P6.8) o un ciclo cosenoidal completo de aceleración del terreno (figura P6.9). Si se supone que la velocidad y el desplazamiento del terreno son iguales a cero en el tiempo cero, grafique la velocidad y el desplazamiento del terreno como una función del tiempo. Determine el espectro de respuesta de pseudo-aceleración para sistemas no amortiguados. Grafique este espectro contra t_d/T_n. ¿En qué difiere el espectro de respuesta de la aceleración verdadera?

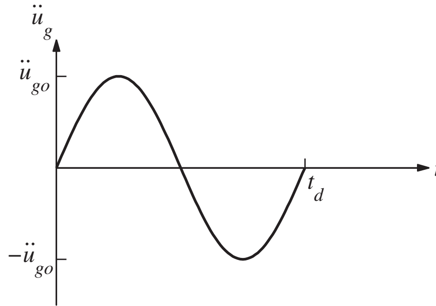


Figura P6.8

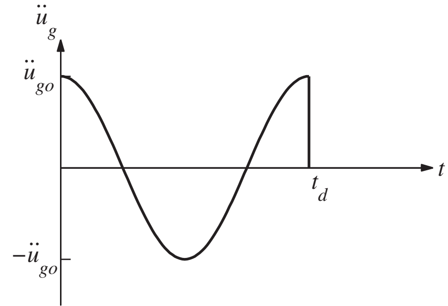


Figura P6.9

6.10 Un voladizo vertical de 10 pies de largo, hecho de un tubo de acero con 6 pulg de diámetro nominal estándar, soporta un peso de 3000 libras en su extremo, como se muestra en la figura P6.10. Las propiedades de la tubería son: diámetro exterior = 6.625 pulg, diámetro interior = 6.065 pulg, espesor = 0.280 pulg, momento de inercia de la sección transversal $I = 28.1$ pulg^4, módulo de Young $E = 29{,}000$ ksi y peso = 18.97 lb/pie de longitud. Determine la deformación y el esfuerzo flexionante máximos en el voladizo, debidos al sismo de El Centro; suponga que $\zeta = 5\%$.

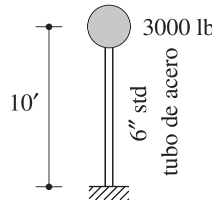


Figura P6.10

6.11 **(a)** Un tanque lleno de agua se sostiene sobre una torre en voladizo de 80 pies de alto. Se idealiza como un sistema de 1GDL con peso $w = 100$ kips, rigidez lateral $k = 4$ kips/pulg y fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$. La torre que soporta al tanque debe diseñarse para el movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.5g. Determine los valores de diseño de la deformación lateral y la fuerza cortante en la base.

(b) El diseñador estructural consideró que la deformación calculada para el sistema del inciso (a) era excesiva, por lo que decidió darle rigidez a la torre aumentando su tamaño. Determine los valores de diseño de la deformación y la fuerza cortante basal para el sistema modificado si su rigidez lateral es de 8 kips/pulg; suponga que la fracción de amortiguamiento sigue siendo de 5%. Comente sobre la forma en que el aumento de la rigidez del sistema afecta los requisitos de diseño. ¿Cuál es el inconveniente de darle más rigidez al sistema?

(c) Si la torre con más rigidez debe sostener un tanque que pesa 200 kips, determine los requisitos de diseño; suponga, para los propósitos de este ejemplo, que la fracción de amortiguamiento sigue siendo de 5%. Comente sobre la forma en que el aumento de peso afecta los requisitos de diseño.

6.12 Resuelva el problema 6.11 modificado como sigue: w = 16 kips en el inciso (a) y w = 32 kips en el inciso (c).

6.13 Resuelva el problema 6.11 modificado como sigue: w = 1600 kips en el inciso (a) y w = 3200 kips en el inciso (c).

6.14 Un edificio de un nivel, hecho con concreto reforzado, se idealiza para el análisis estructural como un marco sin masa que soporta una carga muerta de 10 kips al nivel de la viga. El marco tiene 24 pies de ancho y 12 pies de altura. Cada columna, fija en la base, tiene una sección transversal de 10 pulg cuadradas. El módulo de Young del concreto es de 3×10^3 ksi y la fracción de amortiguamiento del edificio se calcula como del 5%. Si el edificio debe diseñarse para el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a un valor máximo de la aceleración de 0.5g, determine los valores de diseño de la deformación lateral y los momentos flexionantes en las columnas correspondientes a dos condiciones:

(a) La sección transversal de la viga es mucho más grande que la de las columnas, de modo que la viga puede considerarse rígida a la flexión.

(b) La sección transversal de la viga es mucho más pequeña que la de las columnas, por lo que puede despreciarse la rigidez de la viga. Comente sobre la influencia que tiene la rigidez de la viga en las cantidades de diseño.

6.15 Las columnas del marco del problema 6.14 en la condición (a) (es decir, con la viga rígida) se articulan en la base. Para el mismo diseño sísmico, determine los valores de diseño de la deformación lateral y los momentos flexionantes sobre las columnas. Comente sobre la influencia que tiene el tipo de apoyo de las columnas en la deformación y los momentos flexionantes de diseño.

6.16 Determine la respuesta máxima del edificio industrial de un nivel del ejemplo 1.2 al movimiento de suelo caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.25g.

(a) En el caso de la excitación norte-sur, determine el desplazamiento lateral del techo y los momentos flexionantes en las columnas.

(b) En el caso de la excitación este-oeste, determine el desplazamiento lateral del techo y la fuerza axial en cada soporte.

6.17 El pequeño edificio de un nivel, hecho de concreto reforzado, que se muestra en la figura P6.17, se idealiza como un marco sin masa que soporta una carga muerta total de 10 kips al nivel de la viga. Cada columna de 10 pulg cuadradas se articula en la base, la viga puede asumirse como rígida a la flexión, y $E = 3 \times 10^3$ ksi. Determine la respuesta máxima de esta estructura al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.25g. Las cantidades de respuesta que interesan son el desplazamiento en la parte superior del marco y los momentos flexionantes en las dos columnas. Dibuje el diagrama del momento flexionante.

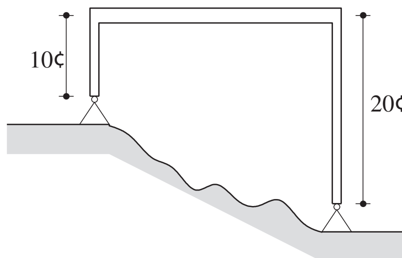


Figura P6.17

6.18 Un marco de acero de un solo nivel, con claro de 24 pies y altura de 12 pies, tiene las siguientes propiedades: los momentos de inercia de la sección transversal de la viga y las columnas son $I_b = 160$ pulg^4 e $I_c = 320$ pulg^4, respectivamente; el módulo de elasticidad para el acero es de 30 $\times$ 10^3 ksi. Para los propósitos del análisis dinámico, se considera que el marco no tiene masa y que soporta un peso de 100 kips concentrados al nivel de la viga; las columnas están empotradas en la base y la fracción de amortiguamiento se estima en 5%. Determine los valores máximos del desplazamiento lateral al nivel de la viga y los momentos flexionantes a lo largo del marco, debido al espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima de 0.5g.

6.19 Resuelva el problema 6.18 suponiendo que las columnas se articulan en la base. Comente sobre la influencia que tiene el tipo de apoyo en las columnas en la deformación y los momentos flexionantes de diseño.

6.20 La tolva de cenizas de la figura 6.20 consiste en un receptáculo montado en una plataforma rígida, la cual está soportada por cuatro columnas de 24 pies de largo. El peso de la plataforma, la tolva y su contenido es de 100 kips y puede tomarse como una masa concentrada situada a 6 pies por encima de la parte inferior de la plataforma. Las columnas se apoyan en la dirección longitudinal, es decir, normal al plano de la hoja de papel, pero no tienen un soporte lateral en la dirección transversal. Las propiedades de las columnas son: $A = 20$ pulg^2, $E = 29{,}500$ ksi, $I = 2000$ pulg^4 y $S = 170$ pulg^3. Si se considera que la fracción de amortiguamiento es de 5%, encuentre el desplazamiento lateral y el esfuerzo máximos en las columnas debido a la gravedad y al sismo caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a $\frac{1}{3}$g y actuando en la dirección transversal. Considere que las columnas se empotran en la base y a la plataforma rígida. Desprecie la deformación axial de las columnas y los efectos de la gravedad sobre la rigidez lateral.

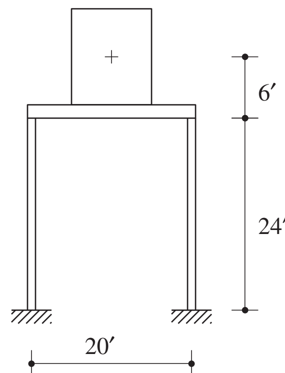


Figura P6.20

6.21 La estructura del ejemplo 1.7 se somete a la aceleración rotacional $\ddot{u}_{g\theta} = \delta(t)$ del cimiento. Deduzca una ecuación para la rotación $u_\theta(t)$ de la losa del techo en términos de I_O, k_x, k_y, b y d. No tome en cuenta el amortiguamiento.

6.22 Para el sistema descrito en los ejemplos 1.7 y 2.4, se requiere determinar la respuesta máxima debida a la aceleración rotacional del terreno $\ddot{u}_{g\theta}$ (vea la figura E1.7) con $\zeta = 5\%$. El espectro de diseño para la aceleración traslacional del suelo $(b/2)\ddot{u}_{g\theta}$ está dado por la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.05g. Determine el desplazamiento en cada esquina de la losa del techo, el par de torsión en la base y los momentos flexionantes sobre los ejes x y y en la base de cada columna.

6.23 Para el diseño sísmico en un sitio, los valores máximos de aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno se han estimado como: $\ddot{u}_{go} = 0.5$g, $\dot{u}_{go}$ pulg/s y $u_{go} = 18$ pulg. Considerando sistemas con una fracción de amortiguamiento del 2%, construya los espectros de diseño de los percentiles 50 y 84.1.

(a) Grafique ambos espectros, juntos, en un papel logarítmico de cuatro escalas.
(b) Grafique el espectro de pseudo-aceleración del percentil 84.1 en escala log-log y determine las ecuaciones de $A(T_n)$ para cada rama del espectro y los valores de periodo en las intersecciones de las ramas.
(c) Grafique el espectro del inciso (b) en una escala lineal-lineal (la escala T_n debe cubrir el intervalo de 0 a 5 s).

7

Respuesta sísmica de los sistemas inelásticos

AVANCE

Se ha demostrado hasta ahora que el cortante basal máximo inducido en un sistema elástico lineal por el movimiento del suelo es $V_b = (A/g)w$, donde w es el peso del sistema y A es la ordenada del espectro de pseudo-aceleración correspondiente al periodo natural de vibración y al amortiguamiento del sistema (capítulo 6). Sin embargo, la mayoría de los edificios están diseñados para un cortante basal menor que el cortante basal elástico asociado con el movimiento del terreno más fuerte que puede ocurrir en el sitio. Lo anterior queda claro en la figura 7.1, donde el coeficiente de cortante basal $A/$g, tomado del

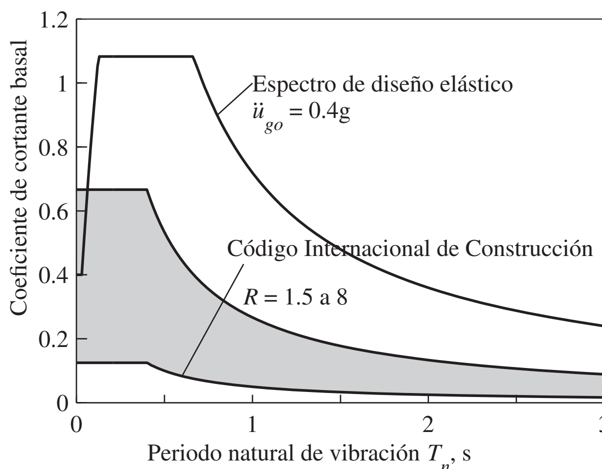


Figura 7.1 Comparación de los coeficientes de cortante basal del espectro de diseño elástico y del *Código Internacional de Construcción*.

espectro de diseño de la figura 6.9.5 y escalado con un factor de 0.4 para que corresponda a una aceleración máxima del terreno de 0.4g, se compara con el coeficiente de cortante basal especificado en el *Código Internacional de Construcción* 2000. Esta disparidad implica que los edificios diseñados para las fuerzas del código se deforman más allá del límite del comportamiento elástico lineal cuando se someten a movimientos del terreno representados en el espectro de diseño en 0.4g. Por lo tanto, no debe sorprender que los edificios sufran daños durante movimientos del terreno intensos. Sin embargo, si un sismo causa daños que son demasiado graves económicamente como para repararlos (figuras 7.2 y 7.3) o provoca el derrumbe de un edificio (figura 7.4), es evidente que el diseño era erróneo. El reto para el ingeniero es diseñar estructuras de modo que el daño se controle a un grado aceptable.

Por lo tanto, la respuesta de las estructuras que se deforman en su intervalo inelástico durante movimientos intensos del terreno es de vital importancia en la ingeniería sísmica, y en este capítulo se aborda dicho tema. Después de hablar sobre el sistema elastoplástico y los parámetros que describen al sistema, se presenta la ecuación de movimiento y se identifican los diversos parámetros que describen el sistema y la excitación. Más adelante, se comparan las respuestas a los sismos de los sistemas elásticos e inelásticos con el objeto de comprender la forma en que la cedencia influye en la respuesta estructural. Después, se presenta un procedimiento para determinar el espectro de respuesta para la fuerza de cedencia asociado con los valores especificados del factor de ductilidad, junto con un análisis de la forma en que el espectro puede utilizarse para determinar la fuerza y la deformación de diseño para los sistemas inelásticos. El capítulo termina con un procedimiento mediante el cual se determina el espectro de diseño para los sistemas inelásticos a partir del espectro de diseño elástico, seguido por un análisis sobre la importancia de distinguir entre los espectros de diseño y de respuesta.

7.1 RELACIONES FUERZA-DEFORMACIÓN

7.1.1 Pruebas de laboratorio

Desde la década de 1960 se han realizado cientos de pruebas de laboratorio para determinar el comportamiento fuerza-deformación de los componentes estructurales bajo condiciones sísmicas. Durante un sismo, las estructuras se someten a un movimiento oscilatorio con deformación cíclica. Se han llevado a cabo pruebas cíclicas que simulan esta condición sobre elementos estructurales, ensambles de elementos, modelos de estructuras a escala reducida y pequeñas estructuras a escala real. Los resultados experimentales indican que el comportamiento fuerza-deformación cíclico para una estructura depende del material (figura 7.1.1) y del sistema estructural. Las gráficas de fuerza-deformación muestran los ciclos de histéresis bajo deformaciones cíclicas debidas a un comportamiento inelástico.

Desde la década de 1960 muchos estudios de simulación por computadora se han enfocado en la respuesta sísmica de los sistemas de 1GDL, para los que su comportamiento fuerza-deformación está definido por una versión idealizada de las curvas experimentales, como se muestra en la figura 7.1.1. En este capítulo se utilizará el comportamiento idealizado de fuerza-deformación más sencillo.



(a)



(b)

Figura 7.2 El edificio de Servicios del Condado Imperial, que constaba de seis niveles, se vio afectado por el sismo del Valle Imperial, California, el 15 de octubre de 1979. El edificio se encontraba en El Centro, California, a 9 km de la falla causante del sismo con magnitud de 6.5; la aceleración máxima del terreno cerca del edificio fue de 0.23g. Las columnas del primer nivel, hechas de concreto reforzado, sufrieron deformaciones excesivas en las partes superior e inferior generando articulaciones parciales. Las cuatro columnas en el extremo derecho se derrumbaron, por lo que dicho extremo del edificio descendió cerca de 6 pulg; vea los detalles. El edificio fue demolido. (Cortesía de K. V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center de la Universidad de California en Berkeley).



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.3 La Torre O'Higgin's, construida en 2009, es un edificio de 21 pisos, está hecho de concreto reforzado y cuenta con un sistema resistente ante cargas laterales asimétrico (en planta) constituido por muros de cortante y columnas resistentes que es discontinuo y muy irregular en la altura. Situado en Concepción, a 65 millas del punto de ruptura inicial de la falla que ocasionó el sismo de magnitud 8.8 en la región costera de Maule, Chile, el 27 de febrero de 2010, el edificio experimentó un movimiento muy fuerte. El daño fue tan extenso, incluyendo el colapso del doceavo piso, que el edificio deberá demolerse: (a) cara este; (b) cara sureste; (c) cara sur; y (d) cara sureste: los tres pisos superiores y la sala de máquinas. (Cortesía de Francisco Medina).

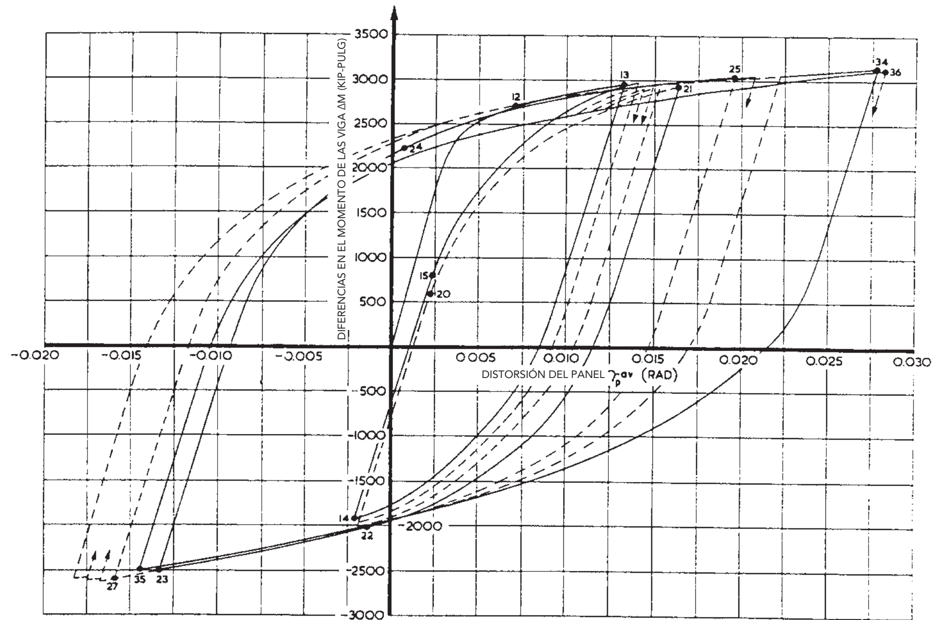


(a)

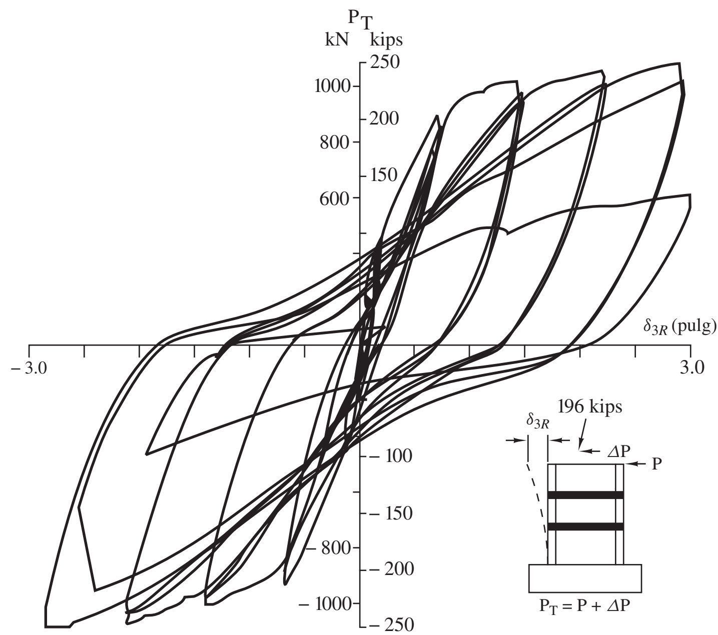


(b)

Figura 7.4 Centro de cuidados psiquiátricos diurnos: (a) antes y (b) después del sismo de magnitud 6.4 en San Fernando, California, el 9 de febrero de 1971. El sistema estructural de este edificio de dos niveles, hecho de concreto reforzado, era un marco resistente al momento. Sin embargo, los muros de mampostería añadidos en el segundo piso incrementaron de manera significativa la rigidez y la resistencia de ese nivel. El primer piso del edificio se derrumbó por completo. (Fotografía de V. V. Bertero en la colección W. G. Godden, del Servicio Nacional de Información de Ingeniería Sísmica de la Universidad de California, Berkeley).



(a)



(b)

Figura 7.1.1 (*continúa en la página siguiente*)

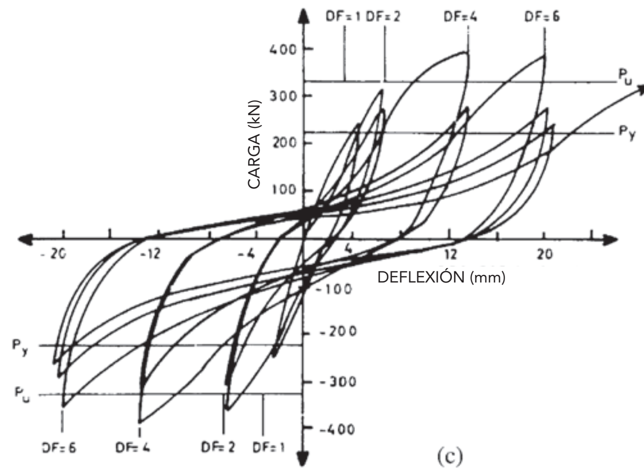


Figura 7.1.1 Relaciones de fuerza-deformación para componentes estructurales de distintos materiales: (a) acero estructural (de H. Krawinkler, V. V. Bertero y E. P. Popov, “Inelastic Behavior of Steel Beam to Column Subassemblages”, *reporte No. EERC 71-7*, Universidad de California, Berkeley, 1971); (b) concreto reforzado [de E. P. Popov y V. V. Bertero, “On Seismic Behavior of Two R/C Structural Systems for Tall Buildings”, en *Structural and Geotechnical Mechanics* (ed. W. J. Hall), Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977]; (c) mampostería [de M. J. N. Priestley, “Masonry”, en *Design of Earthquake Resistant Structures* (ed. E. Rosenblueth), Pentech Press, Plymouth, R. U., 1980].

7.1.2 Idealización elastoplástica

Considere la relación fuerza-deformación de una estructura durante la aplicación inicial de carga que se muestra en la figura 7.1.2. Resulta conveniente idealizar esta curva mediante una relación fuerza-deformación *elásticoplástica perfecta* (o *elastoplástica* por razones de brevedad) porque esta aproximación permite, como se verá más adelante, el desarrollo de los espectros de respuesta de una manera similar a los sistemas elástico lineales.

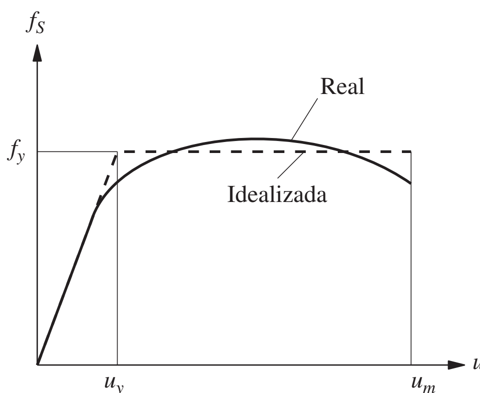


Figura 7.1.2 Curva de fuerza-deformación durante la aplicación inicial de carga: real e idealización elastoplástica.

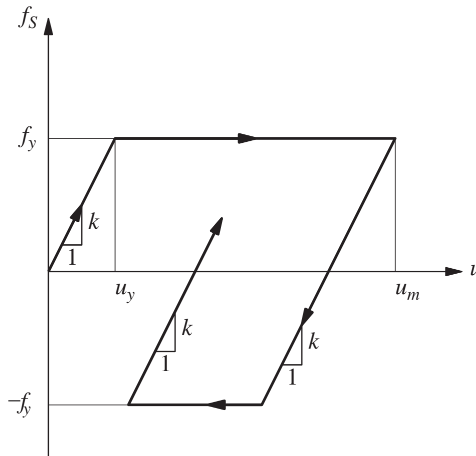


Figura 7.1.3 Relación elastoplástica de fuerza-deformación.

La aproximación elastoplástica a la curva de fuerza-deformación real es trazada, como se muestra en la figura 7.1.2, de modo que las áreas bajo las dos curvas sean iguales en un valor seleccionado para el desplazamiento máximo u_m. En la aplicación inicial de carga este sistema idealizado es elástico-lineal con rigidez k, siempre y cuando la fuerza sea menor que f_y. La cedencia comienza cuando la fuerza alcanza el valor de f_y, la *resistencia a la cedencia*. La deformación a la que empieza la cedencia es u_y, la *deformación de cedencia*. La cedencia ocurre a una fuerza constante f_y (es decir, la rigidez es cero).

En la figura 7.1.3 se muestra un ciclo típico de carga, descarga y recarga de un sistema elastoplástico. La resistencia a la cedencia es la misma en las dos direcciones de deformación. La descarga desde un punto de deformación máxima tiene lugar a lo largo de una trayectoria paralela a la rama elástica inicial. Del mismo modo, la recarga desde un punto de deformación mínima tiene lugar a lo largo de una trayectoria paralela a la rama elástica inicial. La relación cíclica de fuerza-deformación es dependiente de la trayectoria; para la deformación u en el tiempo t la fuerza de restauradora f_S depende de la historia previa del movimiento del sistema y de si la deformación está aumentando o disminuyendo. Por lo tanto, la fuerza de restauradora es una función implícita de deformación: $f_s = f_s(u)$.

7.1.3 Sistema lineal correspondiente

Se desea evaluar la deformación máxima de un sistema elastoplástico debida a un movimiento sísmico y comparar esta deformación con la deformación máxima producida por la misma excitación en el *sistema lineal correspondiente*. Se define que este sistema elástico tiene la misma rigidez que el sistema elastoplástico durante su aplicación inicial de carga; vea la figura 7.1.4. Ambos sistemas tienen la misma masa y el mismo amortiguamiento. Por lo tanto, el periodo natural de vibración del sistema lineal correspondiente es igual al periodo del sistema elastoplástico bajo oscilaciones pequeñas ($u \leq u_y$). A mayores amplitudes de movimiento, el periodo natural de vibración no está definido para los sistemas inelásticos.

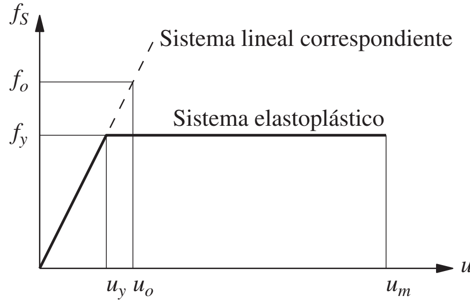


Figura 7.1.4 Sistema elastoplástico y su sistema lineal correspondiente.

7.2 RESISTENCIA A LA CEDENCIA NORMALIZADA, FACTOR DE REDUCCIÓN DE LA RESISTENCIA A LA CEDENCIA Y FACTOR DE DUCTILIDAD

La *resistencia a la cedencia normalizada* $\overline{f}_y$ de un sistema elastoplástico se define como

$$\overline{f}_y = \frac{f_y}{f_o} = \frac{u_y}{u_o} \tag{7.2.1}$$

donde f_o y u_o son los valores máximos de la fuerza restauradora y la deformación inducidas por el sismo, respectivamente, en el sistema lineal correspondiente. (Para simplificar, se utiliza la notación f_o en lugar de la f_{So} empleada en capítulos anteriores). La segunda parte de la ecuación (7.2.1) resulta obvia, porque $f_y = ku_y$ y $f_o = ku_o$. Es posible interpretar a f_o como la resistencia mínima requerida para que la estructura permanezca elástica-lineal durante el movimiento del terreno. Una resistencia a la cedencia normalizada menor que la unidad implica que la resistencia a la cedencia del sistema es menor que la resistencia mínima requerida para que el sistema permanezca elástico durante el movimiento del terreno. Tal sistema cederá y se deformará dentro del intervalo inelástico. La resistencia a la cedencia normalizada de un sistema que permanece elástico lineal es igual a la unidad, porque tal sistema puede interpretarse como un sistema elastoplástico con $f_y = f_o$. Este sistema se deformará exactamente a la deformación de cedencia durante el movimiento del suelo.

De manera alternativa, f_y puede relacionarse con f_o a través de un *factor de reducción de resistencia a la cedencia* R_y definido por

$$R_y = \frac{f_o}{f_y} = \frac{u_o}{u_y} \tag{7.2.2}$$

Obviamente, R_y es el recíproco de $\overline{f}_y$; R_y es igual a 1 para los sistemas elástico lineales y los valores de R_y mayores que 1 implican que el sistema no es lo suficientemente resistente para permanecer elástico durante el movimiento del terreno. Tal sistema cederá y se deformará dentro del intervalo inelástico.

La deformación pico, o máxima absoluta (sin tomar en cuenta el signo algebraico), del sistema elastoplástico debida a un movimiento de terreno se indica mediante u_m. Resulta significativo normalizar u_m en relación con la deformación de cedencia del sistema:

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} \tag{7.2.3}$$

Esta relación adimensional se denomina *factor de ductilidad*. Para los sistemas que se deforman en el intervalo inelástico, por definición, u_m excede a u_y y el factor de ductilidad es

mayor que la unidad. El sistema lineal correspondiente puede interpretarse como un sistema elastoplástico con $f_y = f_o$, lo que implica que el factor de ductilidad es igual a uno. A continuación, se relacionan las deformaciones máximas u_m con las u_o de los sistemas elastoplástico y lineal correspondientes. Su relación puede expresarse como

$$\frac{u_m}{u_o} = \mu \overline{f}_y = \frac{\mu}{R_y} \tag{7.2.4}$$

Esta ecuación se deduce directamente de las ecuaciones (7.2.1) a (7.2.3).

7.3 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO Y PARÁMETROS DE CONTROL

La ecuación que describe un sistema inelástico, ecuación (1.7.5), se repite aquí por conveniencia:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u) = -m\ddot{u}_g(t) \tag{7.3.1}$$

donde la fuerza restauradora $f_S(u)$ para un sistema elastoplástico se muestra en la figura 7.1.3. La ecuación (7.3.1) se resuelve numéricamente usando los procedimientos del capítulo 5 para determinar $u(t)$. Los resultados de respuesta que se presentan en este capítulo se obtuvieron por el método de la aceleración media usando un paso de tiempo $\Delta t = 0.02$ s, el cual se subdivide a su vez para detectar la transición de la rama elástica a la plástica, y viceversa, en la relación fuerza-deformación (sección 5.7).

Para una $\ddot{u}_g(t)$ dada, $u(t)$ depende de tres parámetros del sistema: ω_n, ζ y u_y, además de la forma de la relación fuerza-deformación; aquí, se ha seleccionado la forma elastoplástica. Para demostrar este hecho, la ecuación (7.3.1) se divide entre m para obtener

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u_y \tilde{f}_S(u) = -\ddot{u}_g(t) \tag{7.3.2}$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2m\,\omega_n} \qquad \tilde{f}_S(u) = \frac{f_S(u)}{f_y} \tag{7.3.3}$$

A partir de la ecuación (7.3.2) es evidente que $u(t)$ depende de ω_n, ζ y u_y. La cantidad ω_n es la frecuencia natural ($T_n = 2\pi/\omega_n$ es el periodo natural) del sistema inelástico dentro de su intervalo elástico lineal (es decir, $u \leq u_y$). También es la frecuencia natural del sistema lineal correspondiente. Asimismo, se hará referencia a ω_n y T_n como la frecuencia y el periodo de una oscilación pequeña del sistema inelástico, respectivamente. De manera similar, ζ es el coeficiente de amortiguamiento del sistema basado en el amortiguamiento crítico $2m\omega_n$ del sistema inelástico dentro de su intervalo elástico lineal. También es el coeficiente de amortiguamiento del sistema lineal correspondiente. La función $\tilde{f}_S(u)$ describe la relación fuerza-deformación en una forma parcialmente adimensional, como se muestra en la figura 7.3.1a.

Para una $\ddot{u}_g(t)$ dada, el factor de ductilidad μ depende de tres parámetros del sistema: ω_n, ζ y $\overline{f}_y$; recuerde que $\overline{f}_y$ es la resistencia a la cedencia normalizada del sistema elastoplástico. Lo anterior puede demostrarse de la siguiente manera. En primer lugar, la ecuación (7.3.2) se reescribe en términos de $\mu(t) \equiv u(t)/u_y$. Si se sustituye $u(t) = u_y\mu(t)$,

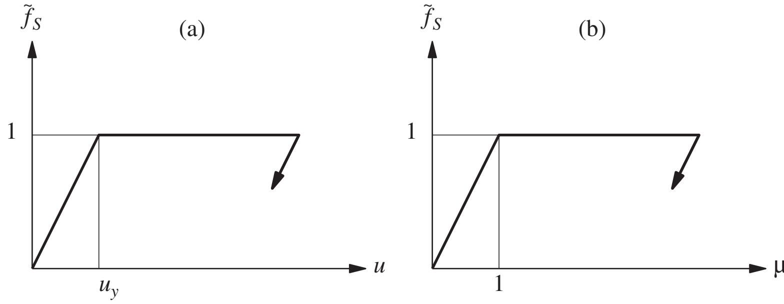


Figura 7.3.1 Relaciones de fuerza-deformación en forma normalizada.

$\dot{u}(t) = u_y \dot{\mu}(t)$, y $\ddot{u}(t) = u_y \ddot{\mu}(t)$ en la ecuación (7.3.2) y se divide entre u_y resulta

$$\ddot{\mu} + 2\zeta\omega_n\dot{\mu} + \omega_n^2 \tilde{f}_S(\mu) = -\omega_n^2 \frac{\ddot{u}_g(t)}{a_y} \tag{7.3.4}$$

donde $a_y = f_y/m$ puede interpretarse como la aceleración de la masa necesaria para producir la fuerza elástica f_y, y $\tilde{f}_S(\mu)$ es la relación de fuerza-deformación en forma adimensional (figura 7.3.1b). La relación de aceleración $\ddot{u}_g(t)/a_y$ es el coeficiente entre la aceleración del terreno y una medida de la resistencia a la cedencia de la estructura. La ecuación (7.3.4) indica que una duplicación de las aceleraciones del suelo $\ddot{u}_g(t)$ produce la misma respuesta $\mu(t)$ que la reducción a la mitad de la resistencia a la cedencia.

En segundo lugar, en la ecuación (7.3.4) se observa que para una $\ddot{u}_g(t)$ dada y una determinada forma de $\tilde{f}_S(\mu)$, por ejemplo elastoplástica, $\mu(t)$ depende de ω_n, ζ y a_y. A su vez, a_y depende de ω_n, ζ y $\bar{f}_y$; esto puede demostrarse al sustituir la ecuación (7.2.1) en la definición de $a_y = f_y/m$ para obtener $a_y = \omega_n^2 u_o \bar{f}_y$, y al observar que la deformación máxima del sistema lineal correspondiente u_o depende de ω_n y ζ. Ahora se ha demostrado que para una $\ddot{u}_g(t)$ dada, μ depende de ω_n, ζ y $\bar{f}_y$.

7.4 EFECTOS DE LA CEDENCIA

Para entender cómo se ve afectada la respuesta de los sistemas de 1GDL por una acción inelástica o la cedencia, en esta sección se compara la respuesta de un sistema elastoplástico con la de su sistema lineal correspondiente. La excitación seleccionada es el movimiento del terreno de El Centro que se muestra en la figura 6.1.4.

7.4.1 Historia de la respuesta

La figura 7.4.1 muestra la respuesta de un sistema elástico lineal con peso w, periodo natural de vibración $T_n = 0.5$ s y amortiguamiento nulo. La variación de la deformación en el tiempo muestra que el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio no deformada y la deformación máxima, $u_o = 3.34$ pulg; ésta es también la ordenada del espectro de respuesta de deformación para $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 0$ (figura 6.6.6). En la figura también se muestra la variación en el tiempo de la fuerza restauradora elástica f_S; el valor máximo de esta fuerza

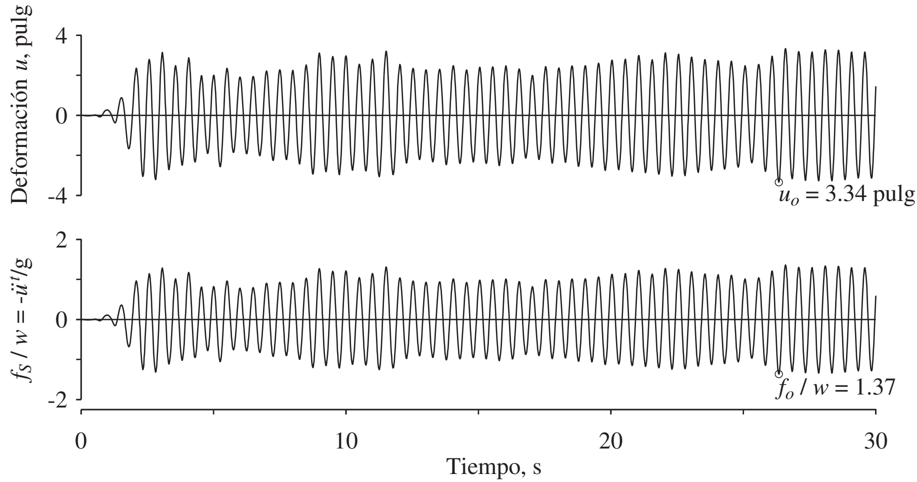


Figura 7.4.1 Respuesta de un sistema lineal con $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 0$ al movimiento del terreno de El Centro.

f_o está dado por $f_o/w = 1.37$. Ésta es la resistencia mínima requerida para que la estructura permanezca elástica. Además, observe a partir de la ecuación (7.3.1) que para los sistemas no amortiguados, $f_S(t)/w = -\ddot{u}^t(t)/g$; recuerde que $\ddot{u}^t$ es la aceleración total de la masa. Así, el valor máximo de esta aceleración es $\ddot{u}^t{}_o = 1.37$g; también es la ordenada del espectro de aceleración para $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 0$.

En la figura 7.4.2 se muestra la respuesta de un sistema elastoplástico que tiene la misma masa y rigidez inicial que el sistema elástico lineal, con resistencia normalizada $\overline{f}_y = 0.125$(o factor de reducción de la resistencia a la cedencia $R_y = 8$). La resistencia a la cedencia de este sistema es $f_y = 0.125 f_o$, donde $f_o = 1.37w$ (figura 7.4.1); por lo tanto, $f_y = 0.125(1.37w) = 0.171w$. Para mostrar más detalles, sólo se presentan los primeros 10 s de la respuesta en la figura 7.4.2, la cual está organizada en cuatro partes: (a) muestra la deformación $u(t)$, (b) presenta la fuerza restauradora $f_S(t)$ y la aceleración $\ddot{u}^t(t)$, (c) identifica los intervalos de tiempo durante los cuales el sistema cede, y (d) muestra la relación fuerza-deformación para un ciclo de movimiento. En el inicio, hasta el punto *b*, la deformación es pequeña, $f_S < f_y$, y el sistema vibra dentro de su intervalo elástico lineal. Ahora se seguirá con detalle un ciclo de vibración a partir del punto *a*, cuando tanto *u* como f_S son iguales a cero. En este punto el sistema es elástico-lineal y permanece así hasta el punto *b*. Cuando la deformación alcanza la deformación de cedencia por primera vez, identificada como *b*, comienza la cedencia. De *b* a *c* el sistema está cediendo (figura c), la fuerza es constante en f_y (figura b) y el sistema está en la rama plástica *b*-*c* de la relación de fuerza-deformación (figura d). En *c*, un máximo local de la deformación, la velocidad es cero y la deformación comienza a invertirse (figura a), el sistema empieza a descargarse elásticamente a lo largo de *c*-*d* (figura d) y no cede durante este tiempo (figura c). La descarga continúa hasta el punto *d* (figura d), cuando la fuerza restauradora llega a cero. Después, el sistema comienza a deformarse y cargarse en la dirección opuesta, lo cual continúa hasta que f_S llega a $-f_y$ en el punto *e* (figuras b y d). Ahora, la cedencia comienza en la dirección opuesta y continúa hasta el punto *f* (figura c); $f_S = -f_y$ durante este lapso de tiempo (figura b) y el sistema se

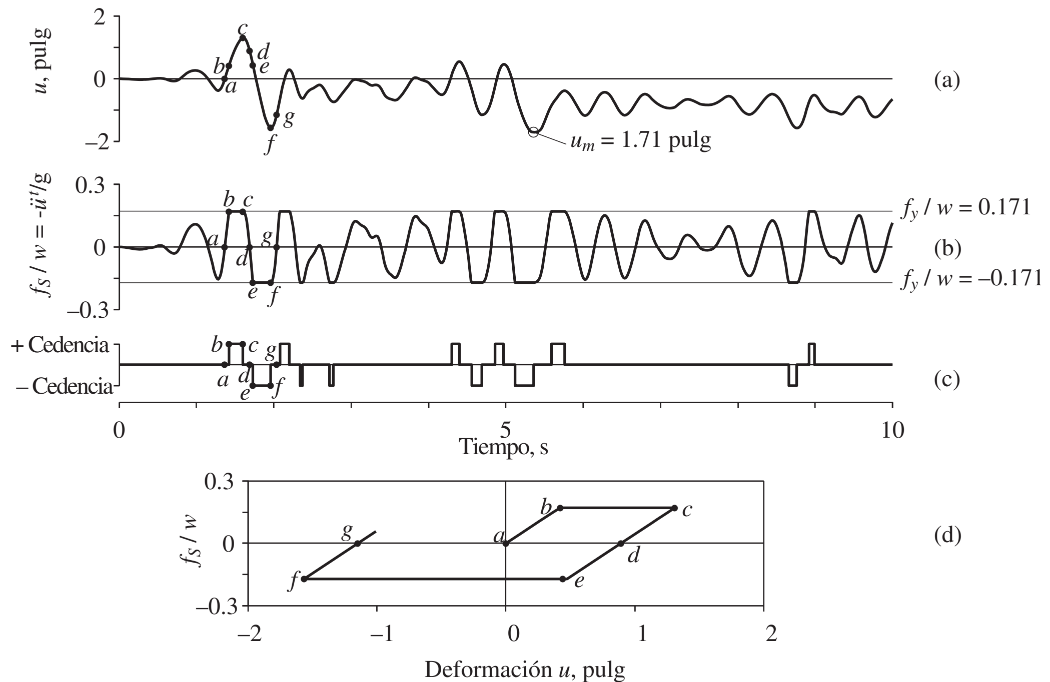


Figura 7.4.2 Respuesta de un sistema elastoplástico con $T_n = 0.5$ s, $\zeta = 0$ y $\overline{f}_y = 0.125$ al movimiento del terreno de El Centro: (a) deformación; (b) fuerza restauradora y aceleración; (c) intervalos de tiempo de cedencia; (d) relación de fuerza-deformación.

mueve a lo largo de la rama plástica *e*-*f* (figura d). En el mínimo local *f* para la deformación, la velocidad es cero y la deformación comienza a invertirse (figura a); el sistema empieza a cargarse elásticamente a lo largo de *f*-*g* (figura d) y no cede durante ese tiempo (figura c). La recarga lleva la fuerza restauradora en el sistema a cero en *g*, y continúa a lo largo de esta rama elástica hasta que la fuerza restauradora llega a $+f_y$.

La variación en el tiempo de la deformación del sistema de cedencia difiere de la del sistema elástico. A diferencia del sistema elástico (figura 7.4.1), el sistema inelástico después de ceder no oscila alrededor de su posición de equilibrio inicial. La cedencia hace que el sistema se distorsione de su posición de equilibrio inicial y oscile en torno a una nueva posición de equilibrio hasta que ésta es desplazada por otro episodio de cedencia. Por lo tanto, después de que el terreno ha dejado de moverse, el sistema se detendrá en una posición en general diferente de su posición de equilibrio inicial (es decir, la deformación, se mantiene permanente). Así, una estructura que ha experimentado una considerable cedencia durante un sismo puede no estar exactamente vertical al final del movimiento. Por ejemplo, el techo de la pérgola que se muestra en la figura 1.1.1 se desplazó 9 pulg en relación con su posición original al final del sismo de Caracas, Venezuela, el 29 de julio de 1967; este desplazamiento permanente resultó de la cedencia de las columnas tubulares. En contraste, un sistema lineal vuelve a su posición inicial de equilibrio después del decaimiento de la vibración libre cuando el terreno deja de vibrar. La deformación máxima, 1.71 pulg, del sistema elastoplástico es diferente de la deformación máxima, 3.34 pulg, del sistema lineal

correspondiente (figuras 7.4.1 y 7.4.2); además, en cada caso, estos valores máximos se alcanzan en diferentes momentos.

A continuación se examina la manera en que la respuesta de un sistema elastoplástico se ve afectada por su resistencia a la cedencia. Considere cuatro sistemas de 1GDL, todos con propiedades idénticas en su intervalo elástico lineal: $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 5\%$, pero que difieren en su resistencia a la cedencia: $\overline{f}_y = 1, 0.5, 0.25$ y 0.125. $\overline{f}_y = 1$ implica un sistema elástico lineal; es el sistema lineal correspondiente para los otros tres sistemas elastoplásticos. La disminución de los valores de $\overline{f}_y$ indica una menor resistencia a la cedencia f_y. La respuesta de deformación de estos cuatro sistemas para el movimiento de terreno de El Centro se presenta en la figura 7.4.3. El sistema elástico lineal ($\overline{f}_y = 1$) oscila alrededor de su posición de equilibrio y su deformación máxima es $u_o = 2.25$ pulg. El valor máximo correspondiente de la fuerza restauradora es $f_o = ku_o = 0.919w$, la resistencia mínima requerida para que un sistema con $T_n = 0.5$ y $\zeta = 5\%$ permanezca elástico durante el movimiento del terreno seleccionado. Por lo tanto, se espera que los otros tres sistemas con

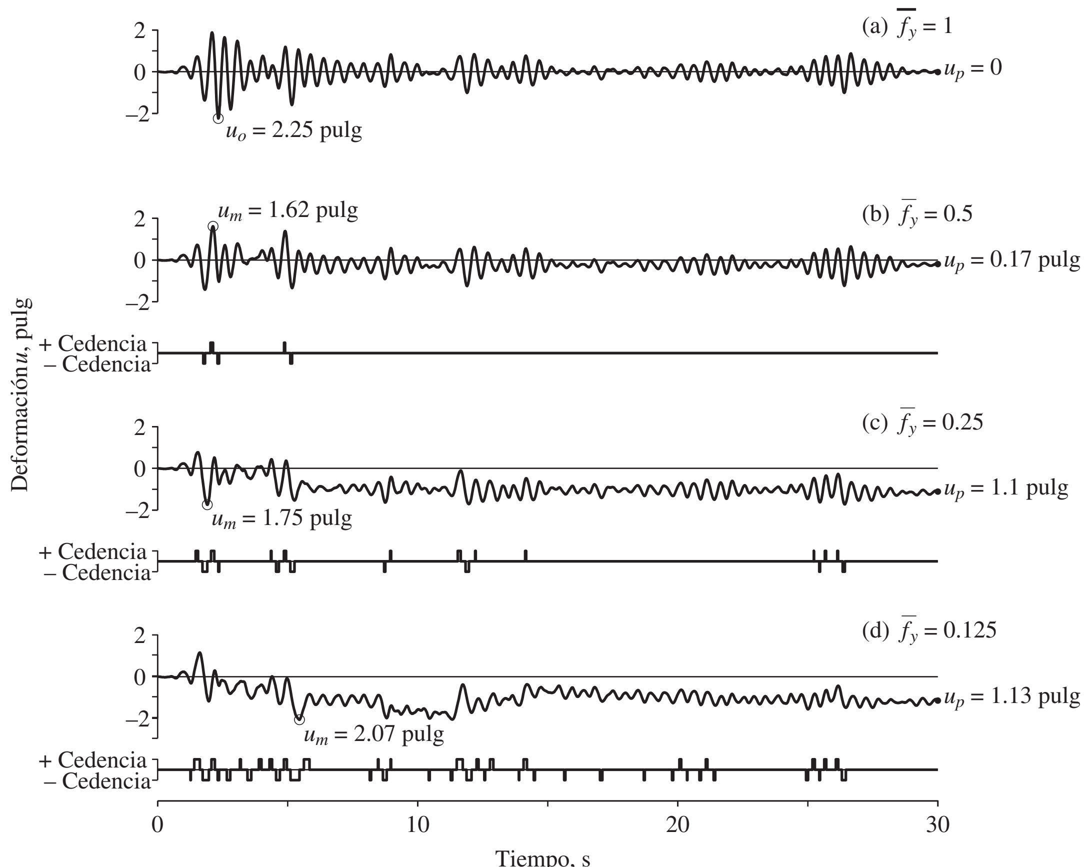


Figura 7.4.3 Respuesta de deformación y cedencia de cuatro sistemas debido al movimiento del terreno de El Centro; $T_n = 0.5$ s, $\zeta = 5\%$ y $\overline{f}_y = 1, 0.5, 0.25$ y 0.125.

menor resistencia a la cedencia ($f_y = 0.5f_o$, $0.25f_o$ y $0.125f_o$, respectivamente) se deformen en el intervalo inelástico. Esta expectativa se confirma mediante la figura 7.4.3, donde se identifican los intervalos de tiempo de cedencia para estos sistemas. Como era de esperarse por intuición, los sistemas con una resistencia a la cedencia inferior ceden con más frecuencia y durante intervalos más largos. Con más cedencia, la deformación permanente u_p de la estructura después de que el terreno deja de vibrar tiende a aumentar, pero esta tendencia no puede ser perfecta. Para los valores de T_n y ζ seleccionados, las deformaciones máximas u_m de los tres sistemas elastoplásticos son más pequeñas que la deformación máxima u_o del sistema lineal correspondiente. Sin embargo, esto no siempre se cumple, porque los valores relativos de u_m y u_o dependen del periodo natural de vibración T_n del sistema, de las características del movimiento del terreno y, en menor grado, del amortiguamiento del sistema.

El factor de ductilidad de un sistema elastoplástico puede calcularse utilizando la ecuación (7.2.4). Por ejemplo, las deformaciones máximas de un sistema elastoplástico con $\overline{f}_y = 0.25$ y del sistema lineal correspondiente son u_m = 1.75 pulg y u_o = 2.25 pulg, respectivamente. Si se sustituye u_m, u_o y $\overline{f}_y$ en la ecuación (7.2.4), se obtiene el factor de ductilidad: $\mu = (1/0.25)(1.75/2.25) = 3.11$. Ésta es la *demanda de ductilidad* impuesta sobre el sistema elastoplástico por el movimiento del terreno. Lo anterior representa un requisito en el diseño del sistema, en el sentido de que su *capacidad de ductilidad* (es decir, la capacidad de deformarse más allá del límite elástico) debe exceder a la demanda de ductilidad.

7.4.2 Demanda de ductilidad, deformaciones máximas y resistencia a la cedencia normalizada

En esta sección se examina la forma en que la demanda de ductilidad y la relación entre u_m y u_o dependen del periodo de vibración natural T_n y de la resistencia a la cedencia normalizada $\overline{f}_y$ o de su recíproco, el factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y. La figura 7.4.4a es una gráfica de u_m como una función de T_n para cuatro valores de $\overline{f}_y = 1$, 0.5, 0.25 y 0.125; u_o es igual que u_m para $\overline{f}_y = 1$. (Observe que u_o y u_m se han dividido entre el desplazamiento máximo del terreno u_{go} = 8.4 pulg, vea la figura 6.1.4). En la figura 7.4.4b se muestra la relación de u_m/u_o. La figura 7.4.5 muestra la gráfica del factor de ductilidad μ contra T_n para los mismos cuatro valores de $\overline{f}_y$; $\mu = 1$ si $\overline{f}_y = 1$. Las historias de respuesta presentadas en la figura 7.4.3 para sistemas con $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 5\%$, proporcionan el valor u_o = 2.25 pulg y u_m = 1.62, 1.75 y 2.07 pulg para $\overline{f}_y$ = 0.5, 0.25 y 0.125, respectivamente. En la figura 7.4.4a se identifican dos de estos cuatro puntos. Las demandas de ductilidad μ para los tres sistemas elastoplásticos son 1.44, 3.11 (calculado en la sección 7.4.1) y 7.36, respectivamente. Estos tres puntos se identifican en la figura 7.4.5. En estas gráficas también se identifican los valores de periodo T_a, T_b, T_c, T_d, T_e y T_f que definen las distintas regiones espectrales presentadas en la sección 6.8.

Ahora se estudiarán las tendencias de cada región espectral con base en los datos de las figuras 7.4.4 y 7.4.5. Para los sistemas de periodo muy largo ($T_n > T_f$) en la región del espectro sensible al desplazamiento, la deformación u_m de un sistema elastoplástico es independiente de $\overline{f}_y$ y es, en esencia, igual a la deformación máxima u_o del sistema lineal correspondiente; la relación de $u_m/u_o \simeq 1$. Esta observación puede explicarse de la siguiente manera: para una masa fija, tal sistema es muy flexible y, como se mencionó en la sección

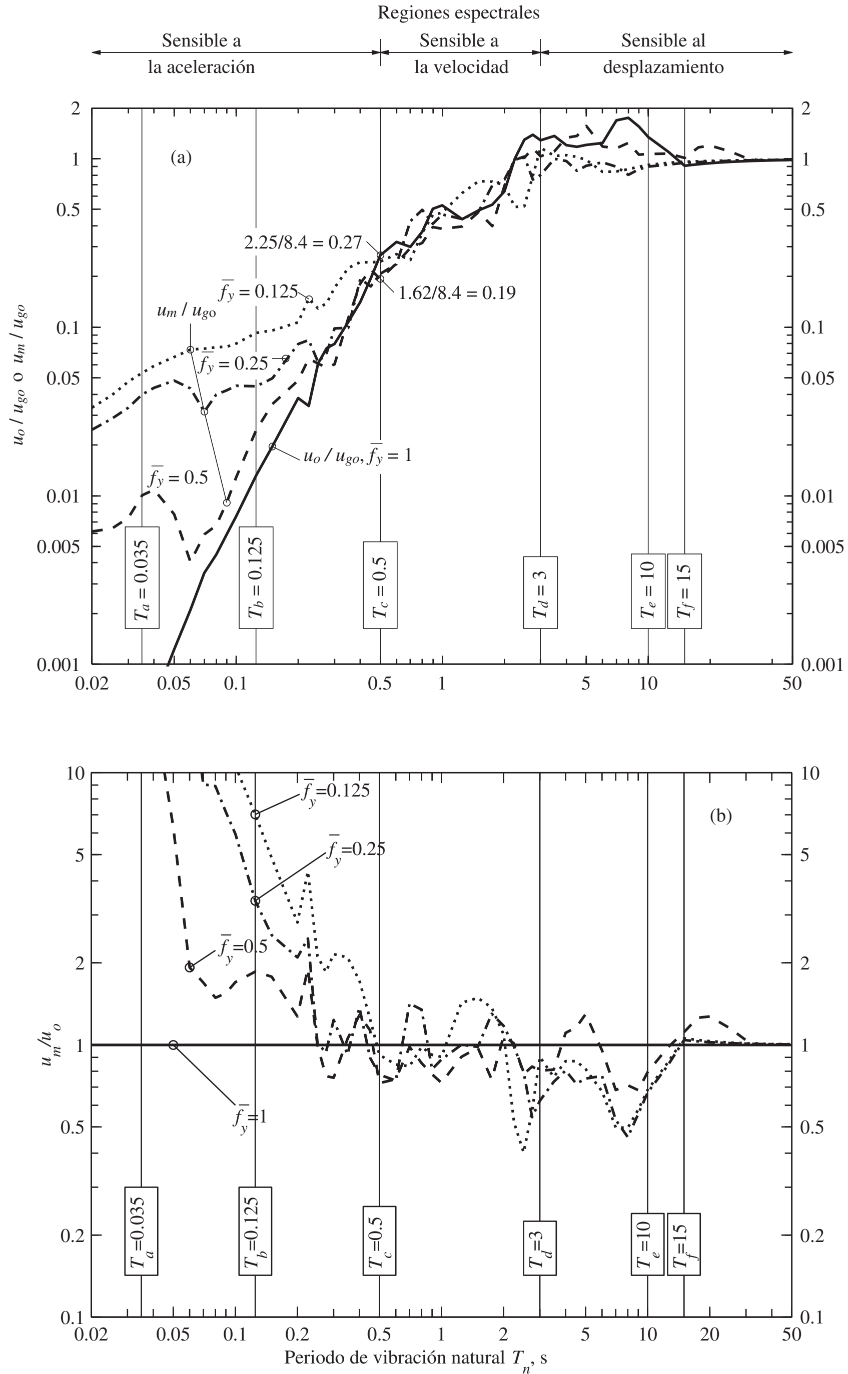


Figura 7.4.4 (a) Deformaciones máximas u_m y u_o de un sistema elastoplástico y del sistema lineal correspondiente debidas al movimiento del terreno de El Centro; (b) relación de u_m/u_o. T_n varía; $\zeta = 5\%$ y $\bar{f}_y = 1, 0.5, 0.25$ y 0.125.

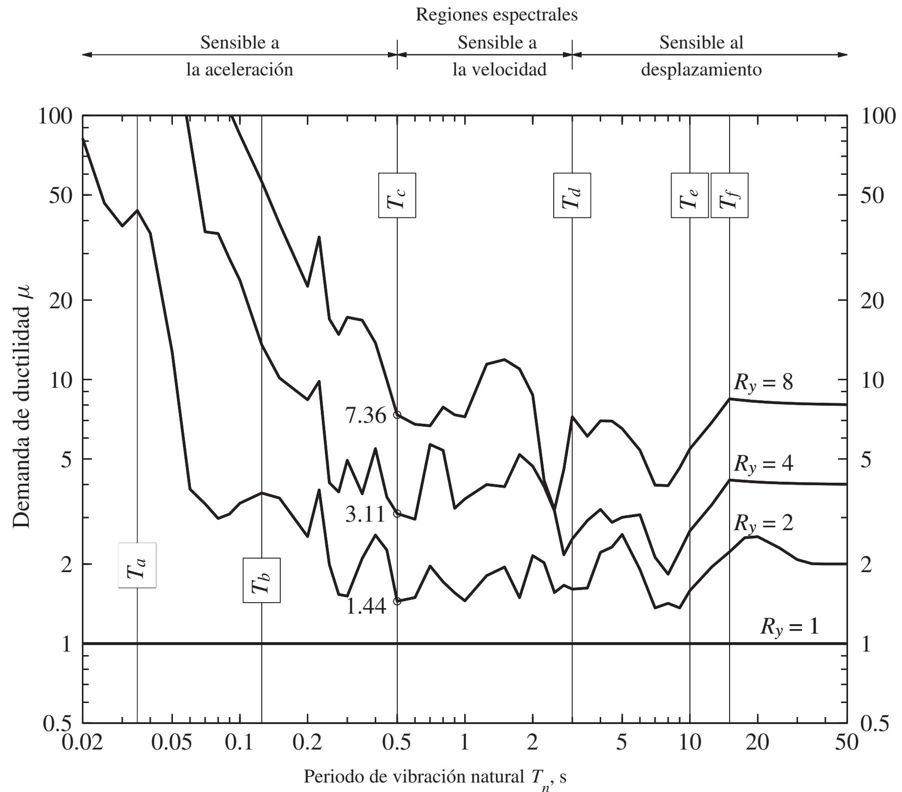


Figura 7.4.5 Demanda de ductilidad para un sistema elastoplástico debida al movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 5\%$ y $\overline{f}_y = 1, 0.5, 0.25$ y 0.125, o $R_y = 1, 2, 4$ y 8.

6.8, su masa se mantiene inmóvil mientras el suelo se mueve debajo de ella. Experimenta una deformación máxima igual al desplazamiento máximo del terreno, independientemente de $\overline{f}_y$. Así, $u_m \simeq u_o \simeq u_{go}$ y la ecuación (7.2.4) da $\mu \simeq 1/\overline{f}_y$ o $\mu \simeq R_y$, un resultado confirmado por la figura 7.4.5.

Para los sistemas con T_n en la región del espectro sensible a la velocidad, u_m puede ser mayor o menor que u_o (es decir, u_m/u_o puede o no exceder a 1); ambos se ven afectados de manera irregular por las variaciones de $\overline{f}_y$; la demanda de ductilidad μ puede ser mayor o menor que R_y; y la influencia de $\overline{f}_y$, aunque pequeña, no es despreciable.

Para los sistemas en la región del espectro sensible a la aceleración, u_m es mayor que u_o, y u_m/u_o aumenta con la disminución de $\overline{f}_y$ (es decir, con la reducción de la resistencia a la cedencia) y de T_n. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (7.2.4), la demanda de ductilidad puede ser mucho mayor que R_y, una observación que se confirma con la figura 7.4.5. Este resultado implica que la demanda de ductilidad en los sistemas de periodo muy corto puede ser grande, incluso si su resistencia está sólo un poco por abajo de la necesaria para que el sistema permanezca elástico.

En los párrafos anteriores se ha examinado la demanda de ductilidad y la relación entre las deformaciones máximas u_m y u_o para los sistemas elastoplástico y lineal corres-

pondientes, así como su dependencia de T_n y $\overline{f}_y$ o R_y. Los investigadores han demostrado que estas relaciones identificadas en las distintas regiones del espectro de respuesta para un movimiento del terreno son válidas para las regiones espectrales correspondientes en otros movimientos del terreno. Por otra parte, los valores de periodo T_a, T_b, T_c, T_d, T_e y T_f que separan estas regiones varían de un movimiento del terreno a otro, como se menciona en la sección 6.8.

7.5 ESPECTRO DE RESPUESTA PARA LA DEFORMACIÓN DE CEDENCIA Y LA RESISTENCIA A LA CEDENCIA

Para fines de diseño se desea determinar la resistencia a la cedencia f_y (o la deformación de cedencia u_y) del sistema necesario para limitar la demanda de ductilidad impuesta por un movimiento del terreno a un valor especificado. En su artículo de 1960, A. S. Veletsos y N. M. Newmark desarrollaron un espectro de respuesta para los sistemas elastoplásticos que proporciona fácilmente la información deseada. A continuación se presenta un procedimiento para determinar este espectro, que es fundamental para comprender la respuesta sísmica y el diseño inelástico de estructuras.

7.5.1 Definiciones

Se grafican los espectros de respuesta para las cantidades

$$D_y = u_y \qquad V_y = \omega_n u_y \qquad A_y = \omega_n^2 u_y \tag{7.5.1}$$

Tenga en cuenta que D_y es la deformación de cedencia u_y del sistema elastoplástico, y *no* su deformación máxima u_m. Una gráfica de D_y contra T_n para valores fijos del factor de ductilidad μ_y se denomina *espectro de respuesta de deformación a la cedencia*. De acuerdo con las definiciones de los sistemas elástico lineales (sección 6.6), las gráficas similares de V_y y A_y se llaman *espectro de respuesta de pseudo-velocidad* y *espectro de respuesta de pseudo-aceleración*, respectivamente.

Estas definiciones de D_y, V_y y A_y para los sistemas elastoplásticos son consistentes con las definiciones de D, V y A para los sistemas lineales. Esto es evidente al interpretar un sistema lineal con deformación máxima u_o como un sistema elastoplástico con deformación de cedencia $u_y = u_o$. Entonces, las ecuaciones (7.5.1) para el sistema elastoplástico son equivalentes a las ecuaciones (6.6.1) y (6.6.3) para los sistemas lineales.

Las cantidades D_y, V_y y A_y pueden presentarse en una sola gráfica tetralogarítmica, del mismo modo que para los sistemas lineales. Esto es posible porque dichas cantidades se relacionan a través de

$$\frac{A_y}{\omega_n} = V_y = \omega_n D_y \qquad \text{o} \qquad \frac{T_n}{2\pi} A_y = V_y = \frac{2\pi}{T_n} D_y \tag{7.5.2}$$

y estas relaciones son análogas a la ecuación (6.6.6) que relaciona a D, V y A para los sistemas lineales.

La resistencia a la cedencia de un sistema elastoplástico es

$$f_y = \frac{A_y}{g} w \tag{7.5.3}$$

donde w es el peso del sistema. Este resultado puede obtenerse utilizando la ecuación (7.5.1) de la manera siguiente:

$$f_y = ku_y = m(\omega_n^2 u_y) = mA_y = \frac{A_y}{g} w$$

Observe que la ecuación (7.5.3) es análoga a la ecuación (6.7.2), la cual se repite aquí por conveniencia:

$$f_o = \frac{A}{g} w \tag{7.5.4}$$

donde A es el espectro de respuesta de pseudo-aceleración para los sistemas elástico lineales.

7.5.2 Resistencia a la cedencia para una ductilidad especificada

Para obtener la resistencia a la cedencia de un sistema elastoplástico con un factor de ductilidad especificado se requiere un procedimiento de interpolación, puesto que la respuesta de un sistema con una resistencia a la cedencia seleccionada arbitrariamente coincide muy pocas veces con el valor deseado de ductilidad. Esto es evidente si se consideran los resultados de respuesta de la figura 7.4.3 para cuatro sistemas, todos con los mismos valores de $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 5\%$, pero con diferentes resistencias a la cedencia, según lo define la resistencia a la cedencia normalizada $\overline{f}_y = 1$, 0.5, 0.25 y 0.125. Los factores de ductilidad para estos cuatro sistemas son 1, 1.44, 3.11 y 7.36 (sección 7.4.2). Claramente, estos resultados no proporcionan el valor $\overline{f}_y$ correspondiente a un factor de ductilidad especificado, por ejemplo, 4.

Sin embargo, estos resultados proporcionan la base para obtener la información deseada. Conducen a una gráfica que muestra a $\overline{f}_y$ (o R_y) como funciones de μ para valores fijos de T_n y ζ. Las líneas continuas en la figura 7.5.1 muestran esas gráficas para varios valores de T_n y $\zeta = 5\%$. En la gráfica de $T_n = 0.5$ s se identifican tres de los cuatro pares de valores de $\overline{f}_y$ y μ mencionados en el párrafo anterior. Con el propósito de desarrollar una idea de las tendencias, para cada $\overline{f}_y$ se muestran dos valores del factor de ductilidad: u_m^+/u_y, donde u_m^+ es la deformación máxima en la dirección positiva, y u_m^-/u_y, donde u_m^- es el valor absoluto de la mayor deformación en la dirección negativa. La línea continua representa a μ, el mayor de los dos valores del factor de ductilidad.

Contrario a la intuición, el factor de ductilidad μ no siempre aumenta monótonamente a medida que disminuyen las resistencias normalizadas $\overline{f}_y$. En particular, es posible que más de una resistencia a la cedencia corresponda a una μ dada. Por ejemplo, la gráfica de $T_n = 2$ s tiene dos valores de $\overline{f}_y$ correspondientes a $\mu = 5$. Este fenómeno peculiar se produce cuando las curvas u_m^+/u_y y u_m^-/u_y se cruzan (por ejemplo, los puntos *a* o *b* en la figura 7.5.1). Con frecuencia, dicho punto corresponde a un mínimo local del factor de ductilidad, lo que permite más de un valor de $\overline{f}_y$ para un valor de μ ligeramente mayor. En cada valor de μ, sólo es relevante para el diseño la mayor $\overline{f}_y$, o la mayor resistencia a la cedencia.

La resistencia a la cedencia f_y de un sistema elastoplástico para un factor de ductilidad μ especificado, puede obtenerse usando el valor correspondiente de $\overline{f}_y$ y la ecuación (7.2.1). Para asegurar la precisión, este valor de $\overline{f}_y$ se obtiene mediante un procedimiento iterativo, no a partir de una gráfica como la figura 7.5.1. Con base en los pares de datos disponibles $(\overline{f}_y, \mu)$, la interpolación suponiendo una relación lineal entre $\overline{f}_y$ y $\log(\mu)$ conduce a $\overline{f}_y$, que corresponde a la μ especificada. Para determinar el factor de ductilidad se calcula la historia de respuesta del sistema con esta $\overline{f}_y$. Si está lo suficientemente cerca de la μ especificada (por ejemplo en un 1%) el valor de $\overline{f}_y$ se considera satisfactorio; de lo contrario, se modifica hasta obtener una concordancia satisfactoria.

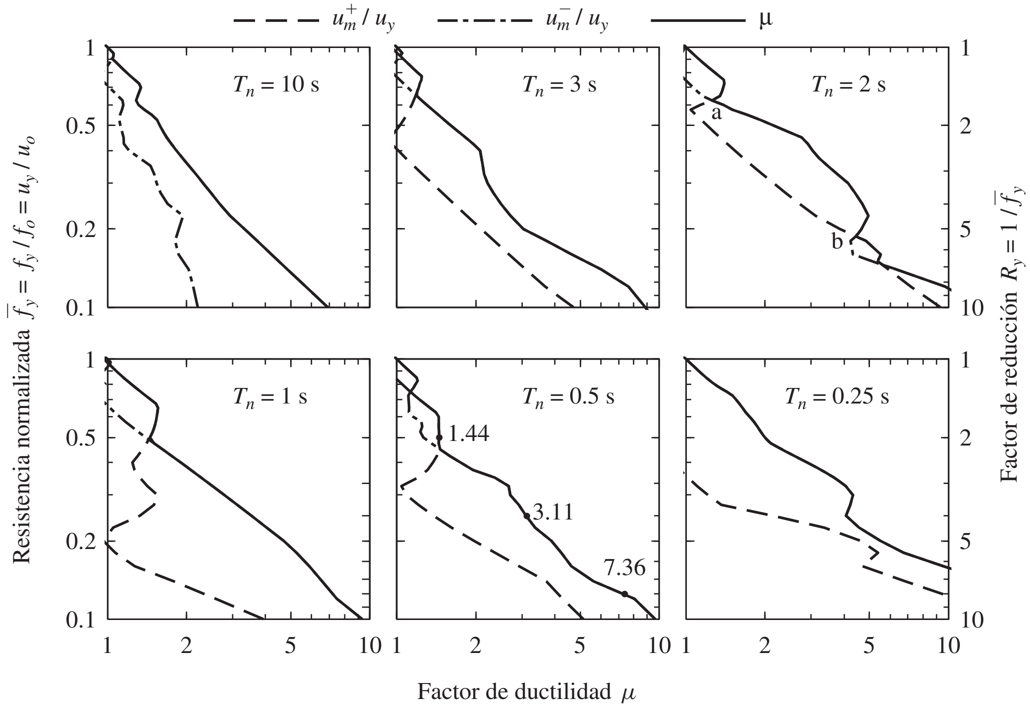


Figura 7.5.1 Relación entre la resistencia normalizada (o factor de reducción) y el factor de ductilidad debidos al movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 5\%$.

7.5.3 Construcción del espectro de respuesta de ductilidad constante

El procedimiento para construir el espectro de respuesta de los sistemas elastoplásticos correspondientes a niveles especificados del factor de ductilidad se resume como una secuencia de pasos:

1. Defina numéricamente el movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$.
2. Seleccione y fije el coeficiente de amortiguamiento ζ para el cual va a graficarse el espectro.
3. Seleccione un valor para T_n.
4. Determine la respuesta de $u(t)$ del sistema lineal con T_n y ζ igual a los valores seleccionados. A partir de $u(t)$, determine la deformación máxima u_o y la fuerza máxima $f_o = ku_o$. Tales resultados para $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 5\%$ se muestran en la figura 7.4.3a.
5. Determine la respuesta $u(t)$ de un sistema elastoplástico con los mismos T_n y ζ y la resistencia a la cedencia $f_y = \bar{f}_y f_o$, con una $\bar{f}_y < 1$seleccionada. A partir de $u(t)$ determine la deformación máxima u_m y el factor de ductilidad asociado con base en la ecuación (7.2.4). Repita este tipo de análisis para valores suficientes de $\bar{f}_y$ para desarrollar los puntos de datos $(\bar{f}_y, \mu$ que cubran el intervalo de ductilidades de interés. Tales resultados se muestran en la figura 7.4.3 para $\bar{f}_y = 0.5, 0.25$ y 0.125, proporcionando tres puntos de datos para el caso de $T_n = 0.5$ en la figura 7.5.1.

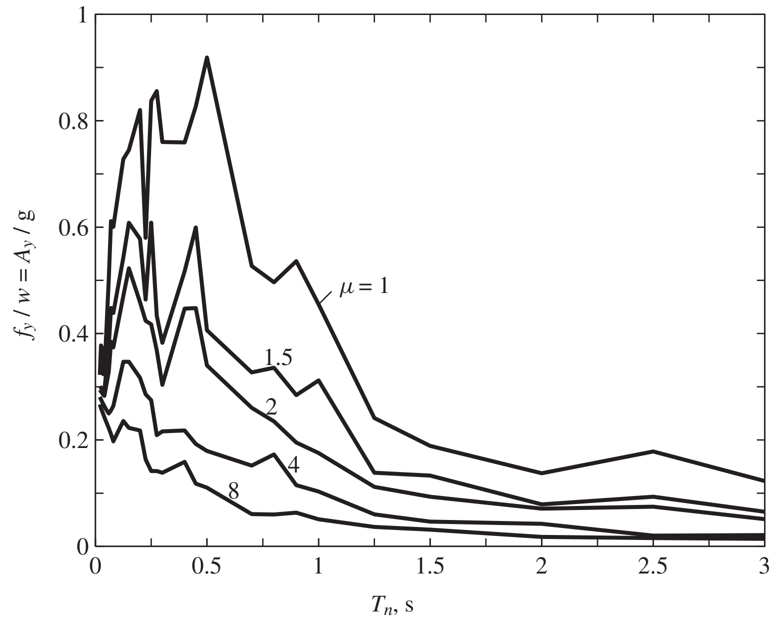


Figura 7.5.2 Espectro de respuesta de ductilidad constante para los sistemas elastoplásticos y el movimiento del terreno de El Centro; $\mu = 1, 1.5, 2, 4$ y 8; $\zeta = 5\%$.

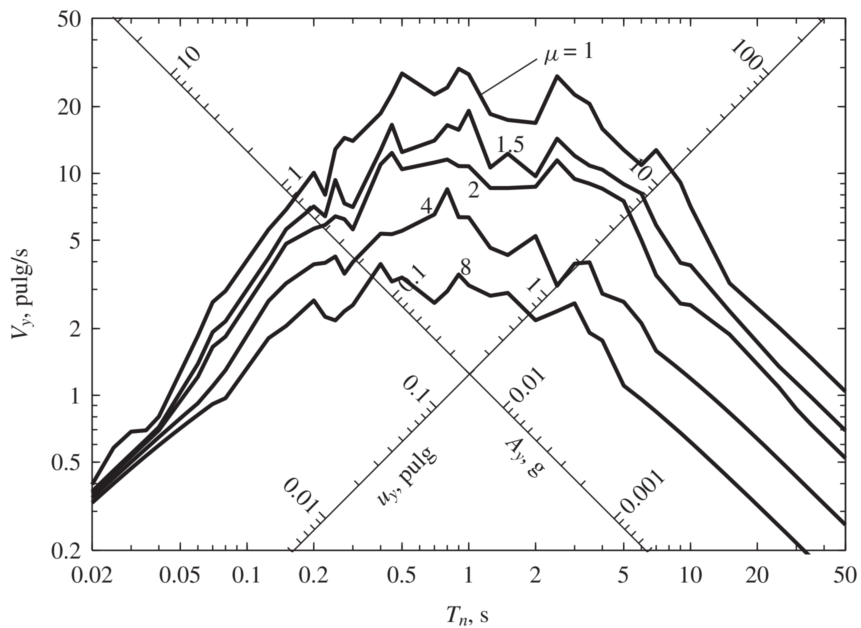


Figura 7.5.3 Espectro de respuesta de ductilidad constante para los sistemas elastoplásticos y el movimiento del terreno de El Centro; $\mu = 1, 1.5, 2, 4$ y 8; $\zeta = 5\%$.

6. a. Para una μ seleccionada, determine el valor de $\overline{f}_y$ a partir de los resultados del paso 5, utilizando el procedimiento descrito en la sección 7.5.2. Si más de un valor de $\overline{f}_y$ corresponde a un valor particular de μ, se elige el valor más grande de $\overline{f}_y$.

b. Determine las ordenadas espectrales correspondientes al valor de $\overline{f}_y$ determinado en el paso 6a. La ecuación (7.2.1) da u_y, a partir de la cual pueden determinarse D_y, V_y y A_y utilizando la ecuación (7.5.1). Estos datos proporcionan un punto en las gráficas del espectro de respuesta de las figuras 7.5.2 y 7.5.3.

7. Repita los pasos del 3 al 6 para un intervalo de T_n resultante en el espectro válido para el valor μ elegido en el paso 6a.

8. Repita los pasos del 3 al 7 para varios valores de μ.

El espectro de respuesta construido mediante este procedimiento para los sistemas elastoplásticos con $\zeta = 5\%$ que se someten al movimiento del terreno de El Centro se presenta para $\mu = 1$, 1.5, 2, 4 y 8 en dos formas diferentes: una gráfica lineal de A_y/g contra T_n (figura 7.5.2) y una gráfica tetralogarítmica que muestra a D_y, V_y y A_y (figura 7.5.3).

7.6 RESISTENCIA A LA CEDENCIA Y DEFORMACIÓN A PARTIR DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

Dada la excitación, por ejemplo el movimiento del terreno de El Centro y las propiedades T_n y ζ de un sistema de 1GDL, se desea determinar una resistencia a la cedencia para el sistema que sea consistente con un factor de ductilidad μ. El valor de A_y/g correspondiente a T_n, ζ y μ se lee en el espectro de las figuras 7.5.2 o 7.5.3, y se sustituye en la ecuación (7.5.3) para obtener la resistencia a la cedencia f_y deseada. Es posible deducir una ecuación para la deformación máxima en términos de A_y de la manera siguiente. A partir de la ecuación (7.2.3):

$$u_m = \mu u_y \tag{7.6.1}$$

donde

$$u_y = \frac{f_y}{k} = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A_y \tag{7.6.2}$$

Al unir las ecuaciones (7.6.1) y (7.6.2) se obtiene

$$u_m = \mu \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A_y \tag{7.6.3}$$

Como ejemplo, para $T_n = 0.5$ s, $\zeta = 5\%$ y $\mu = 4$, la figura 7.5.2 da $A_y/\text{g} = 0.179$. A partir de la ecuación (7.5.3), $f_y = 0.179w$. De la ecuación (7.6.2), $u_y = (0.5/2\pi)^2 0.179\text{g} = 0.438$ pulg y la ecuación (7.6.1) da $u_m = 4(0.438) = 1.752$ pulg.

7.7 RELACIÓN RESISTENCIA A LA CEDENCIA-DUCTILIDAD

La resistencia a la cedencia f_y requerida para que un sistema de 1GDL experimente una deformación inelástica es inferior a la resistencia mínima necesaria para que la estructura permanezca elástica. En la figura 7.5.2 se muestra que la resistencia a la cedencia reque-

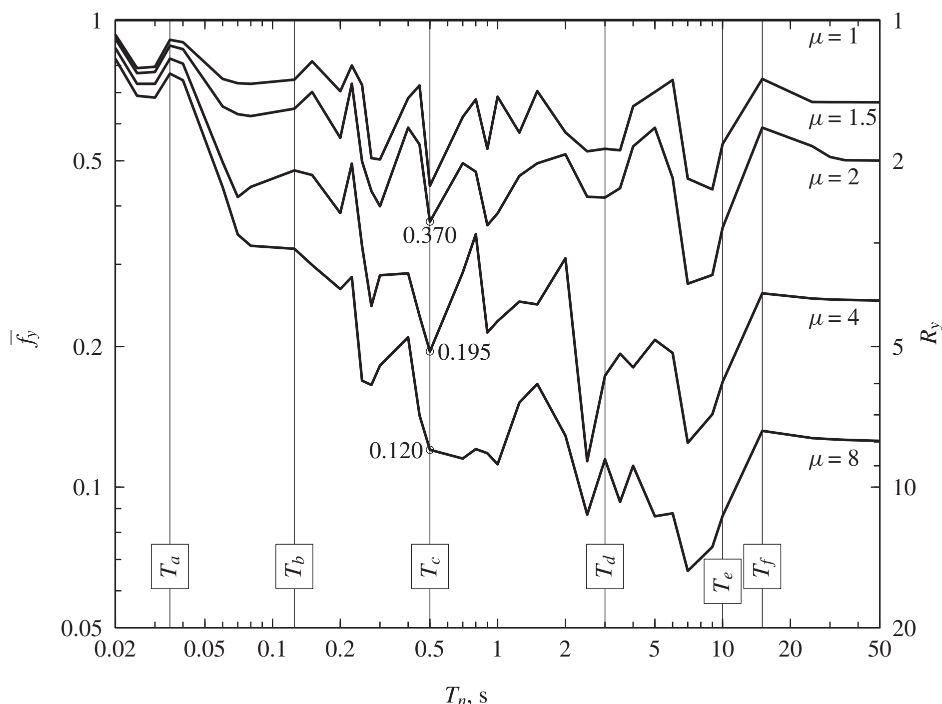


Figura 7.7.1 Resistencia normalizada $\overline{f}_y$ de sistemas elastoplásticos como una función del periodo natural de vibración T_n para $\mu = 1, 1.5, 2, 4$ y 8; $\zeta = 5\%$; movimiento del terreno de El Centro.

rida se reduce al aumentar los valores del factor de ductilidad. Incluso pequeñas cantidades de deformación inelástica, correspondientes a $\mu = 1.5$, producen una reducción significativa en la resistencia requerida. Con valores crecientes de μ se consiguen reducciones mayores, pero a un ritmo más lento.

Para estudiar estas reducciones cuantitativamente, en la figura 7.7.1 se muestra la resistencia a la cedencia normalizada $\overline{f}_y$ y el factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y de los sistemas elastoplásticos como una función de T_n para cuatro valores de μ. Éstos son tan sólo los datos de la figura 7.5.2 (o figura 7.5.3) graficados en una forma diferente. A partir de la figura 7.5.2, para cada valor de T_n, la curva $\mu = 1$ da f_o/w y la curva para otra μ da el cociente f_y/w correspondiente. La resistencia normalizada $\overline{f}_y$ se calcula a partir de la ecuación (7.2.1). Por ejemplo, considere los sistemas con $T_n = 0.5$ s; $f_o = 0.919w$ y $f_y = 0.179w$ para $\mu = 4$; la correspondiente $\overline{f}_y = 0.195$. Tales cálculos para $\mu = 1, 1.5, 2, 4$ y 8 dan $\overline{f}_y = 1, 0.442, 0.370, 0.195$ y 0.120 (o 100, 44.2, 37.0, 19.5 y 12.0%), respectivamente; tres de estos puntos se identifican en la figura 7.7.1. La repetición de estos cálculos para un intervalo de T_n conduce a la figura 7.7.1, donde se identifican los valores de periodo T_a, T_b, T_c, T_d, T_e y T_f que definen las distintas regiones espectrales y que se introdujeron en la sección 7.4.

La implicación práctica de estos resultados es que una estructura puede diseñarse para ser resistente a los sismos haciéndola más fuerte o más dúctil, o diseñándola con una combinación económica de ambas propiedades. Considere de nuevo un sistema de 1GDL con $T_n = 0.5$ s y $\zeta = 5\%$ que se diseñó para el movimiento del terreno de El Centro. Si este sistema se

diseña para una resistencia $f_o = 0.919w$ o mayor, se mantendrá dentro de su intervalo elástico lineal durante la excitación; entonces, no necesita ser dúctil. Por otro lado, si puede desarrollar un factor de ductilidad de 8, debería diseñarse sólo para un 12% de la resistencia f_o necesaria para el comportamiento elástico. De manera alternativa, puede diseñarse para una resistencia igual al 37% de f_o y una capacidad de ductilidad de 2; o una resistencia igual al 19.5% de f_o y una capacidad de ductilidad de 4. En algunos tipos de materiales y elementos estructurales, la ductilidad es difícil de conseguir, por lo que la economía dicta un diseño para grandes fuerzas laterales; en otros, la ductilidad es mucho más fácil de obtener que la resistencia lateral, lo cual se ve reflejado en la práctica del diseño. Si la combinación de resistencia y ductilidad proporcionada es insuficiente, la estructura puede dañarse de tal modo que la reparación no resulte económica (vea la figura 7.2), o puede colapsar (vea la figura 7.3).

La reducción de la resistencia admisible para una ductilidad permisible especificada varía con T_n. Como se muestra en la figura 7.7.1, la resistencia normalizada $\overline{f}_y$ tiende a 1 (y el factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y tiende a 1), lo que implica que no hay reducción en el extremo de periodos cortos del espectro; y a $\overline{f}_y = 1/\mu$ (es decir, $R_y = \mu$) en el extremo de periodos largos del espectro. En el medio, la $\overline{f}_y$ determinada para un único movimiento del suelo varía de forma irregular. Sin embargo, es posible desarrollar curvas suaves para fines de diseño (sección 7.10).

La resistencia normalizada para un factor de ductilidad especificado también depende del coeficiente de amortiguamiento ζ, pero esta dependencia no es fuerte. Por lo tanto, suele ignorarse en las aplicaciones de diseño.

7.8 EFECTOS RELATIVOS DE LA CEDENCIA Y EL AMORTIGUAMIENTO

La figura 7.8.1 muestra el espectro de respuesta para los sistemas elástico lineales con tres valores de amortiguamiento viscoso: $\zeta = 2$, 5 y 10%. Para los mismos tres valores de amortiguamiento se presentan los espectros de respuesta para los sistemas elastoplásticos con dos factores de ductilidad diferentes: $\mu = 4$ y $\mu = 8$. En esta sección se identifican los efectos relativos de la cedencia y el amortiguamiento a partir de estos resultados.

Los efectos del amortiguamiento viscoso y la cedencia son similares en un sentido pero diferentes en otro. Se asemejan en el sentido de que ambos mecanismos reducen la pseudo-aceleración y, por lo tanto, el valor máximo de la fuerza lateral para la que debe diseñarse el sistema. Por otra parte, las eficacias relativas de la cedencia y el amortiguamiento son bastante diferentes en las distintas regiones espectrales:

1. El amortiguamiento tiene una influencia insignificante sobre la respuesta de los sistemas con $T_n > T_f$ en la región del espectro sensible al desplazamiento, mientras que para tales sistemas los efectos de la cedencia sobre la fuerza de diseño son muy importantes, pero en la deformación máxima u_m son insignificantes (figura 7.4.4).

2. El amortiguamiento tiene una influencia insignificante en la respuesta de los sistemas con $T_n < T_a$ en la región del espectro sensible a la aceleración, mientras que para tales sistemas los efectos de la cedencia sobre la deformación máxima y la demanda de ductilidad son muy importantes (figuras 7.4.4 y 7.4.5), pero en la fuerza de diseño son pequeños. En el límite cuando T_n tiende a cero, la pseudo-aceleración A o A_y se aproximará al valor máximo de la aceleración del terreno, lo que implica que este parámetro de respuesta no se ve afectado por el amortiguamiento o la cedencia.

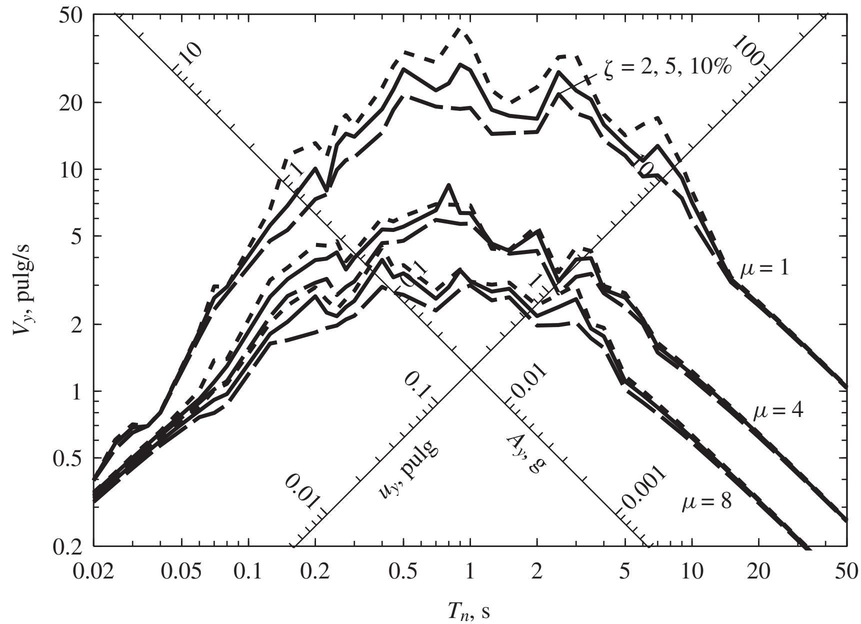


Figura 7.8.1 Espectros de respuesta para los sistemas elastoplásticos y movimiento del terreno de El Centro; $\zeta = 2.5$ y 10% y $\mu = 1, 4$ y 8.

3. El amortiguamiento es más efectivo en reducir la respuesta de los sistemas con T_n en la región del espectro sensible a la velocidad, donde la cedencia es aún más efectiva.

Así, en general, los efectos de la cedencia no pueden considerarse en términos de una cantidad fija de amortiguamiento viscoso equivalente. Si esto fuera posible, la respuesta máxima de los sistemas inelásticos podría determinarse directamente a partir del espectro de respuesta para los sistemas elástico lineales, lo cual habría sido conveniente.

La eficacia del amortiguamiento en reducir la respuesta es menor para los sistemas inelásticos y disminuye conforme aumenta la deformación inelástica (figura 7.8.1). Por ejemplo, promediado en la región espectral sensible a la velocidad, el porcentaje de reducción de la respuesta resultante de incrementar el amortiguamiento de 2% a 10% para los sistemas con $\mu = 4$ es de aproximadamente la mitad de la reducción para los sistemas elástico linelaes. Así, los amortiguadores viscoelásticos añadidos que se mencionaron en la sección 6.8 pueden ser menos benéficos para la reducción de la respuesta en los sistemas inelásticos que en los sistemas elásticos.

7.9 ENERGÍA DISIPADA

La energía de entrada aplicada a un sistema inelástico por un sismo se disipa tanto por el amortiguamiento viscoso como por la cedencia. Tales cantidades de energía se definen y analizan en esta sección. Los diferentes términos de energía pueden definirse al integrar la

ecuación de movimiento de un sistema inelástico, ecuación (7.3.1), de la manera siguiente:

$$\int_0^u m\ddot{u}(t)\,du + \int_0^u c\dot{u}(t)\,du + \int_0^u f_S(u)\,du = -\int_0^u m\ddot{u}_g(t)\,du \tag{7.9.1}$$

El lado derecho de esta ecuación es la entrada de energía a la estructura dado el inicio de la excitación sísmica:

$$E_I(t) = -\int_0^u m\ddot{u}_g(t)\,du \tag{7.9.2}$$

Esto es claro si se observa que a medida que la estructura se mueve a través de un incremento del desplazamiento du, la energía suministrada a la estructura por la fuerza efectiva $p_{ef}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$ es

$$dE_I = -m\ddot{u}_g(t)\,du$$

El primer término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la energía cinética de la masa asociada a su movimiento en relación con el terreno:

$$E_K(t) = \int_0^u m\ddot{u}(t)\,du = \int_0^{\dot{u}} m\dot{u}(t)\,d\dot{u} = \frac{m\dot{u}^2}{2} \tag{7.9.3}$$

El segundo término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la energía disipada por el amortiguamiento viscoso, definida anteriormente en la sección 3.8:

$$E_D(t) = \int_0^u f_D(t)\,du = \int_0^u c\dot{u}(t)\,du \tag{7.9.4}$$

El tercer término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la suma de la energía disipada por la cedencia y la energía de deformación recuperable del sistema:

$$E_S(t) = \frac{[f_S(t)]^2}{2k} \tag{7.9.5}$$

donde k es la rigidez inicial del sistema inelástico. Así, la energía disipada por la cedencia es

$$E_Y(t) = \int_0^u f_S(u)\,du - E_S(t) \tag{7.9.6}$$

Con base en estas cantidades de energía, la ecuación (7.9.1) es una descripción del balance de energía para el sistema:

$$E_I(t) = E_K(t) + E_D(t) + E_S(t) + E_Y(t) \tag{7.9.7}$$

Paralelas con el análisis de la respuesta sísmica de un sistema, estas cantidades de energía pueden calcularse de manera conveniente al reescribir las integrales con respecto al tiempo. Así

$$E_D(t) = \int_0^t c[\dot{u}(t)]^2\,dt \tag{7.9.8}$$

$$E_Y(t) = \left[\int_0^t \dot{u}\,f_S(u)\,dt\right] - E_S(t)$$

La energía cinética E_K y la energía de deformación E_S en cualquier momento t pueden calcularse de manera conveniente a partir de las ecuaciones (7.9.3) y (7.9.5), respectivamente.

El análisis de energía anterior es para una estructura cuya masa está sometida a una fuerza $p_{ef}(t) = -m\ddot{u}_t$, no para una estructura cuya base se excita mediante la aceleración $\ddot{u}_g(t)$. Por lo tanto, el término de la energía de entrada en la ecuación (7.9.1) representa la energía suministrada por $p_{ef}(t)$, no por $\ddot{u}_g(t)$, y el término de la energía cinética en la ecuación (7.9.1) representa la energía del movimiento en relación con la base en vez del movimiento total. En vista de que el desplazamiento y la velocidad relativos causan las fuerzas en una estructura, una ecuación de energía expresada en términos del movimiento relativo es más significativa que otra expresada en términos de la velocidad y el desplazamiento absolutos. Además, la energía disipada en el amortiguamiento viscoso o la cedencia depende sólo del movimiento relativo.

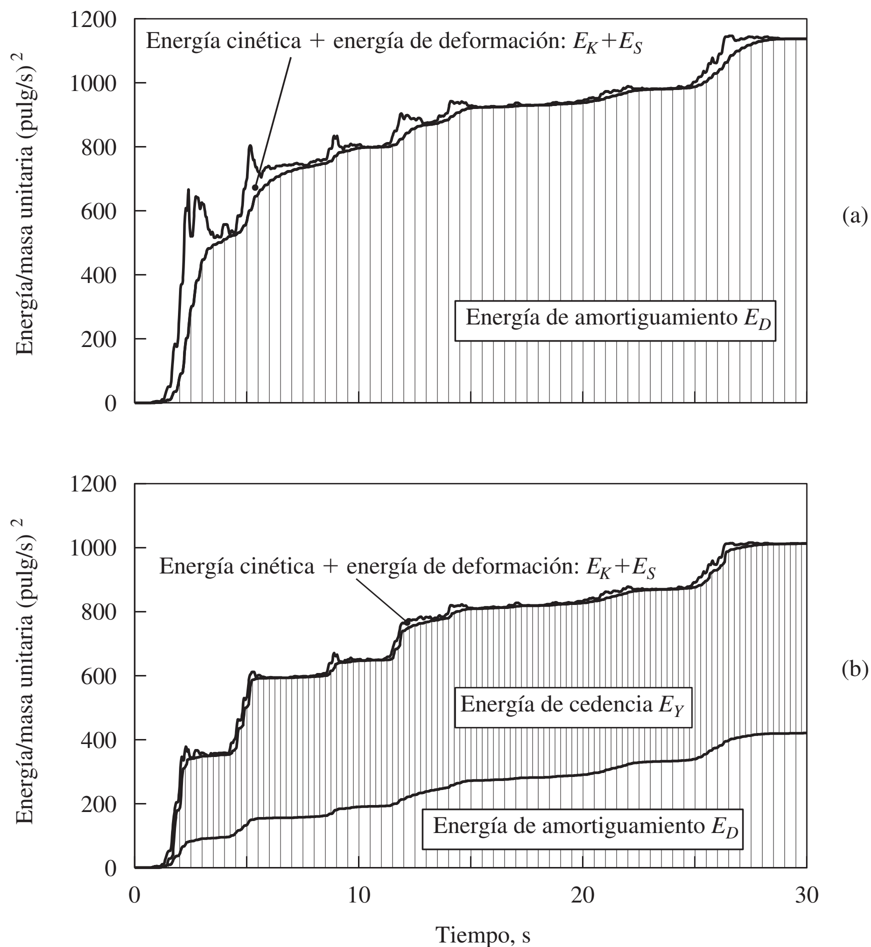


Figura 7.9.1 Variación en el tiempo de la energía disipada por el amortiguamiento viscoso y la cedencia, así como por la energía cinética más la energía de deformación; (a) sistema lineal, T_n = 0.5 s, ζ = 5%; (b) sistema elastoplástico, T_n = 0.5 s, ζ = 5%, $\overline{f_y}$ = 0.25.

En la figura 7.9.1 se muestra la variación en el tiempo de estas cantidades de energía para dos sistemas de 1GDL sometidos al movimiento del terreno de El Centro. Los resultados presentados son para un sistema elástico lineal con periodo natural $T_n = 0.5$ s y coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.05$, y para un sistema elastoplástico con las mismas propiedades en la zona de deformación elástica y la resistencia normalizada $\bar{f}_y = 0.25$. Recuerde que la respuesta de deformación para estos dos sistemas se presenta en la figura 7.4.3.

Los resultados de la figura 7.9.1 muestran que, en algún momento, la estructura disipa toda la energía que se le suministra mediante el amortiguamiento viscoso y la cedencia. Esto lo indica el hecho de que la energía cinética y la energía de deformación recuperable disminuyen cerca del final de la vibración del terreno. El amortiguamiento viscoso disipa menos energía del sistema inelástico, lo que implica velocidades más pequeñas en relación con el sistema elástico. La figura 7.9.1 también indica que la entrada de energía a un sistema lineal y a un sistema inelástico, ambos con los mismos T_n y ζ, no son iguales. Además, la energía de entrada varía con T_n para ambos sistemas.

La energía de cedencia que se muestra en la figura 7.9.1b indica una demanda impuesta sobre la estructura. Si esta cantidad de energía puede disiparse a través de la cedencia de la estructura, ésta debe diseñarse sólo para $\bar{f}_y = 0.25$ (es decir, un cuarto de la fuerza desarrollada en el sistema lineal correspondiente). Sin embargo, la cedencia repetida que disipa la energía causa daños a la estructura y la deja en una condición de deformación permanente al final del sismo.

7.10 DISPOSITIVOS COMPLEMENTARIOS PARA LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

Si una parte de esta energía pudiera disiparse a través de dispositivos complementarios que, de ser necesario, pudieran sustituirse con facilidad después de un sismo, el daño estructural podría reducirse. Estos dispositivos pueden servir para reducir los costos en el diseño de nuevas estructuras y para la protección sísmica de las estructuras existentes. Los dispositivos disponibles pueden clasificarse en tres categorías principales: los amortiguadores de fluido viscoso y viscoelásticos, los amortiguadores metálicos histeréticos y los amortiguadores de fricción. A continuación se describe sólo uno de los varios dispositivos disponibles en cada categoría.

7.10.1 Amortiguadores de fluido viscoso y viscoelásticos

En el amortiguador viscoso que se usa con más frecuencia para la protección sísmica de estructuras, un fluido viscoso, por lo general un líquido a base de silicona, es forzado a fluir a través de pequeños orificios dentro de un recipiente cerrado (figura 7.10.1a). La energía se disipa debido a la fricción entre el fluido y las paredes del orificio. La relación fuerza-velocidad del amortiguador, que es una función de la relación de carga, puede ser lineal o no lineal. En la figura 7.10.1b se muestra una relación fuerza-desplazamiento determinada experimentalmente para un amortiguador que está sometido a una fuerza sinusoidal. Un lazo de histéresis elíptico indica una relación lineal de fuerza-velocidad, como se demostró analíticamente en la sección 3.10. Los amortiguadores de fluidos viscosos se instalan dentro del esqueleto de un marco de un edificio, por lo regular alineado con los contravientos (figura 7.10.1c), o entre las torres (o pilas) y la cubierta de un puente.

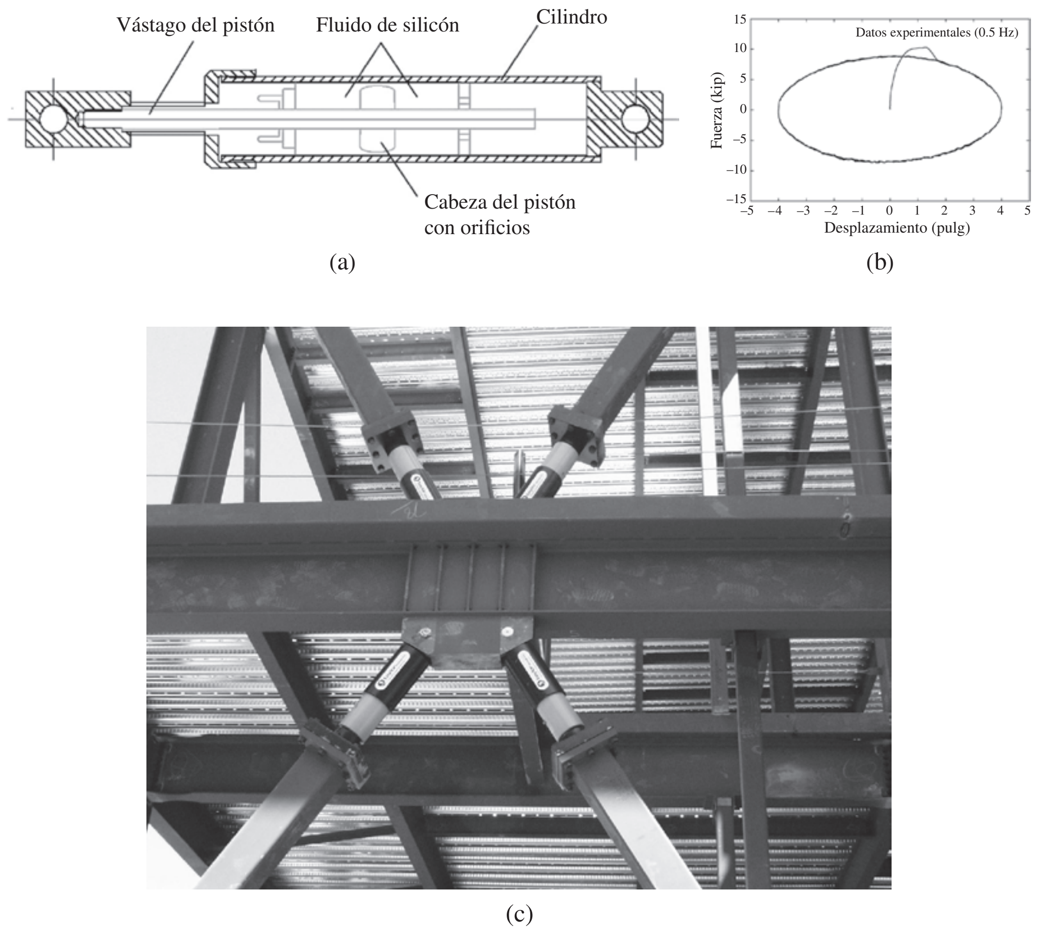
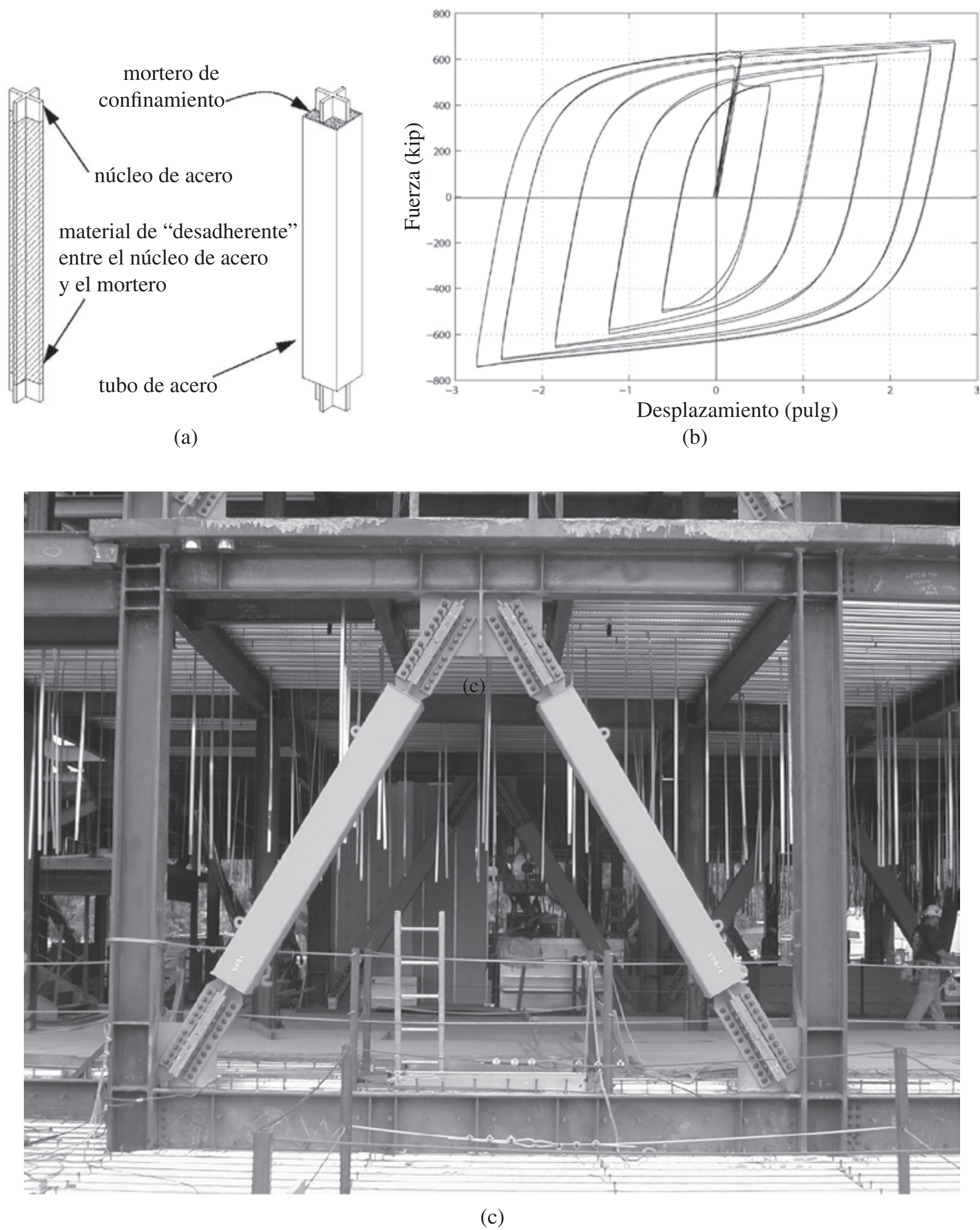


Figura 7.10.1 (a) Amortiguador de fluido viscoso: dibujo esquemático; (b) relación fuerza-desplazamiento y (c) contravientos con amortiguador de fluido viscoso. [Créditos: (a) Cameron Black; (b) Cameron Black; y (c) Taylor Devices Inc.].



(c)

Figura 7.10.2 (a) Contraviento restringido contra el pandeo (CRP); dibujos esquemáticos, (b) relación fuerza-desplazamiento y (c) conravientos con CRP. [Créditos: (a) Ian Aiken, (b) Cameron Black; y (c) Ian Aiken].

7.10.2 Amortiguadores metálicos histeréticos

Los amortiguadores metálicos disipan energía a través del comportamiento histéretico de los metales cuando se deforman en su intervalo inelástico. Existe una amplia variedad de dispositivos que se han desarrollado y probado para disipar la energía en los modos de deformación en flexión, en cortante o en tensión. Entre ellos, el contraviento restringido contra el pandeo (CRP) se ha usado mucho en edificios de Japón (donde se desarrolló en un principio) y Estados Unidos. Tales dispositivos constan de un núcleo de acero confinado en un tubo de acero lleno de mortero (figura 7.10.2a). El núcleo de acero soporta la carga axial, mientras que el material de relleno proporciona soporte lateral al núcleo e impide su pandeo. Para desarrollar los lazos de histéresis estables (figura 7.10.2b), los CRPs suelen instalarse en configuraciones de refuerzo tipo Chevron (figura 7.10.2c).

7.10.3 Amortiguadores de fricción

Los investigadores han desarrollado y probado varios tipos de dispositivos disipadores de energía, que utilizan la fricción como medio de disipación. Estos dispositivos aumentan la capacidad de la estructura para disipar energía, pero no cambian demasiado los periodos naturales de vibración (aproximadamente entre 10 y 20%). Uno de estos dispositivos es la conexión atornillada con ranuras (CAR). La figura 7.10.3 incluye un diagrama esquemático de una CAR, el lazo de histéresis casi rectangular resultante, la CAR conectada a la parte superior de los contravientos tipo Chevron y una estructura de ensaye con 12 CAR.

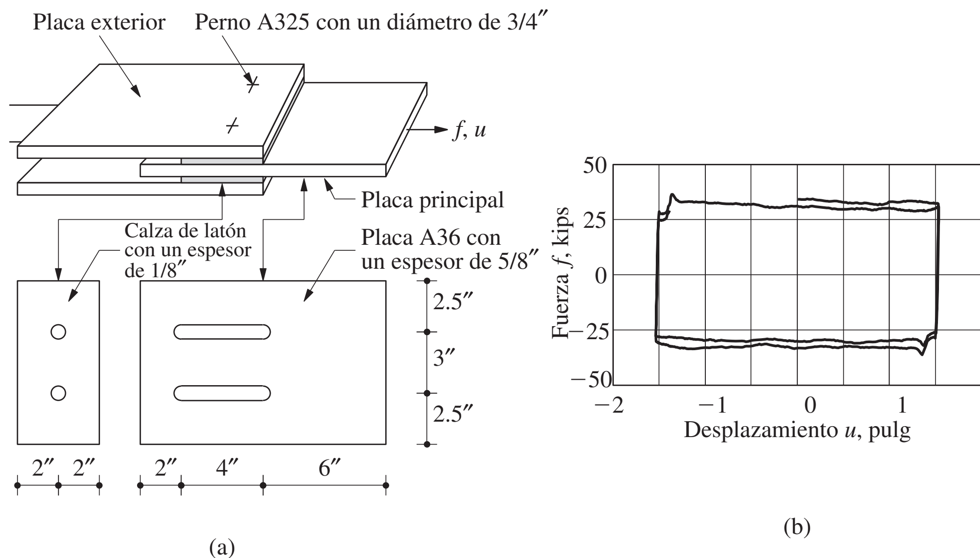
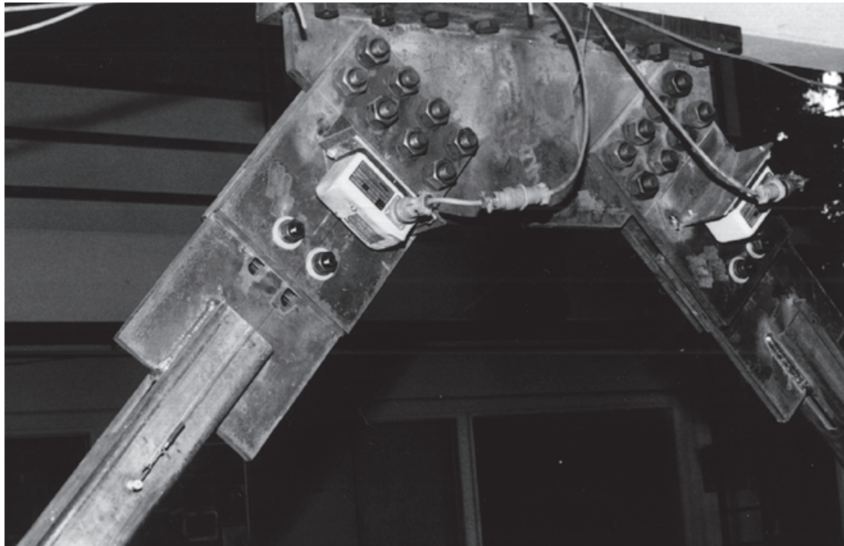
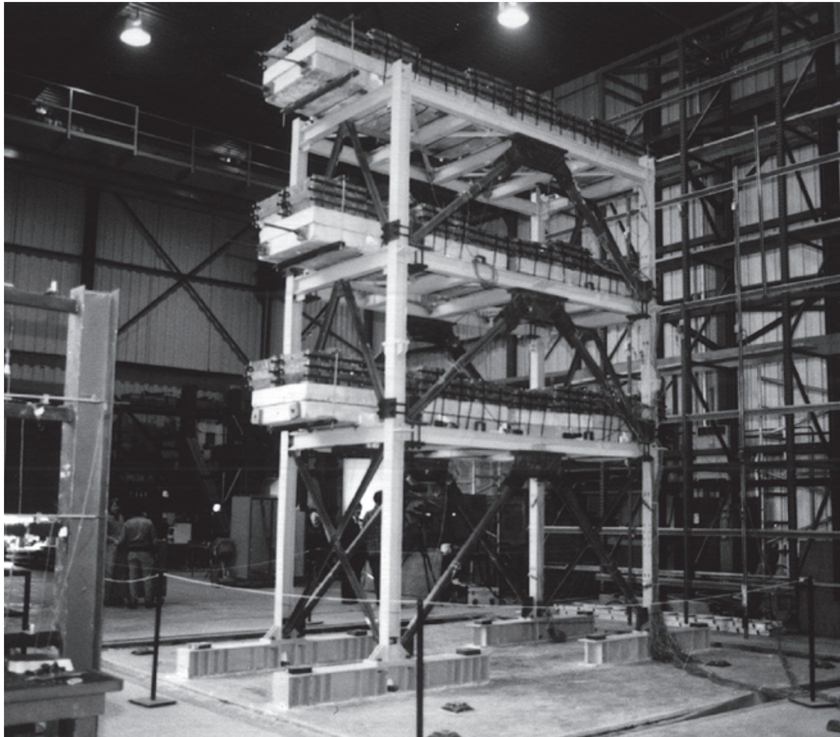


Figura 7.10.3a, b (a) Diagrama esquemático de una conexión atornillada con ranuras (CAR); (b) diagrama de fuerza-desplazamiento de una CAR. (Adaptada de C. E. Grigorian y E. P. Popov, 1994).



(c)



(d)

Figura 7.10.3c, d (c) CAR en la parte superior de un contraviento tipo chevron en la estructura de ensaye; (d) estructura de ensaye con 12 CRA sobre la mesa vibradora de la Universidad de California en Berkeley. (Cortesía de KV Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center de la Universidad de California en Berkeley).

7.11 ESPECTRO DE DISEÑO INELÁSTICO

En esta sección se presenta un procedimiento para construir el espectro de diseño de los sistemas elastoplásticos con factores de ductilidad especificados. Esto podría lograrse al construir el espectro de respuesta con ductilidad constante (sección 7.5.3) para muchos posibles movimientos del terreno en el sitio y, con base en estos datos, establecer el espectro de diseño asociado a una probabilidad de excedencia. Un enfoque más sencillo consiste en desarrollar un espectro de diseño a ductilidad constante a partir del espectro de diseño elástico (sección 6.9), para después multiplicarlo por la resistencia normalizada $\overline{f}_y$ o dividirlo entre el factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y.

7.11.1 Ecuaciones R_y-μ-T_n

En la figura 7.11.1 se muestra el factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y para sistemas elastoplásticos como una función de T_n para valores seleccionados de μ. Estos datos para el movimiento del terreno de El Centro, que son el recíproco de los valores $\overline{f}_y$ de la figura 7.7.1, se muestran en la figura 7.11.1a y la mediana de 20 movimientos del terreno en la figura 7.11.1b. Como se señaló en la sección 7.7, la reducción en la resistencia a la cedencia permitida para un factor de ductilidad especificado varía con T_n. En el extremo de periodos cortos del espectro, R_y tiende a 1, lo que implica que no hay reducción. En el extremo de periodos largo del espectro, R_y tiende a μ. En el medio, R_y varía con T_n de manera irregular para un solo movimiento del terreno, pero su mediana para el conjunto de movimientos de suelo varía de manera relativamente suave con T_n, por lo general aumentando en gran

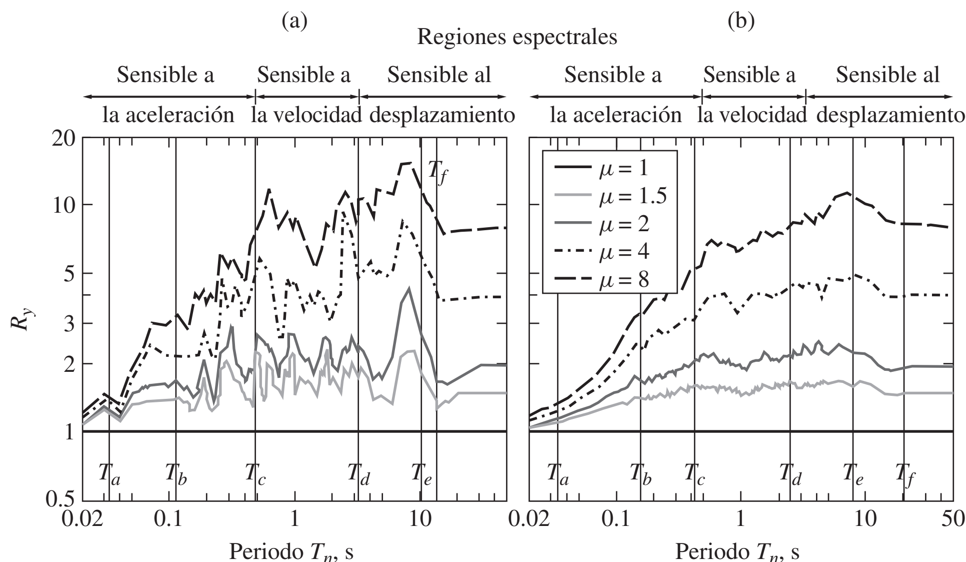


Figura 7.11.1 Factor de reducción de resistencia a la cedencia R_y para sistemas elastoplásticos como una función de T_n para $\mu = 1, 1.5, 2, 4$ y 8; $\zeta = 5\%$: (a) movimiento del terreno de El Centro; (b) conjunto LMSR de movimientos del terreno (se presentan los valores medianos).

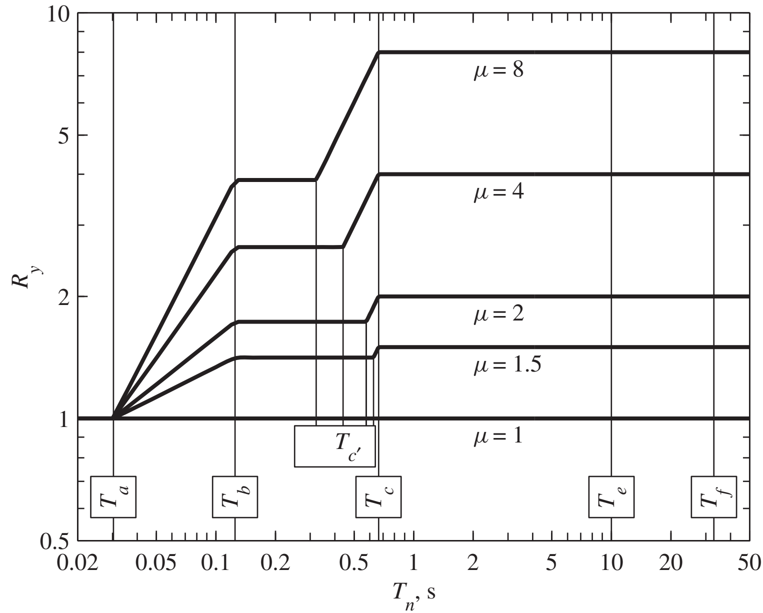


Figura 7.11.2 Valores de diseño del factor de reducción de la resistencia a la cedencia.

medida con T_n en la región espectral sensible a la aceleración, y sólo un poco en la región sensible a la velocidad y en la parte de T_d a T_f de la región sensible al desplazamiento; en el intervalo de periodos mayores a T_f, R_y disminuye a medida que T_n aumenta y se acerca a μ en periodos muy largos.

Con base en resultados similares a los presentados en la figura 7.11.1b, varios investigadores han propuesto ecuaciones para la variación de R_y con T_n y μ. Una de las primeras propuestas más sencillas relaciona a R_y con μ en diferentes regiones espectrales de la manera siguiente:

$$R_y = \begin{cases} 1 & T_n < T_a \\ \sqrt{2\mu - 1} & T_b < T_n < T_{c'} \\ \mu & T_n > T_c \end{cases} \tag{7.11.1}$$

donde los periodos T_a, T_b, ..., T_f que separan las regiones espectrales son los definidos en las figuras 6.9.2 y 6.9.3, y $T_{c'}$ se aclarará más adelante. En la figura 7.11.2a se grafica la ecuación (7.11.1) para varios valores de μ en un formato log-log, donde las líneas rectas inclinadas se incluyen para proporcionar transiciones entre los tres segmentos constantes.

7.11.2 Construcción del espectro de diseño a una ductilidad constante

Se supone que el espectro de diseño elástico *a-b-c-d-e-f* mostrado en la figura 7.11.3 se desarrolló mediante el procedimiento descrito en la sección 6.9. Este espectro de diseño elástico se divide entre R_y para un valor elegido del factor de ductilidad μ (ecuación 7.11.1 y figura 7.11.2) a fin de construir el espectro de diseño inelástico *a′-b′-c′-d′-e′-f′* mostrado

en la figura 7.11.3. Esta aplicación incluye los siguientes pasos:

1. Divida la ordenada constante A del segmento b-c entre $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$ para localizar el segmento b'-c'.
2. Divida la ordenada constante V del segmento c-d entre $R_y = \mu$ para localizar el segmento c'-d'.
3. Divida la ordenada constante D del segmento d-e entre $R_y = \mu$ para localizar el segmento d'-e'.
4. Divida la ordenada en f entre $R_y = \mu$ para localizar f'. Una los puntos f' y e'. Dibuje $D_y = u_{go}/\mu$ para $T_n > 33$ s.
5. Establezca la ordenada a' del espectro inelástico en $T_n = \frac{1}{33}$ s igual a la ordenada de un punto a del espectro elástico. Esto es equivalente a $R_y = 1$. Una los puntos a' y b'.
6. Dibuje $A_y = \ddot{u}_{go}$ para $T_n < \frac{1}{33}$ s.

Los valores de periodo asociados con los puntos a', b', e' y f' son fijos, como se muestra en la figura 7.11.3, en los mismos valores que los puntos correspondientes del espectro elástico. Para los movimientos del terreno en terreno firme, $T_a = \frac{1}{33}$ s, $T_b = \frac{1}{8}$ s, $T_e = 10$ s y $T_f = 33$ s (figura 6.9.3). T_c y T_d dependen del amortiguamiento, puesto que se determinan mediante los factores de amplificación α_A, α_V y α_D, los cuales dependen del amortiguamiento (tabla 6.9.1). Los valores de periodo $T_{c'}$ y $T_{d'}$ dependen de los valores utilizados para reducir los segmentos b-c, c-d y d-e del espectro de diseño elástico porque el R_y varía con μ. De acuerdo con los valores seleccionados para R_y de la ecuación (7.11.1) para las tres regiones del espectro, respectivamente, $T_{d'}$ es igual a T_d pero $T_{c'}$ es diferente de T_c. $T_{d'}$ es diferente de T_d si R_y no es igual para las regiones espectrales c-d y d-e. Observe que la porción c-d-e-f del espectro se ha reducido en un factor constante μ.

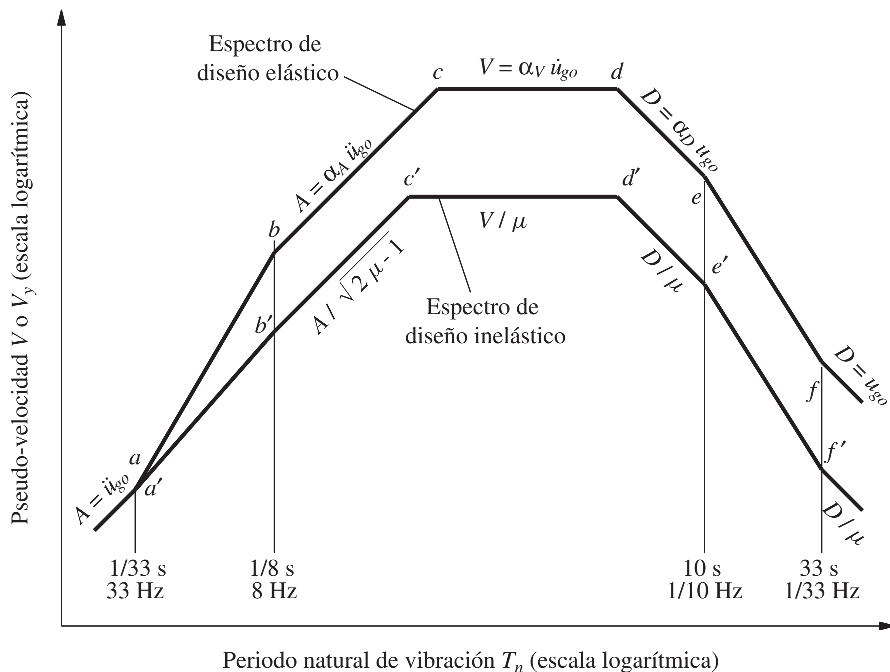


Figura 7.11.3 Construcción del espectro de diseño inelástico.

Considere movimientos del terreno en terreno firme con la aceleración máxima $\ddot{u}_{go} = 1$g, la velocidad máxima $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y el desplazamiento máximo $u_{go} = 36$ pulg. Se desea el espectro del percentil 84.1 para los sistemas elastoplásticos con un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 5\%$ para un factor de ductilidad de $\mu = 2$. El espectro de diseño para los sistemas elásticos con $\zeta = 5\%$ y el movimiento del terreno seleccionado se presentan en la figura 6.9.4 y se reproduce en la figura 7.11.4. El espectro inelástico para $\mu = 2$ se determina mediante los siguientes pasos (con referencia a las figuras 7.11.3 y 7.11.4.):

1. La ordenada $A = 2.71$g de la rama de la constante A se divide entre $R_y = \sqrt{2\mu - 1} = 1.732$ para $\mu = 2$, a fin de obtener la ordenada $A_y = 1.56$g para el segmento b'-c'.

2. La ordenada $V = 110.4$ pulg/s de la rama de la constante V se divide entre $R_y = \mu = 2$, a fin de obtener la ordenada $V_y = 55.2$ pulg/s para el segmento c'-d'.

3. La ordenada $D = 72.4$ pulg de la rama de la constante D se divide entre $R_y = \mu = 2$ para obtener la ordenada $D_y = 36.2$ para el segmento d'-e'.

4. La ordenada $D = 36$ pulg del punto f se divide entre $R_y = \mu = 2$ a fin de obtener la ordenada $D_y = 18$ pulg para el punto f'; los puntos f' y e' se unen mediante una línea recta. Este valor D_y también define el espectro para $T_n > 33$ s.

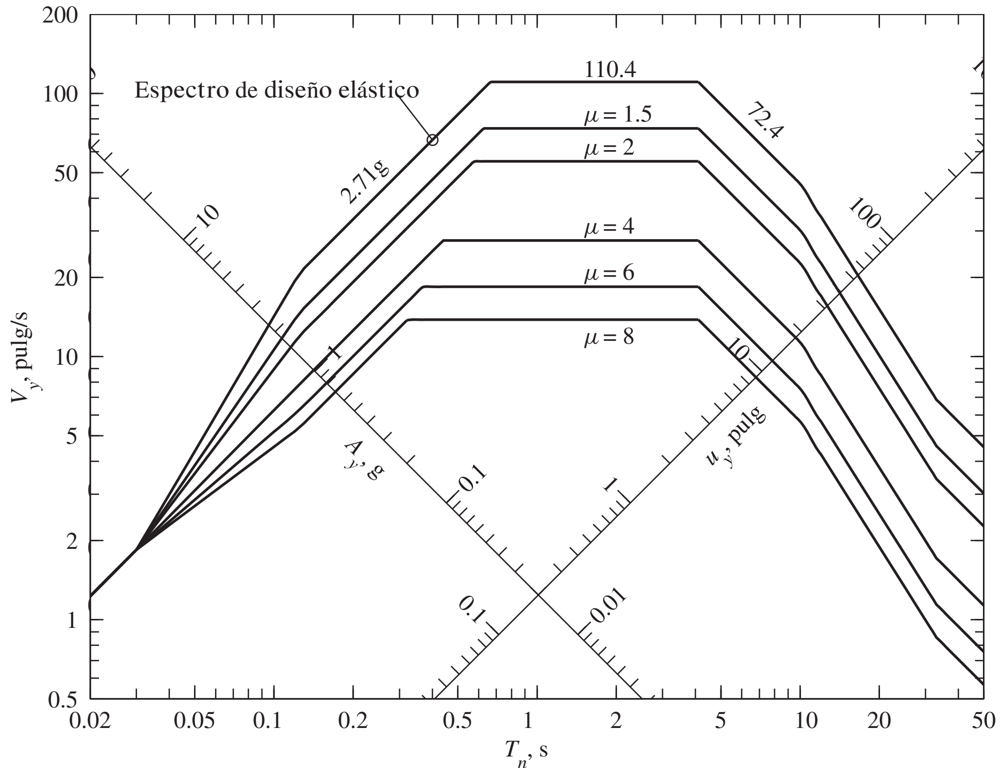


Figura 7.11.4 Espectro de diseño inelástico (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\mu = 1.5, 2, 4, 6$ y 8; $\zeta = 5\%$.

5. El punto a', al igual que el punto a, se une al punto b'.

6. Se dibuja la línea $A_y = \ddot{u}_{go} = 1\text{g}$ para $T_n < \frac{1}{33}$ s.

El espectro de diseño inelástico resultante para $\mu = 2$ se muestra en la figura 7.11.4, junto con los espectros de diseño para otros valores de $\mu = 1$, 1.5, 4, 6 y 8 construidos mediante el mismo procedimiento.

Cuando se conoce el espectro de diseño de pseudo-velocidad (V_y) (figura 7.11.4), el espectro de diseño de pseudo-aceleración (A_y) se construye mediante la ecuación (7.5.2) y el espectro resultante se puede graficar en dos formatos: escalas logarítmicas (figura 7.11.5) y escalas lineales (figura 7.11.6). El espectro de diseño de deformación, determinado a partir de los datos A_y de la figura 7.11.5 y la ecuación (7.6.3), se presenta en la figura 7.11.7. También se muestra u_m contra T_n para $\mu = 1$, 1.5, 2, 4, 6 y 8. La curva $\mu = 1$ también proporciona la deformación u_o del sistema si éste permaneciera elástico. Por lo tanto, la relación de u_m/u_o puede determinarse a partir de la figura 7.11.7; ésta se grafica contra T_n en la figura 7.11.8. En un amplio intervalo de periodos, $T_n > T_c$, la deformación máxima de un sistema inelástico es independiente de μ e igual a la deformación máxima del sistema elástico (o lineal correspondiente). Para un T_n más corto, $T_n < T_c$, la deformación máxima de un sistema inelástico excede la de un sistema elástico; para una μ fija, la relación u_m/u_o aumenta a medida que disminuye T_n, y para un T_n fijo, la relación u_m/u_o aumenta con μ.

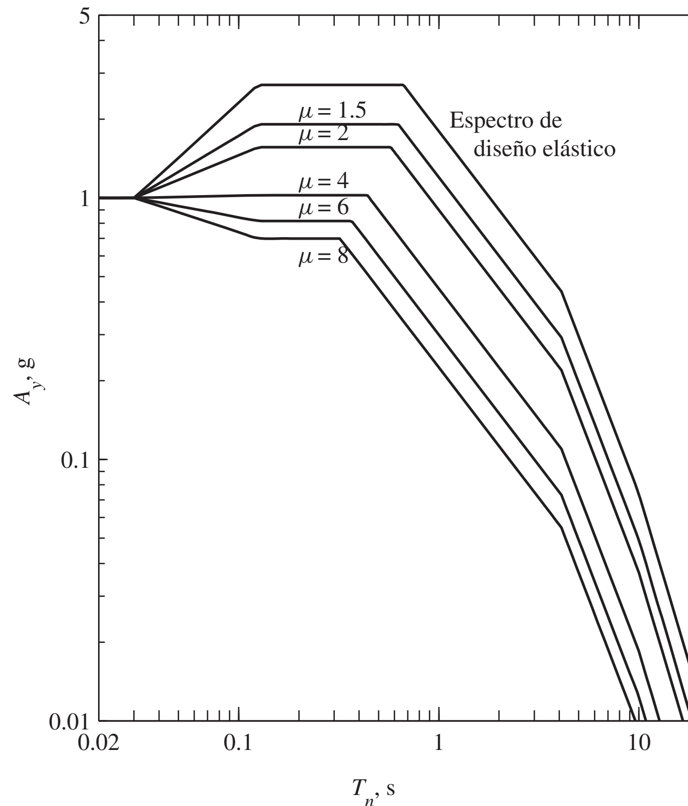


Figura 7.11.5 Espectro de diseño (de pseudo-aceleración) inelástico (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1\text{g}$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s, y $u_{go} = 36$ pulg; $\mu = 1.5$, 2, 4, 6 y 8; $\zeta = 5\%$.

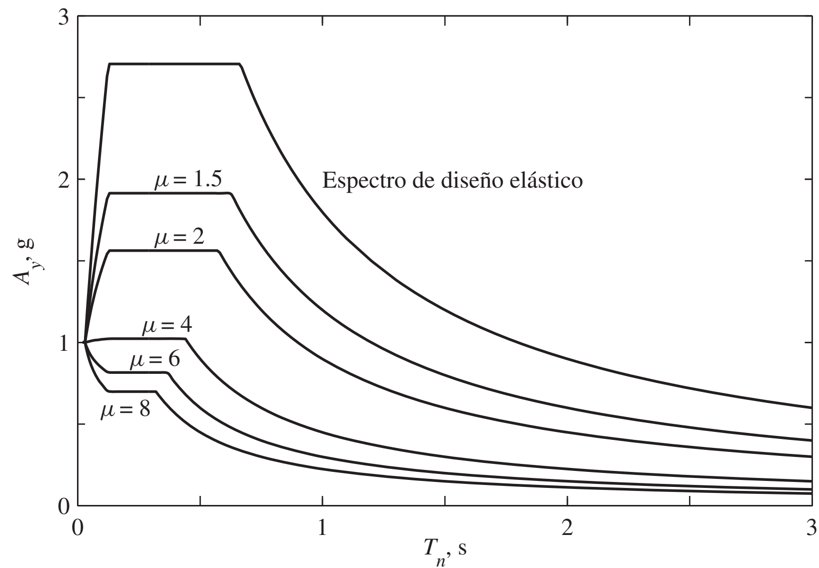


Figura 7.11.6 Espectro de diseño (de pseudo-aceleración) inelástico (percentil 84.1) para movimientos de suelo con $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\mu = 1.5$, 2, 4, 6 y 8; $\zeta = 5\%$.

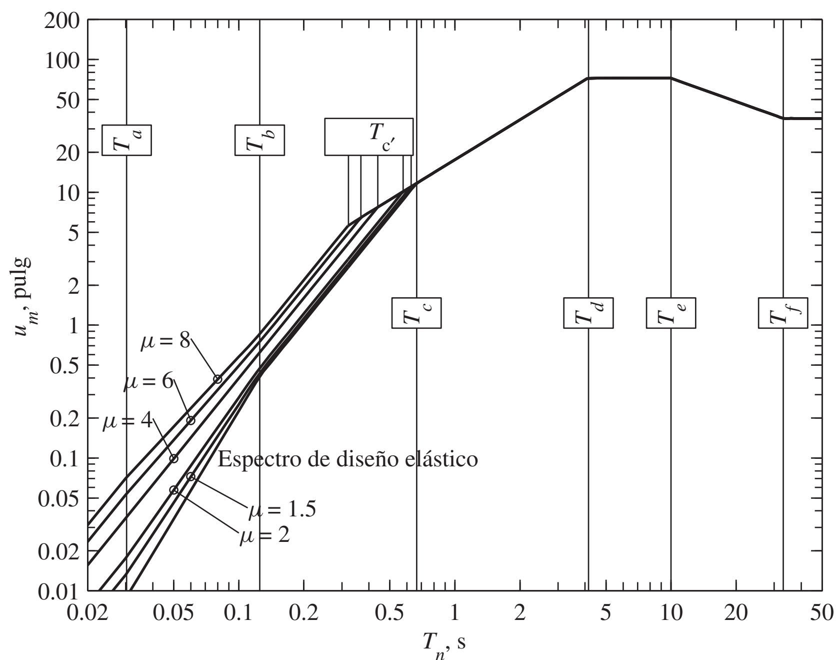


Figura 7.11.7 Espectro de diseño (de deformación) inelástico (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1$g, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s, y $u_{go} = 36$ pulg; $\mu = 1.5$, 2, 4, 6 y 8; $\zeta = 5\%$.

Los investigadores han desarrollado resultados para los sistemas de 1GDL con diferentes relaciones inelásticas de fuerza-deformación (vea la sección 7.1.1), similares a los datos presentados en este capítulo para los sistemas elastoplásticos. En particular, han demostrado que el espectro de diseño para los sistemas elastoplásticos suele ser conservador y, por lo tanto, puede usarse para los sistemas bilineales y para los sistemas con degradación de rigidez.

7.11.3 Ecuaciones que relacionan a f_y con f_o y a u_m con u_o

Si se usan las ecuaciones (7.2.2), (7.2.4) y (7.11.1), es posible desarrollar relaciones simples entre las deformaciones máximas u_o y u_m, y entre las resistencias a la cedencia requeridas f_o y f_y para los sistemas elásticos y elastoplásticos; estas relaciones dependen de las regiones espectrales (figura 7.11.2):

1. En la región de periodos $T_n < T_a$, $R_y = 1$, lo que implica que

$$f_y = f_o \qquad u_m = \mu u_o \tag{7.11.2}$$

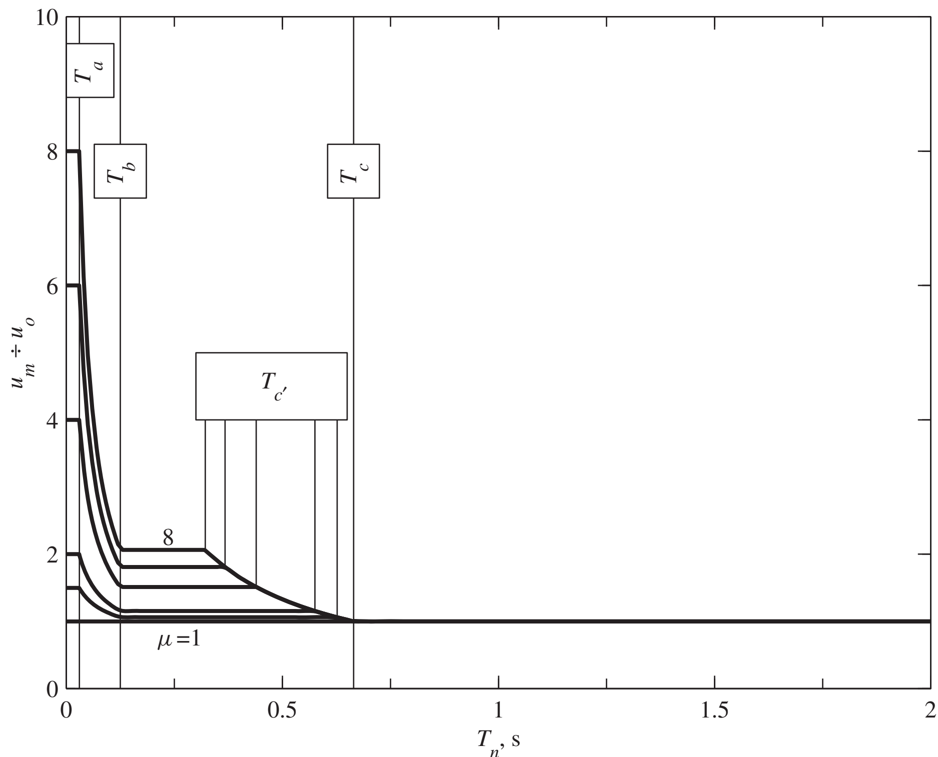


Figura 7.11.8 Relación u_m/u_o de las deformaciones máximas u_m y u_o del sistema elastoplástico y del sistema lineal correspondiente graficada contra T_n; $\mu = 1$, 1.5, 2, 4, 6 y 8.

Así, la resistencia requerida para el sistema elastoplástico es la misma para toda μ, igual a la resistencia mínima necesaria para que el sistema permanezca elástico (figura 7.11.5). La deformación máxima del sistema elastoplástico es μ veces la del sistema elástico (figura 7.11.8). Si $f_y < f_o$ (es decir, si se proporciona menos resistencia), la demanda de ductilidad sería grande (figura 7.4.5).

2. Para la región de periodos $T_b < T_n < T_{c'}$, $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$, lo que implica que

$$f_y = \frac{f_o}{\sqrt{2\mu - 1}} \qquad u_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} u_o \tag{7.11.3†}$$

Por lo tanto, la resistencia requerida para el sistema elastoplástico es la resistencia mínima necesaria para que el sistema permanezca elástico dividida entre $\sqrt{2\mu - 1} = 1,\ 2.65$ y 3.87 para $\mu = 1$, 4 y 8, respectivamente. La deformación máxima del sistema elastoplástico es mayor que la del sistema elástico en un factor de $\mu/\sqrt{2\mu - 1} = 1,\ 1.51$ y 2.06 para $\mu = 1$, 4 y 8, respectivamente.

3. Para el intervalo de periodos $T_n > T_c$, $R_y = \mu$, lo que implica que

$$f_y = \frac{f_o}{\mu} \qquad u_m = u_o \tag{7.11.4}$$

Así, la resistencia requerida para el sistema elastoplástico es la demanda de resistencia para el sistema elástico dividida entre μ (figura 7.11.6). Las deformaciones máximas de los dos sistemas son iguales (figura 7.11.8).

Es posible desarrollar relaciones similares entre f_y y f_o, y entre u_m y u_o a fin de proporcionar transiciones entre las relaciones deducidas con anterioridad para las tres regiones espectrales.

7.12 APLICACIONES DEL ESPECTRO DE DISEÑO

El espectro de diseño inelástico, desarrollado en la sección anterior, proporciona una base conveniente para abordar las preguntas que plantea el diseño de nuevas estructuras y la evaluación de la seguridad de las estructuras existentes. En esta sección se analizan tres de estas aplicaciones.

7.12.1 Diseño estructural para la ductilidad permisible

Primero, considere un sistema de 1GDL que debe diseñarse para una *ductilidad permisible* μ, lo cual se ha decidido sobre la base de la deformación permisible y la capacidad de ductilidad que pueden alcanzar los materiales y del detallado del diseño seleccionados. Se desea determinar la resistencia a la cedencia y la deformación de diseño para el sistema. El valor de A_y/g correspondiente a la μ permisible y a los valores conocidos de T_n y ζ, se leen a partir del espectro de las figuras 7.11.5 o 7.11.6. La resistencia a la cedencia mínima necesaria para limitar la demanda de ductilidad a la ductilidad permisible está dada por la ecuación (7.5.3), que se repite aquí por conveniencia:

† Aunque no hay bases razonables para hacerlo, la ecuación (7.11.3a) para $T_b < T_n < T_{c'}$ puede deducirse al igualar las áreas bajo las relaciones de fuerza-deformación para los sistemas elásticos y elastoplásticos (figura 7.1.4).

$$f_y = \frac{A_y}{g} w \tag{7.12.1}$$

La deformación máxima está dada por la ecuación (7.6.3), que puede expresarse en términos de A, el espectro de diseño de pseudo-aceleración para sistemas elásticos. Con este propósito se utiliza la relación

$$R_y = \frac{A}{A_y} \tag{7.12.2}$$

que proviene de la sustitución de las ecuaciones (7.5.4) y (7.12.1) en la ecuación (7.2.2). Al unir las ecuaciones (7.6.3) y (7.12.2), resulta

$$u_m = \mu \frac{1}{R_y} \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A \tag{7.12.3}$$

La deformación del sistema inelástico puede determinarse convenientemente mediante la ecuación (7.6.3) usando el espectro de diseño inelástico, o por medio de la ecuación (7.12.3) empleando el espectro de diseño elástico. La relación R_y-μ-T_n necesaria en el último caso está disponible en la ecuación (7.11.1) y en la figura 7.11.2.

Ejemplo 7.1

Considere un marco de un solo nivel con peso concentrado w y un periodo natural de vibración en el intervalo elástico lineal, $T_n = 0.25$ s. Determine la deformación y la fuerza laterales (en términos de w) para las que debe diseñarse el marco (1) si se requiere que el sistema permanezca elástico, (2) si el factor de ductilidad permisible es de 4, y (3) si el factor de ductilidad permisible es de 8. Suponga que $\zeta = 5\%$ y un comportamiento de fuerza-deformación elastoplástico. El sismo de diseño tiene una aceleración máxima de 0.5g y su espectro de diseño elástico está dado por la figura 6.9.5 multiplicada por 0.5.

Solución Para un sistema con $T_n = 0.25$ s, $A = (2.71\text{g})0.5 = 1.355\text{g}$ a partir de la figura 6.9.5 y $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$ de la ecuación (7.11.1) o de la figura 7.11.2. Entonces, la ecuación (7.12.2) da $A_y = 1.355\text{g}/\sqrt{2\mu - 1}$ y la ecuación (7.12.1) conduce a

$$f_y = \frac{1.355w}{\sqrt{2\mu - 1}} \tag{a}$$

Al sustituir los datos conocidos en la ecuación (7.12.3) resulta

$$u_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} \left(\frac{0.25}{2\pi}\right)^2 1.355\text{g} = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} 0.828 \tag{b}$$

Observe que las ecuaciones (a) y (b) son equivalentes a la ecuación (7.11.3). Si se sustituye $\mu = 1$, 4 y 8 en las ecuaciones (a) y (b) se obtienen los siguientes resultados.

μ	f_y/w	u_m (pulg)
1	1.355	0.828
4	0.512	1.252
8	0.350	1.710

7.12.2 Evaluación de una estructura existente

Considere el problema de estimar la deformación de una estructura existente en la cual debe evaluarse su desempeño. Para ilustrar la aplicación del espectro de diseño elástico en la solución de este problema, se considera la estructura más sencilla posible, un sistema de 1GDL. La masa m, la rigidez inicial k en pequeños desplazamientos y la resistencia a la cedencia f_y de la estructura se determinan a partir de sus características: dimensiones, tamaño de los elementos y el detallado de diseño (refuerzos en estructuras de concreto reforzado, conexiones de las estructuras de acero, etcétera). El periodo de pequeñas oscilaciones T_n se calcula a partir de k y m conocidas, y el coeficiente de amortiguamiento ζ se estima por el método presentado en el capítulo 11.

Para un sistema con T_n y ζ conocidos, A se lee a partir del espectro de diseño elástico. Con base en el valor conocido de f_y, A_y se obtiene al invertir la ecuación (7.12.1):

$$A_y = \frac{f_y}{w/\mathrm{g}} \tag{7.12.4}$$

Con A y A_y conocidas, R_y se calcula a partir de la ecuación (7.12.2). De acuerdo con estas R_y y T_n determinadas anteriormente, μ se calcula a partir de la ecuación (7.11.2) o de la figura 7.11.2. Al sustituir A, T_n, R_y y μ en la ecuación (7.12.3), se obtiene una estimación de la deformación máxima u_m.

Ejemplo 7.2

Considere un marco de un solo nivel con un peso concentrado w, $T_n = 0.25$ s y $f_y = 0.512w$. Suponga que $\zeta = 5\%$ y que el comportamiento de fuerza-deformación es elastoplástico. Determine la deformación lateral para el sismo de diseño definido en el ejemplo 7.1.

Solución Para un sistema con $T_n = 0.25$ s, $A = (2.71\mathrm{g})0.5 = 1.355\mathrm{g}$ con base en la figura 6.9.5. La ecuación (7.12.4) da

$$\frac{A_y}{g} = \frac{f_y}{w} = \frac{0.512w}{w} = 0.512$$

y la ecuación (7.12.2) conduce a

$$R_y = \frac{A}{A_y} = \frac{1.355\mathrm{g}}{0.512\mathrm{g}} = 2.646$$

Si se conoce a R_y, μ puede calcularse a partir de la ecuación (7.11.1) para $T_n = 0.25$ s:

$$\mu = \frac{1 + R_y^2}{2} = \frac{1 + (2.646)^2}{2} = 4$$

El u_m deseado se calcula sustituyendo estos valores de μ y R_y en la ecuación (7.12.3):

$$u_m = 4\frac{1}{2.646}\left(\frac{0.25}{2\pi}\right)^2 1.355\mathrm{g} = 1.252 \text{ pulg}$$

7.12.3 Diseño de estructuras basado en el desplazamiento

El espectro de diseño inelástico también es útil para el diseño directo de estructuras basado en el desplazamiento. El objetivo es determinar la rigidez inicial y la resistencia a la cedencia de la estructura necesarias para limitar la deformación a un valor aceptable. Es posible implementar un procedimiento de diseño, aplicado a un sistema elastoplástico de 1GDL (figura 7.12.1), como una secuencia de los pasos siguientes:

1. Estime la deformación de cedencia u_y para el sistema.

2. Determine la rotación plástica θ_p aceptable de la articulación en la base.

3. Determine el desplazamiento de diseño u_m a partir de

$$u_m = u_y + h\theta_p \tag{7.12.5}$$

y el factor de ductilidad de diseño con base en la ecuación (7.2.3).

4. Introduzca el espectro de diseño de deformación (figura 7.11.7) con u_m y μ conocidas para leer T_n. Determine la rigidez elástica inicial

$$k = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m \tag{7.12.6}$$

5. Determine la resistencia a la cedencia requerida

$$f_y = ku_y \tag{7.12.7}$$

6. Seleccione el tamaño de los elementos y el detallado (refuerzos en las estructuras de concreto reforzado, conexiones en las estructuras de acero, etcétera) para proporcionar la resistencia determinada a partir de la ecuación (7.12.7). Para el diseño resultante de la estructura, calcule su rigidez elástica inicial k y la deformación de cedencia $u_y = f_y/k$.

7. Repita los pasos del 2 al 6 hasta encontrar una solución satisfactoria.

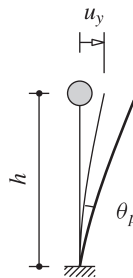


Figura 7.12.1 Sistema de 1GDL idealizado.

Ejemplo 7.3

Considere un viaducto largo de concreto reforzado que es parte de una autopista. El peso total de la superestructura, 13 kips/pie, se sostiene sobre apoyos idénticos de 30 pies de altura, espa-

ciados de manera uniforme a 130 pies. Cada apoyo consiste en una sola columna circular de 60 pulg de diámetro (figura E7.3a). Utilice el procedimiento de diseño basado en desplazamientos para diseñar el reforzamiento longitudinal de la columna para el sismo de diseño definido en el ejemplo 7.1.

Solución Para el movimiento del terreno transversal, el viaducto puede idealizarse como un sistema de 1GDL (figura E7.3b); su rigidez lateral se calcula a partir de

$$k = \frac{3EI}{h^3} \tag{a}$$

donde E es el módulo de elasticidad del concreto, I es el segundo momento de área efectivo de la sección transversal de concreto reforzado, y h es la longitud de la columna. Según las disposiciones de diseño ACI 318-95 del American Concrete Institute, la EI efectiva para las columnas circulares sometidas a una fuerza lateral está dada por

$$EI = E_c I_g \left(0.2 + 2\rho_t \gamma^2 \frac{E_s}{E_c} \right) \tag{b}$$

donde I_g es el segundo momento de área de la sección transversal bruta, E_c y E_s son los módulos de elasticidad del concreto y el acero de refuerzo, respectivamente; ρ_t es la cuantía de refuerzo longitudinal y γ es la relación de las distancias desde el centro de la columna hasta el centro de las barras de refuerzo exteriores y el borde de la columna.

Se seleccionan las siguientes propiedades del sistema: resistencia del concreto = 4 ksi, resistencia del acero = 60 ksi y $\gamma = 0.9$. La masa del sistema de 1GDL idealizado es la masa tributaria para un apoyo (es decir, la masa con longitud de 130 pies de la superestructura):

$$m = \frac{w}{g} = \frac{1690}{386} = 4.378 \text{ kip-s}^2\text{/pulg}$$

El procedimiento paso a paso que se describió con anterioridad en esta sección, ahora se implementa de la manera siguiente:

1. Una estimación inicial de $u_y = 1.80$ pulg.

2. La rotación plástica aceptable en la base de la columna es $\theta_p = 0.02$ rad.

3. El desplazamiento de diseño dado por la ecuación (7.12.5) es

$$u_m = u_y + h\theta_p = 1.80 + 360 \times 0.02 = 9.00 \text{ pulg}$$

y el factor de ductilidad de diseño es

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} = \frac{9.00}{1.80} = 5$$

4. El espectro de diseño de deformación para los sistemas inelásticos (figura 7.11.7) se muestra en la figura E7.3c para $\mu = 5$. En correspondencia con $u_m = 9.00$ pulg, este espectro da $T_n = 1.024$ s y k se calcula mediante la ecuación (7.12.6):

$$k = \left(\frac{2\pi}{1.024} \right)^2 4.378 = 164.9 \text{ kips/pulg}$$

5. La resistencia a la cedencia está dada por la ecuación (7.12.7):

$$f_y = ku_y = 164.9 \times 1.80 = 296.9 \text{ kips}$$

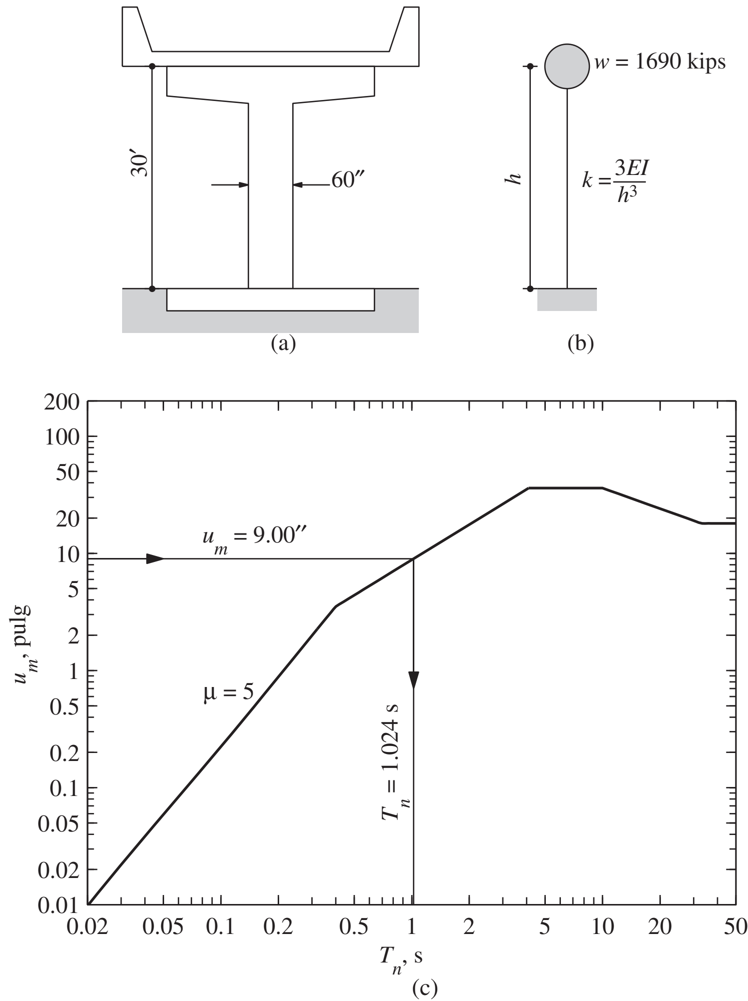


Figura E7.3

6. Si se usa la ACI 318-95, entonces la columna circular se diseña para la fuerza axial debida a la carga muerta de 1690 kips por la superestructura más 127 kips del peso propio de la columna y el momento flector debido a la fuerza lateral $= f_y$: $M = hf_y = 106{,}884$ kip-pulg. Para el diseño de columna resultante, $\rho_t = 3.6\%$, la resistencia a la flexión $= 120{,}528$ kip-pulg y la fuerza lateral $= 334.8$ kips. Para $\rho_t = 3.6\%$, la ecuación (b) da $EI = 1.57 \times 10^9$ kip-pulg^2; utilizando este valor de EI, la ecuación (a) da $k = 101.1$ kips/pulg. La deformación de cedencia es $u_y = f_y/k = 334.8/101.1 = 3.31$ pulg.

7. Como la deformación de cedencia calculada en el paso 6 difiere en gran medida de la estimación inicial de $u_y = 1.80$ pulg, es necesaria la iteración. Los resultados de tales iteraciones se resumen en la tabla E7.3.

TABLA E7.3 PROCEDIMIENTO ITERATIVO PARA EL DISEÑO DIRECTO BASADO EN EL DESPLAZAMIENTO

Iteración	u_y (pulg)	u_m (pulg)	μ	T_n (s)	k (kips/pulg)	f_y (kips)	ρ_t (%)	f_y de diseño (kips)	k de diseño (kips/pulg)	u_y (pulg)
1	1.80	9.00	5.00	1.024	164.9	269.9	3.60	334.8	101.1	3.31
2	3.31	10.5	3.17	1.196	120.9	400.5	5.50	442.8	138.8	3.19
3	3.19	10.4	3.26	1.182	123.8	394.8	5.40	435.0	136.8	3.18
4	3.18	10.4	3.26	1.181	124.0	394.3	5.40	435.0	136.8	3.18

El procedimiento converge después de cuatro iteraciones, dando un diseño de columna con $\rho_t = 5.4\%$. Esta columna tiene una rigidez inicial $k = 136.8$ kips/pulg y una resistencia a la cedencia lateral $f_y = 435.0$ kips.

7.13 COMPARACIÓN DE LOS ESPECTROS DE RESPUESTA Y DE DISEÑO

En esta sección, el espectro de diseño presentado en la sección 7.11 se compara con el espectro de respuesta para los sistemas elastoplásticos. Tal comparación para los sistemas elásticos se presenta en la sección 6.10, y los datos presentados en las figuras 6.10.1 y 6.10.2 se reproducen en las figuras 7.13.1 y 7.13.2. Ahora también se incluyen (1) el espectro de

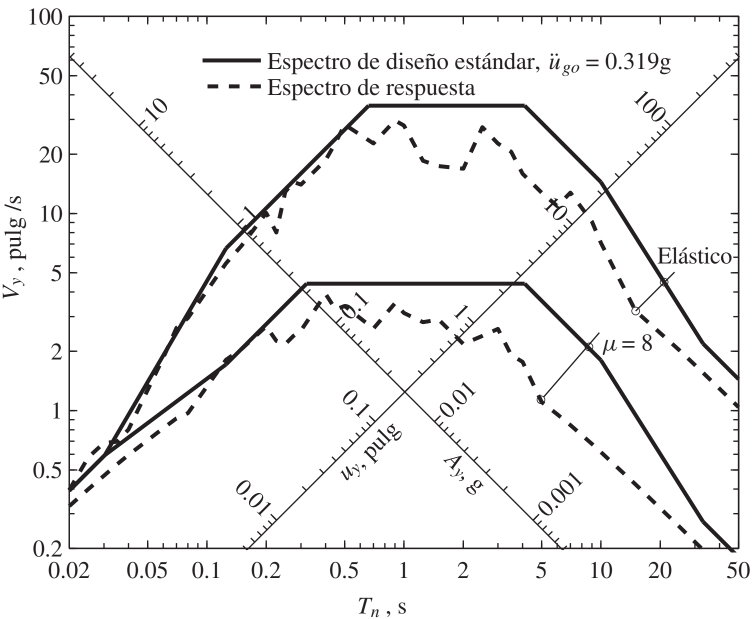


Figura 7.13.1 Comparación del espectro de diseño estándar ($\ddot{u}_{go}$ = 0.319g) con el espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro; μ = 1 y 8; ζ = 5%.

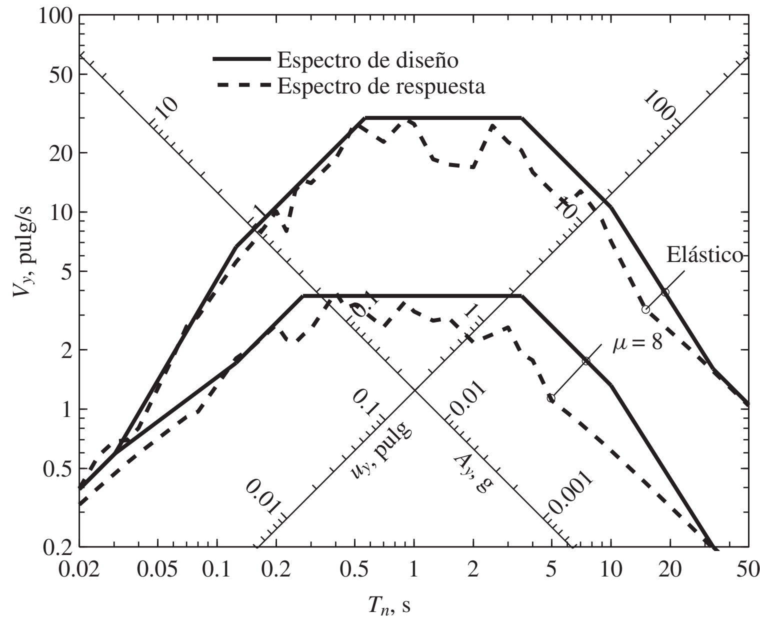


Figura 7.13.2 Comparación del espectro de diseño ($\ddot{u}_{go} = 0.319$g, $\dot{u}_{go} = 13.04$ pulg/s, $u_{go} =$ 8.40 pulg) con el espectro de respuesta para el movimiento del terreno de El Centro; $\mu = 1$ y 8; $\zeta = 5\%$.

diseño inelástico para $\mu = 8$ determinado a partir del espectro de diseño elástico, usando el procedimiento descrito en la sección 7.11 y (2) el espectro real del movimiento del terreno de El Centro para $\mu = 8$, que se reproduce en la figura 7.5.3.

Observe que las diferencias entre los espectros de diseño y de respuesta para los sistemas elastoplásticos son mayores que las existentes entre los dos espectros de los sistemas elásticos. En el último caso, las razones detrás de estas diferencias se analizaron en la sección 6.10. En los dos espectros de los sistemas elastoplásticos surgen discrepancias adicionales debido a que la variación irregular de $\overline{f}_y$ con T_n (figura 7.7.1) se aproximó mediante funciones simples (figura 7.11.1). Los errores introducidos por esta simplificación son los responsables de las discrepancias adicionales en las regiones del espectro sensibles a la velocidad y al desplazamiento.

LECTURAS ADICIONALES

Grigorian, C. E. y Popov, E. P., "Energy Dissipation with Slotted Bolted Connections", *reporte No. UCB/EERC-94/02*, Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California en Berkeley, febrero de 1994.

Mohraz, B. y Elghadamsi, F. E., “Earthquake Ground Motion and Response Spectra”, capítulo 2 en *The Seismic Design Handbook* (ed. F. Naeim), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1989.

Newmark, N. M. y Hall, W. J., *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 29-37.

Newmark, N. M. y Rosenblueth, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, capítulo 11.

“Passive Energy Dissipation”, *Earthquake Spectra*, **9**, 1993, pp. 319-636.

Riddell, R. y Newmark, N. M., “Statistical Analysis of the Response of Nonlinear Systems Subjected to Earthquakes”, *Structural Research Series No. 468*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, agosto de 1979.

Soong, T. T. y Dargush, G. F., *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, Wiley, Chichester, U.K., 1997, capítulos 3 y 4.

Veletsos, A. S., “Maximum Deformation of Certain Nonlinear Systems”, *Proceedings of the 4th World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile, vol. 1, 1969, pp. 155-170.

Veletsos, A. S. y Newmark, N. M., “Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions”, *Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, Japón, vol. 2, 1960, pp. 895-912.

Veletsos, A. S. y Newmark, N. M., “Response Spectra for Single-Degree-of-Freedom Elastic and Inelastic Systems”, *report No. RTD-TDR-63-3096*, vol. III, Air Force Weapons Laboratory, Albuquerque, N. M., junio de 1964.

Veletsos, A. S., Newmark, N. M., y Chelapati, C. V., “Deformation Spectra for Elastic and Elastoplastic Systems Subjected to Ground Shock and Earthquake Motion”, *Proceedings of the 3rd World Conference on Earthquake Engineering*, Nueva Zelanda, vol. II, 1965, pp. 663-682.

PROBLEMAS

7.1 La relación fuerza-deformación lateral del sistema del ejemplo 6.3 se idealiza como elástoplástica perfecta. En el intervalo de vibración elástico lineal este sistema de 1GDL tiene las siguientes propiedades: rigidez lateral $k = 2.112$ kips/pulg y $\zeta = 2\%$. La resistencia a la cedencia $f_y = 5.55$ kips y el peso integrado $w = 5200$ lb.

(a) Determine el periodo natural y el coeficiente de amortiguamiento de este sistema a amplitudes menores que u_y.
(b) ¿Estas propiedades pueden definirse para movimientos con mayores amplitudes? Explique su respuesta.
(c) Determine el periodo natural y el coeficiente de amortiguamiento del sistema lineal correspondiente.
(d) Determine $\overline{f}_y$ y R_y para este sistema sometido al movimiento del terreno de El Centro amplificado por un factor de 3.

7.2 Utilice el método de la diferencia central para determinar la respuesta de deformación $u(t)$ con $0 < t < 10$ s, de un sistema elastoplástico de 1GDL no amortiguado con $T_n = 0.5$ s y $\overline{f}_y = 0.125$ para el movimiento del terreno de El Centro. Reproduzca la figura 7.4.2 que muestra la relación fuerza-deformación en el inciso (d) para toda la duración.

*Indica que la solución del problema requiere una computadora.

***7.3** Para un sistema con $T_n = 0.5$ s, $\zeta = 5\%$ y el movimiento del terreno de El Centro, verifique la siguiente afirmación: "la duplicación de la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ produce la misma respuesta $\mu(t)$ que la reducción a la mitad de la resistencia a la cedencia". Utilice las respuestas de deformación-tiempo disponibles en la figura 7.4.3a-c y genere resultados similares para un sistema y una excitación adicionales, según sea necesario.

***7.4** Para un sistema con $T_n = 0.5$ s, $\zeta = 5\%$ y el movimiento del terreno de El Centro, demuestre que si $\overline{f}_y = 0.25$, el factor de ductilidad μ no se ve afectado por un escalamiento del movimiento del terreno.

7.5 A partir de los resultados de respuesta presentados en la figura 7.4.3, calcule las demandas de ductilidad para $\bar{f}_y = 0.5$, 0.25 y 0.125.

7.6 Para el sismo de diseño de un sitio, los valores máximos de aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno se estiman como: $\ddot{u}_{go} = 0.5$g, $\dot{u}_{go} = 24$ pulg/s y $u_{go} = 18$ pulg. Construya el espectro de diseño del percentil 84.1 para los sistemas con un coeficiente de amortiguamiento de 2% y una ductilidad permisible de 3. Grafique al mismo tiempo los espectros elástico e inelástico usando **(a)** papel tetralogarítmico, **(b)** papel log-log que muestre la pseudo-aceleración en función del periodo de vibración natural, T_n y **(c)** papel lineal-lineal que muestre la pseudo-aceleración en función de T_n entre 0 y 5 s. Determine las ecuaciones $A(T_n)$ para cada rama del espectro inelástico y los valores de periodo en las intersecciones de las ramas.

7.7 Considere una torre vertical en voladizo que soporta un peso concentrado w en su parte superior; suponga que la masa de la torre es insignificante, que $\zeta = 5\%$ y que la relación fuerza-deformación es elastoplástica. El sismo de diseño tiene una aceleración máxima de 0.5g y el espectro de diseño elástico está dado mediante la figura 6.9.5 multiplicada por 0.5. Para tres valores diferentes del periodo natural de vibración en el intervalo elástico lineal, $T_n = 0.02$, 0.2 y 2 s, determine la deformación y la fuerza laterales (en términos de w) para las cuales debe diseñarse la torre (i) si se requiere que el sistema permanezca elástico y (ii) si el factor de ductilidad permisible es de 2, 4 u 8. Comente de qué manera se ven afectadas la deformación y la fuerza de diseño por la cedencia estructural.

7.8 Considere una torre vertical en voladizo con un peso concentrado w, $T_n = 2$ s y $f_y = 0.112w$. Suponga que $\zeta = 5\%$ y que la fuerza-deformación se comporta de modo elastoplástico. Determine la deformación lateral para el espectro de diseño elástico de la figura 6.9.5, escalado hasta una aceleración máxima del terreno de 0.5g.

7.9 Resuelva el ejemplo 7.3 para una estructura idéntica, excepto por un cambio: los apoyos tienen 13 pies de altura.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

8

Sistemas generalizados de un solo grado de libertad

AVANCE

Hasta ahora en este libro se han considerado los sistemas de un solo grado de libertad que involucran masa concentrada en un solo punto (figuras 1.2.1 y 1.6.1) o la conversión de una masa rígida distribuida (figura 1.1.3a), que es exactamente equivalente a una masa concentrada en un solo punto. Una vez que se determina la rigidez del sistema, la ecuación de movimiento se formula con facilidad y los procedimientos para resolverla son los que se incluyen en los capítulos 2 a 7.

En este capítulo se desarrolla el análisis de sistemas más complejos que se tratan como sistemas de 1GDL y que se denominan sistemas generalizados de 1GDL. El análisis proporciona resultados exactos para ensambles de cuerpos rígidos apoyados de tal modo que pueden sufrir una deflexión de una sola forma, pero sólo da resultados aproximados para los sistemas con masa y flexibilidad distribuida. En este último caso, la frecuencia natural aproximada es dependiente de la deflexión supuesta. La misma frecuencia también puede estimarse por el método clásico de Rayleigh, a partir del principio de conservación de la energía; asimismo, este método proporciona información sobre el error cometido en la estimación de la frecuencia natural.

8.1 SISTEMAS GENERALIZADOS DE 1GDL

Por ejemplo, considere el sistema de la figura 8.1.1a que consiste en una barra rígida, sin masa y soportada mediante una articulación en el extremo izquierdo; la barra tiene dos masas concentradas, un resorte y un amortiguador unidos a ella; además, está sometida a una fuerza externa variable en el tiempo $p(t)$. En vista de que la barra es rígida, sus deflexiones pueden considerarse mediante un solo *desplazamiento generalizado* $z(t)$ a través de una

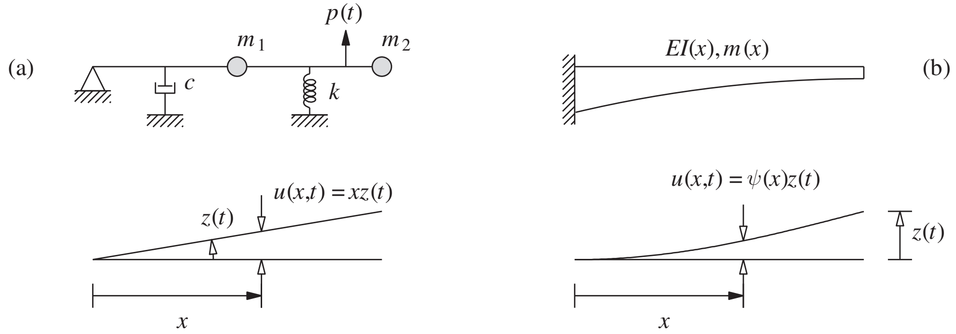


Figura 8.1.1 Sistemas generalizados de 1GDL.

función de forma $\psi(x)$, de la manera mostrada, y puede expresarse como

$$u(x, t) = \psi(x)z(t) \tag{8.1.1}$$

Se tiene cierta libertad al elegir las coordenadas de desplazamiento y, de manera muy arbitraria, se optó por elegir la rotación z de la barra. Para este sistema, $\psi(x) = x$ se conoce con exactitud a partir de la configuración del sistema y de cómo está limitado por un soporte articulado. Éste es un sistema de 1GDL, pero es difícil reemplazar las dos masas por una masa equivalente agrupada en un solo punto.

A continuación considere, por ejemplo, el sistema de la figura 8.1.1b que consiste en una viga en voladizo con masa distribuida. Este sistema puede sufrir una deflexión en una infinita variedad de formas y, para su análisis exacto, debe tratarse como un sistema con grados infinitos de libertad. Tal análisis exacto, desarrollado en el capítulo 16, muestra que el sistema, a diferencia de un sistema de 1GDL, posee un número infinito de frecuencias de vibración naturales, cada una asociada con un modo natural de vibración. Sin embargo, es posible obtener resultados aproximados que son precisos en un grado útil para la más baja de las frecuencias naturales (también conocida como *fundamental*); esto se logra al restringir las deflexiones de la viga a una sola función de forma $\psi(x)$ que se aproxima al modo de vibración fundamental. Las deflexiones de la viga están dadas por la ecuaciones (8.1.1), donde la coordenada generalizada $z(t)$ es la deflexión de la viga en voladizo en una ubicación seleccionada (por ejemplo, el extremo libre) como se muestra en la figura 8.1.1b.

Los dos sistemas de la figura 8.1.1 se llaman *sistemas generalizados de 1GDL* porque, en cada caso, los desplazamientos en todas las ubicaciones se definen en términos de la coordenada generalizada $z(t)$ a través de la función de forma $\psi(x)$. Se demostrará que la ecuación de movimiento de un sistema generalizado de 1GDL tiene la forma

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{c}\dot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t) \tag{8.1.2}$$

donde $\tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{k}$ y $\tilde{p}(t)$ se definen como la *masa*, el *amortiguamiento*, la *rigidez* y la *fuerza excitadora generalizados* del sistema; estas propiedades están asociadas con el desplazamiento generalizado $z(t)$ que se seleccionó. La ecuación (8.1.2) tiene la misma forma que la ecuación estándar formulada en el capítulo 1 para un sistema de 1GDL con una sola masa concentrada. Así, los procedimientos de análisis y los resultados de respuesta presentados en los capítulos 2 al 7 pueden adaptarse con facilidad para determinar la respuesta $z(t)$ de los sistemas generalizados de 1GDL. Con $z(t)$ conocida, los desplazamientos en todos las ubicaciones del

sistema se establecen a partir de la ecuación (8.1.1). Este procedimiento de análisis conduce a resultados exactos para el sistema de la figura 8.1.1a, porque la función de forma $\psi(x)$ se pudo determinar con exactitud; por otra parte, proporciona sólo resultados aproximados para el sistema de la figura 8.1.1b porque éstos se basan en una función de forma supuesta.

El paso clave en el nuevo análisis descrito anteriormente es la evaluación de las propiedades generalizadas $\tilde{m}$, $\tilde{c}$, $\tilde{k}$ y $\tilde{p}(t)$ para un sistema dado. Se han desarrollado procedimientos a fin de determinar estas propiedades para (1) los ensambles de cuerpos rígidos que permitan la evaluación exacta de la forma modificada (sección 8.2) y (2) los sistemas de varios grados de libertad con masa distribuida o varias masas concentradas, que requieren una función de forma supuesta para satisfacer las condiciones de frontera del desplazamiento (secciones 8.3 y 8.4).

8.2 ENSAMBLES DE CUERPOS RÍGIDOS

En esta sección se formula la ecuación de movimiento para un ensamble de cuerpos rígidos con masa distribuida, soportado por resortes y amortiguadores puntuales, y sometido a diferentes fuerzas variables en el tiempo. En la formulación de la ecuación de movimiento para tales sistemas generalizados de 1GDL la aplicación de la Segunda ley del movimiento de Newton puede ser complicada, por lo que es más fácil utilizar el principio de D'Alembert e incluir las fuerzas de inercia en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas de inercia distribuidas para un cuerpo rígido con masa distribuida pueden expresarse en términos de las fuerzas de inercia resultantes en el centro de gravedad, utilizando la masa total y el momento de inercia del cuerpo. En el apéndice 8 se presentan estas propiedades para las placas rígidas de tres configuraciones.

Ejemplo 8.1

El sistema que se muestra en la figura E8.1a consiste en una barra rígida soportada mediante un punto de apoyo en O, con un resorte y un amortiguador conectados y sometida a la fuerza $p(t)$. La masa m_1 de la parte OB de la barra se distribuye de manera uniforme a lo largo de su longitud. Las porciones OA y BC de la barra no tienen masa, pero en el punto medio de BC se añade una placa circular uniforme de masa m_2. Seleccione una rotación en sentido antihorario alrededor del punto de apoyo como el desplazamiento generalizado y tome en cuenta los desplazamientos pequeños para formular la ecuación de movimiento del sistema generalizado de 1GDL, determine la frecuencia natural de vibración y la fracción de amortiguamiento, y evalúe la respuesta dinámica del sistema sin amortiguamiento sometido a una fuerza p_o aplicada súbitamente. ¿Cómo cambiaría la ecuación de movimiento con una fuerza axial en la barra horizontal?, ¿cuál es la carga de pandeo?

Solución

1. *Determine la función de forma.* La barra en forma de L gira alrededor del punto de apoyo en O. Si se suponen deflexiones pequeñas, la forma modificada es como se muestra en la figura E8.1b.

2. *Dibuje el diagrama de cuerpo libre y escriba la ecuación de equilibrio*. En la figura E8.1c se muestran las fuerzas en el resorte y el amortiguador asociadas con los desplazamientos de la figura E8.1b, junto con las fuerzas de inercia. Si se iguala a cero la suma de los momentos de todas las fuerzas alrededor de O, resulta

$$I_1\ddot{\theta} + \left(m_1\frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2} + I_2\ddot{\theta} + (m_2L\ddot{\theta})L + \left(m_2\frac{L}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{4} + \left(c\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\frac{L}{2} + \left(k\frac{3L}{4}\theta\right)\frac{3L}{4} = p(t)\frac{L}{2}$$

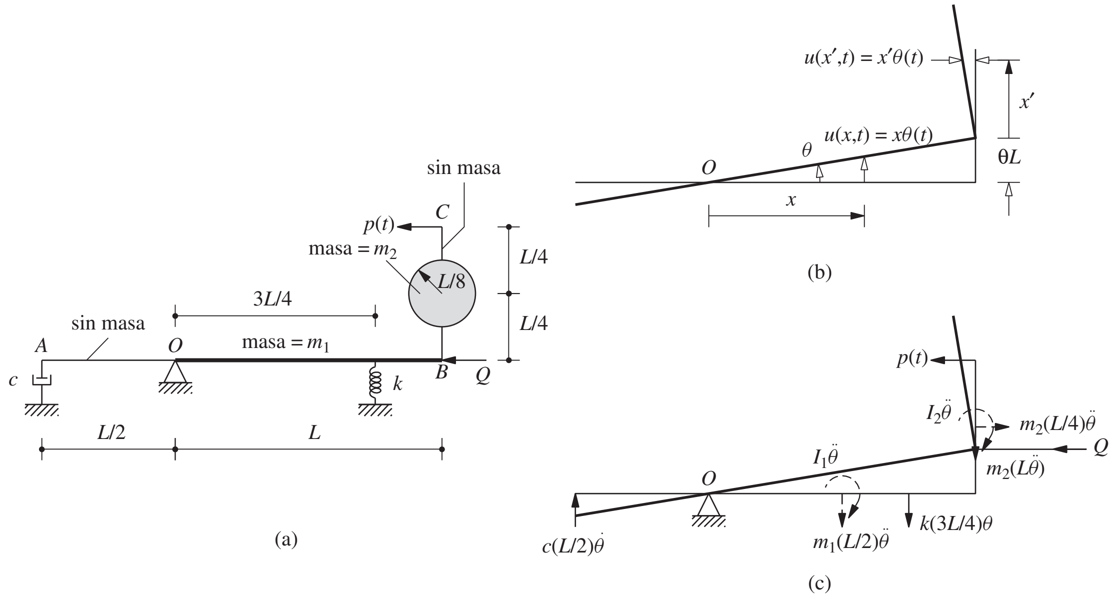


Figura E8.1

Si se sustituye $I_1 = m_1L^2/12$ y $I_2 = m_2(L/8)^2/2 = m_2L^2/128$ (vea el apéndice 8), resulta

$$\left(\frac{m_1L^2}{3} + \frac{137}{128}m_2L^2\right)\ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4}\dot{\theta} + \frac{9kL^2}{16}\theta = p(t)\frac{L}{2} \tag{a}$$

La ecuación de movimiento es

$$\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + \tilde{k}\theta = \tilde{p}(t) \tag{b}$$

donde

$$\tilde{m} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128}m_2\right)L^2 \qquad \tilde{c} = \frac{cL^2}{4} \qquad \tilde{k} = \frac{9kL^2}{16} \qquad \tilde{p}(t) = p(t)\frac{L}{2} \tag{c}$$

3. *Determine la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento.*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} \qquad \zeta = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}} \tag{d}$$

4. *Resuelva la ecuación de movimiento.*

$$\tilde{p}(t) = \frac{p(t)L}{2} = \frac{p_oL}{2} \equiv \tilde{p}_o$$

Si se adapta la ecuación (4.3.2), la solución de la ecuación (b) con $c = 0$ es

$$\theta(t) = \frac{\tilde{p}_o}{\tilde{k}}(1 - \cos\omega_n t) = \frac{8p_o}{9kL}(1 - \cos\omega_n t) \tag{e}$$

5. *Determine los desplazamientos.*

$$u(x, t) = x\theta(t) \qquad u(x', t) = x'\theta(t) \tag{f}$$

donde $\theta(t)$ está dado por la ecuación (e).

6. *Incluya la fuerza axial*. En la posición desplazada de la barra, la fuerza axial Q introduce un momento en sentido antihorario $= QL\theta$. Así, la ecuación (b) se convierte en

$$\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + (\tilde{k} - QL)\theta = \tilde{p}(t) \tag{g}$$

Una fuerza axial de compresión disminuye la rigidez del sistema y, por lo tanto, su frecuencia de vibración natural. Dichas cantidades se convierten en cero si la fuerza axial es

$$Q_{\text{cr}} = \frac{\tilde{k}}{L} = \frac{9kL}{16}$$

Ésta es la carga axial crítica o de pandeo para el sistema.

8.3 SISTEMAS CON MASA Y ELASTICIDAD DISTRIBUIDAS

Como una ilustración de la aproximación de un sistema que tiene un número infinito de grados de libertad mediante un sistema generalizado de 1GDL, considere la torre en voladizo mostrada en la figura 8.3.1. Esta torre tiene una masa $m(x)$ por unidad de longitud y una rigidez a la flexión $EI(x)$; la excitación es el movimiento sísmico del terreno $u_g(t)$. En esta sección, primero se formula la ecuación de movimiento para el sistema sin amortiguamiento; por lo general, el amortiguamiento se expresa mediante una fracción de amortiguamiento estimada con base en datos experimentales de estructuras similares (capítulo 11). Después, se resuelve la ecuación de movimiento para establecer los desplazamientos y se desarrolla un procedimiento con el fin de determinar las fuerzas internas en la torre. Por último, este procedimiento se aplica a la evaluación de la respuesta máxima del sistema a un movimiento sísmico del terreno.

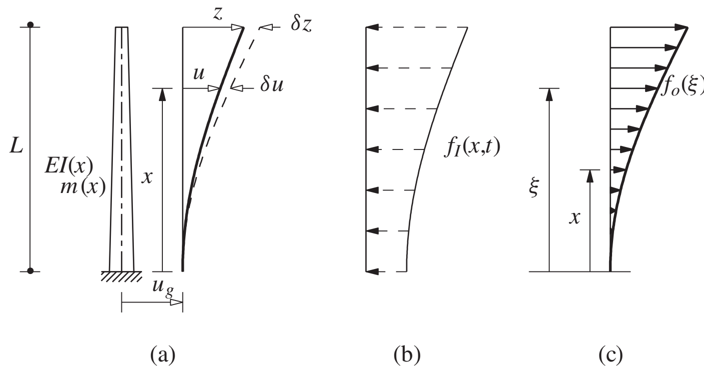


Figura 8.3.1 (a) Deflexiones y desplazamientos virtuales de la torre; (b) fuerzas de inercia; (c) fuerzas estáticas equivalentes.

8.3.1 Función de forma supuesta

Se supone que el desplazamiento relativo al terreno puede expresarse mediante la ecuación (8.1.1). El desplazamiento total de la torre es

$$u^t(x, t) = u(x, t) + u_g(t) \tag{8.3.1}$$

La función de forma $\psi(x)$ en la ecuación (8.1.1) debe satisfacer las condiciones de frontera del desplazamiento (figura 8.3.1a). Para esta torre, estas condiciones en su base son $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 0$. Dentro de estas restricciones podría elegirse una variedad de funciones de forma. Una posibilidad consiste en determinar la función de forma como las deflexiones de la torre debidas a algunas fuerzas estáticas. Por ejemplo, las deflexiones de una torre uniforme con rigidez a la flexión EI, debidas a una fuerza unitaria lateral en la parte superior, son $u(x) = (3Lx^2 - x^3)/6EI$. Si se selecciona la coordenada generalizada como la deflexión de algún punto de referencia conveniente, por ejemplo, la parte superior de la torre, entonces $z = u(L) = L^3/3EI$, y

$$u(x) = \psi(x)z \qquad \psi(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3} \tag{8.3.2a}$$

Esta $\psi(x)$ satisface automáticamente las condiciones de frontera del desplazamiento en $x = 0$, puesto que se determina a partir del análisis estático del sistema. La $\psi(x)$ de la ecuación (8.3.2a) también puede utilizarse como la función de forma para una torre no uniforme, a pesar de que se determinó para una torre uniforme. No es necesario seleccionar la función de forma con base en las deflexiones debidas a fuerzas estáticas, y ésta puede suponerse de manera directa; dos posibilidades son

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \quad \text{y} \quad \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L} \tag{8.3.2b}$$

Las tres funciones de forma anteriores tienen $\psi(L) = 1$, aunque esto no es necesario. La precisión de la formulación del sistema generalizado de 1GDL depende de la función de forma $\psi(x)$ supuesta, en la que la estructura está restringida a vibrar. Este tema se analizará más adelante junto con la manera de seleccionar la función de forma.

8.3.2 Ecuación de movimiento

Ahora se procede a formular la ecuación de movimiento de la torre. En cada instante de tiempo el sistema está en equilibrio bajo la acción de los momentos flexionantes internos de resistencia y las fuerzas de inercia ficticias (figura 8.3.1b), que por el principio de D'Alembert son

$$f_I(x, t) = -m(x)\ddot{u}^t(x, t)$$

Si se sustituye la ecuación (8.3.1) para u^t resulta

$$f_I(x, t) = -m(x)[\ddot{u}(x, t) + \ddot{u}_g(t)] \tag{8.3.3}$$

La ecuación de equilibrio dinámico de este sistema generalizado de 1GDL puede formularse de manera conveniente sólo por medio de principios del trabajo o la energía. Se prefiere usar el principio de los desplazamientos virtuales. Este principio establece que si el sistema en equilibrio se somete a los desplazamientos virtuales $\delta u(x)$, el trabajo virtual externo δW_E

es igual al trabajo virtual interno δW_I:

$$\delta W_I = \delta W_E \tag{8.3.4}$$

El trabajo virtual externo se debe a las fuerzas $f_I(x, t)$ que actúan a través de los desplazamientos virtuales $\delta u(x)$:

$$\delta W_E = \int_0^L f_I(x,t)\delta u(x)\, dx$$

que después de sustituir la ecuación (8.3.3) se convierte en

$$\delta W_E = -\int_0^L m(x)\ddot{u}(x,t)\delta u(x)\, dx - \ddot{u}_g(t)\int_0^L m(x)\delta u(x)\, dx \tag{8.3.5}$$

El trabajo virtual interno se debe a los momentos flexionantes $\mathcal{M}(x,t)$ que actúan a través de la curvatura $\delta\kappa(x)$ asociada con los desplazamientos virtuales:

$$\delta W_I = \int_0^L \mathcal{M}(x,t)\delta\kappa(x)\, dx$$

Sustituyendo

$$\mathcal{M}(x,t) = EI(x)u''(x,t) \qquad \delta\kappa(x) = \delta[u''(x)]$$

donde $u'' \equiv \partial^2 u/\partial x^2$ da

$$\delta W_I = \int_0^L EI(x)u''(x,t)\delta[u''(x)]\, dx \tag{8.3.6}$$

El trabajo virtual interno y externo se expresa enseguida en términos de la coordenada z generalizada y la función de forma $\psi(x)$. Con este propósito, de la ecuación (8.1.1) se obtiene

$$u''(x,t) = \psi''(x)z(t) \qquad \ddot{u}(x,t) = \psi(x)\ddot{z}(t) \tag{8.3.7}$$

El desplazamiento virtual se selecciona en concordancia con la función de forma supuesta (figura 8.3.1a), de donde se obtiene la ecuación (8.3.8a), y la curvatura virtual se define mediante la ecuación (8.3.8b):

$$\delta u(x) = \psi(x)\,\delta z \qquad \delta[u''(x)] = \psi''(x)\,\delta z \tag{8.3.8}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (8.3.7b) y (8.3.8a) en la ecuación (8.3.5), resulta

$$\delta W_E = -\delta z\left[\ddot{z}\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2\, dx + \ddot{u}_g(t)\int_0^L m(x)\psi(x)\, dx\right] \tag{8.3.9}$$

Al sustituir las ecuaciones (8.3.7a) y (8.3.8b) en la ecuación (8.3.6), se obtiene

$$\delta W_I = \delta z\left[z\int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2\, dx\right] \tag{8.3.10}$$

Una vez especificadas las expresiones finales para δW_E y δW_I, la ecuación (8.3.4) da

$$\delta z\left[\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z + \tilde{L}\ddot{u}_g(t)\right] = 0 \tag{8.3.11}$$

donde

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2\,dx$$
$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2\,dx \qquad (8.3.12)$$
$$\tilde{L} = \int_0^L m(x)\psi(x)\,dx$$

Como la ecuación (8.3.11) es válida para todos los desplazamientos virtuales δz, se concluye que

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t) \qquad (8.3.13a)$$

Ésta es la ecuación de movimiento para la torre con una deflexión supuesta acorde con la función de forma $\psi(x)$. Para este sistema generalizado de 1GDL, la masa $\tilde{m}$, la rigidez $\tilde{k}$ y la fuerza excitadora generalizadas $-\tilde{L}\ddot{u}_g(t)$ están definidas por la ecuación (8.3.12). Si se divide la ecuación (8.3.13a) entre $\tilde{m}$ da

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = -\tilde{\Gamma}\ddot{u}_g(t) \qquad (8.3.13b)$$

donde se han incluido $\omega_n^2 = \tilde{k}/\tilde{m}$ y un término de amortiguamiento utilizando una fracción de amortiguamiento estimada ζ. Esta ecuación es igual a la ecuación (6.2.1) para un sistema de 1GDL, excepto por el factor

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}} \qquad (8.3.14)$$

8.3.3 Frecuencia de vibración natural

Una vez determinadas las propiedades generalizadas $\tilde{m}$ y $\tilde{k}$, la frecuencia de vibración natural del sistema está dada por

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2\,dx}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2\,dx} \qquad (8.3.15)$$

8.3.4 Análisis de la respuesta

La respuesta en coordenadas generalizadas $z(t)$ del sistema a una aceleración específica del terreno puede determinarse resolviendo la ecuación (8.3.13b); para ello pueden emplearse los métodos presentados en los capítulos 5 y 6. Entonces, la ecuación (8.1.1) proporciona los desplazamientos $u(x, t)$ de la torre respecto a la base.

El siguiente paso consiste en calcular las fuerzas internas (momentos flexionantes y cortantes) en la torre, asociadas con los desplazamientos $u(x, t)$. El segundo de los dos métodos descritos en la sección 1.8 se utiliza si se está trabajando con una forma modificada $\psi(x)$ que es supuesta y no exacta, como en el caso de los sistemas generalizados de 1GDL. En este método, las fuerzas internas se calculan mediante un análisis estático de la estructura sometida a *fuerzas estáticas equivalentes*. Estas fuerzas, denotadas por $f_S(x)$, se definen como las fuerzas externas que causarían desplazamientos $u(x)$. La teoría de la viga elemental da

$$f_S(x) = \left[EI(x)u''(x)\right]'' \qquad (8.3.16)$$

Como u varía con el tiempo, también lo hará f_S; por lo que

$$f_S(x,t) = \left[EI(x)u''(x,t)\right]'' \tag{8.3.17}$$

que después de sustituir la ecuación (8.1.1) se convierte en

$$f_S(x,t) = \left[EI(x)\psi''(x)\right]'' z(t) \tag{8.3.18}$$

Estas fuerzas externas, las cuales dependen de las derivadas de la función de forma supuesta, darán fuerzas internas que suelen ser menos exactas que los desplazamientos, puesto que las derivadas de la función de forma supuesta son aproximaciones menos precisas que la misma función de forma.

La mejor estimación, dentro de las restricciones de la función de forma supuesta para las fuerzas estáticas equivalentes es

$$f_S(x,t) = \omega_n^2 m(x)\psi(x)z(t) \tag{8.3.19}$$

Es posible demostrar que esto es idéntico a la ecuación (8.3.18) si la función de forma supuesta es exacta, como se verá en el capítulo 16. Con una función de forma aproximada, los dos conjuntos de fuerzas dados por las ecuaciones (8.3.18) y (8.3.19) no son iguales localmente en todos los puntos a lo largo de la estructura, pero son globalmente equivalentes (vea la deducción 8.1). Además, la ecuación (8.3.19) no involucra a las derivadas de la $\psi(x)$ supuesta y, por lo tanto, es una mejor aproximación que la proporcionada por la ecuación (8.3.18). Las fuerzas internas pueden establecerse en cada instante de tiempo mediante el análisis estático de la torre sometida a las fuerzas $f_S(x, t)$, las cuales se determinan a partir de la ecuación (8.3.19).

8.3.5 Respuesta máxima sísmica

Al comparar la ecuación (8.3.13b) con la ecuación (6.2.1) para un sistema de 1GDL y al utilizar el procedimiento de la sección 6.7, se obtiene el valor máximo de $z(t)$:

$$z_o = \tilde{\Gamma} D = \frac{\tilde{\Gamma}}{\omega_n^2} A \tag{8.3.20}$$

donde D y A son las ordenadas de la deformación y la pseudo-aceleración, respectivamente, del espectro de diseño en el periodo $T_n = 2\pi/\omega_n$ para una fracción de amortiguamiento ζ. En las ecuaciones (8.1.1) y (8.3.19), $z(t)$ se sustituye por la z_o de la ecuación (8.3.20) para obtener los valores máximos de los desplazamientos y las fuerzas estáticas equivalentes:

$$u_o(x) = \tilde{\Gamma} D \psi(x) \qquad f_o(x) = \tilde{\Gamma} m(x)\psi(x) A \tag{8.3.21}$$

donde el subíndice convencional S se elimina de f_{So} por brevedad.

Las fuerzas internas (momentos flexionantes y cortantes) en la torre en voladizo se obtienen mediante el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $f_o(x)$, vea la figura 8.3.1c. Así, el momento flexionante y la fuerza cortante a una altura x sobre la base son

$$\mathcal{V}_o(x) = \int_x^L f_o(\xi)\, d\xi = \tilde{\Gamma} A \int_x^L m(\xi)\psi(\xi)\, d\xi \tag{8.3.22a}$$

$$\mathcal{M}_o(x) = \int_x^L (\xi - x) f_o(\xi)\, d\xi = \tilde{\Gamma} A \int_x^L (\xi - x) m(\xi)\psi(\xi)\, d\xi \tag{8.3.22b}$$

En particular, la fuerza cortante y el momento flexionante en la base de la torre son

$$\mathcal{V}_{bo} = \mathcal{V}_o(0) = \tilde{L}\tilde{\Gamma}A \qquad \mathcal{M}_{bo} = \mathcal{M}_o(0) = \tilde{L}^{\theta}\tilde{\Gamma}A \tag{8.3.23}$$

donde $\tilde{L}$ se definió en la ecuación (8.3.12) y

$$\tilde{L}^{\theta} = \int_0^L xm(x)\psi(x)\,dx \tag{8.3.24}$$

Esto completa la evaluación aproximada de la respuesta sísmica de un sistema con masa distribuida y flexibilidad basada en una función de forma supuesta $\psi(x)$.

8.3.6 Excitación de la fuerza aplicada

Si la excitación fueran las fuerzas externas $p(x, t)$ en vez del movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$, la ecuación de movimiento podría obtenerse siguiendo los métodos de la sección 8.3.2, lo que conduce a

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t) \tag{8.3.25}$$

donde la fuerza generalizada

$$\tilde{p}(t) = \int_0^L p(x,t)\psi(x)\,dx \tag{8.3.26}$$

Observe que la única diferencia entre las dos ecuaciones (8.3.25) y (8.3.13a) está en el término de excitación.

Deducción 8.1

Las fuerzas estáticas equivalentes a partir de la teoría de la viga elemental, ecuación (8.3.17), se escriben como

$$f_S(x,t) = \mathcal{M}''(x,t) \tag{a}$$

donde los momentos flexionantes internos son

$$\mathcal{M}(x,t) = EI(x)u''(x,t) \tag{b}$$

Se buscan las fuerzas laterales $\tilde{f}_S(x,t)$ que no involucran las derivadas de $\mathcal{M}(x,t)$ y que están en equilibrio en cada instante de tiempo con los momentos flexionantes internos; el equilibrio se satisface de manera general para el sistema (pero no en cada ubicación x). Si se usa el principio de los desplazamientos virtuales, el trabajo externo realizado por las fuerzas desconocidas $\tilde{f}_S(x,t)$ al actuar a través del desplazamiento virtual $\delta u(x)$ es igual al trabajo interno realizado por los momentos flexionantes que actúan a través de las curvaturas $\delta\kappa(x)$ asociadas con los desplazamientos virtuales:

$$\int_0^L \tilde{f}_S(x,t)\delta u(x)\,dx = \int_0^L \mathcal{M}(x,t)\delta\kappa(x)\,dx \tag{c}$$

Esta ecuación se reescribe sustituyendo la ecuación (8.3.8a) para $\delta u(x)$ en el lado izquierdo y usando la ecuación (8.3.10) para la integral del lado derecho; así

$$\delta z \int_0^L \tilde{f}_S(x,t)\psi(x)\,dx = \delta z\left[z(t)\int_0^L EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 dx\right] \tag{d}$$

Si se utiliza la ecuación (8.3.15) y se elimina δz, la ecuación (d) puede reescribirse como

$$\int_0^L \left[\tilde{f}_S(x,t) - \omega_n^2 m(x)\psi(x)z(t)\right]\psi(x)\,dx = 0 \tag{e}$$

Al igualar a cero la cantidad entre paréntesis, se obtiene

$$f_S(x,t) = \omega_n^2 m(x)\psi(x)z(t) \tag{f}$$

donde se ha descartado la tilde encima de f_S. Esto completa la deducción de la ecuación (8.3.19).

Ejemplo 8.2

Una torre uniforme en voladizo de longitud L tiene una masa por unidad de longitud $= m$ y una rigidez a la flexión EI (figura E8.2). Si se supone que la función de forma $\psi(x) = 1 - \cos(\pi x/2L)$, formule la ecuación de movimiento para el sistema excitado por un movimiento del terreno y determine su frecuencia natural.

Solución

1. *Determine las propiedades generalizadas.*

$$\tilde{m} = m\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227 \text{ mL} \tag{a}$$

$$\tilde{k} = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{2L}\,dx = 3.04\frac{EI}{L^3} \tag{b}$$

$$\tilde{L} = m\int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.363 \text{ mL} \tag{c}$$

La $\tilde{k}$ calculada está cerca de la rigidez de la torre bajo una fuerza lateral concentrada en la parte superior.

2. *Determine la frecuencia de vibración natural.*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \frac{3.66}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{d}$$

Este resultado aproximado es cercano a la frecuencia natural exacta, $\omega_{\text{exacta}} = (3.516/L^2)\sqrt{EI/m}$, que se determina en el capítulo 16. El error sólo es de 4%.

3. *Formule la ecuación de movimiento*. Si se sustituye $\tilde{L}$ y $\tilde{m}$ en la ecuación (8.3.14), resulta $\tilde{\Gamma} = 1.6$y la ecuación (8.3.13b) se convierte en

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -1.6\ddot{u}_g(t)$$

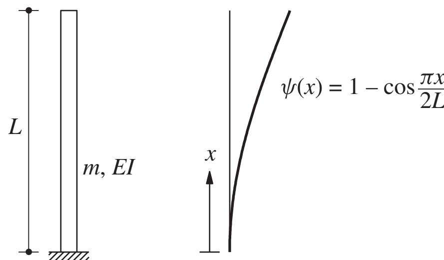


Figura E8.2

Ejemplo 8.3

Una chimenea de concreto reforzado de 600 pies de altura tiene una sección transversal hueca circular uniforme con un diámetro exterior de 50 pies y un espesor de pared de 2 pies 6 pulg (figura E8.3a). Para fines de un análisis sísmico preliminar, la chimenea se supone fija en la base, la masa y la rigidez a la flexión se calculan a partir del área bruta del concreto (despreciando el acero de refuerzo), y el amortiguamiento se estima en 5%. El peso unitario del concreto es de 150 lb/pie^3 y su módulo de elasticidad es $E_c = 3600$ ksi.

Suponiendo una función de forma como la del ejemplo 8.2, estime los desplazamientos máximos, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes para la chimenea debidos al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima de 0.25g.

Solución

1. *Determine las propiedades de la chimenea.*

Longitud: $L = 600$ pies

Área de la sección transversal: $A = \pi(25^2 - 22.5^2) = 373.1$ pie^2

Masa por unidad de longitud: $m = \dfrac{150 \times 373.1}{32.2} = 1.738$ kip-s^2/pie^2

Momento de inercia: $I = \dfrac{\pi}{4}(25^4 - 22.5^4) = 105{,}507$ pie^4

Rigidez a la flexión: $EI = 5.469 \times 10^{10}$ kip-pie^2

2. *Determine el periodo natural*. A partir del ejemplo 8.2,

$$\omega_n = \frac{3.66}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} = 1.80 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 3.49 \text{ s}$$

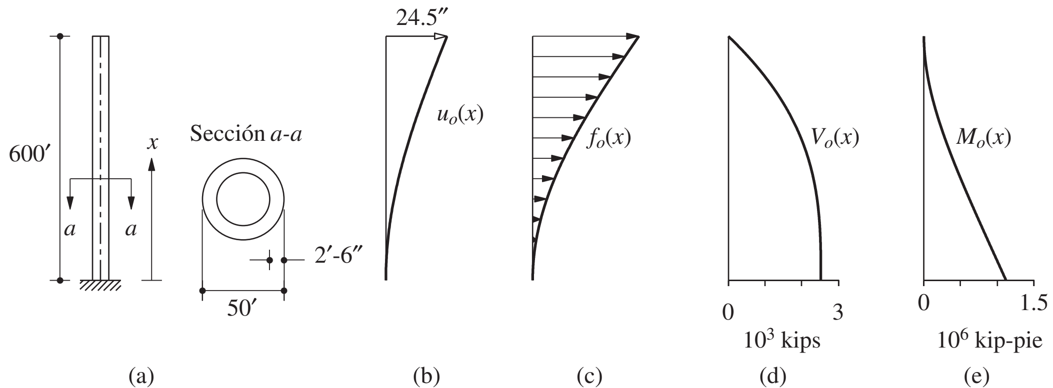


Figura E8.3

3. *Determine el valor máximo de z(t).* Para $T_n = 3.49$ s y $\zeta = 0.05$, el espectro de diseño da $A/g = 0.25(1.80/3.49) = 0.129$. La deformación correspondiente es $D = A/\omega^2_n = 15.3$ pulg. La ecuación (8.3.20) proporciona el valor máximo de $z(t)$:

$$z_o = 1.6D = 1.6 \times 15.3 = 24.5 \text{ pulg}$$

4. *Determine los desplazamientos máximos $u_o(x)$ de la torre (figura E8.3b).*

$$u_o(x) = \psi(x)z_o = 24.5\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \text{ pulg}$$

5. *Determine las fuerzas estáticas equivalentes.*

$$f_o(x) = \tilde{\Gamma}m(x)\psi(x)A = (1.6)(1.738)\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)0.129\text{g}$$
$$= 11.58\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \text{ kips/pie}$$

Estas fuerzas se muestran en la figura E8.3c.

6. *Calcule las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes.* El análisis estático de la chimenea sometida a las fuerzas externas $f_o(x)$ proporciona las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes. Los resultados obtenidos con la ecuación (8.3.22) se presentan en la figura E8.3d y e. Si sólo se tuviera interés en las fuerzas sobre la base de la chimenea, éstas podrían calcularse directamente a partir de la ecuación (8.3.23). En particular, el cortante basal es

$$\mathcal{V}_{bo} = \tilde{L}\tilde{\Gamma}A = (0.363mL)(1.6)0.129\text{g}$$
$$= 0.0749mL\text{g} = 2518 \text{ kips}$$

Esto es 7.49% del peso total de la chimenea.

Ejemplo 8.4

Un puente simplemente apoyado con un solo claro de L pies tiene una cubierta con una sección transversal uniforme de masa m por unidad de longitud y rigidez a la flexión EI. La carga de una sola rueda p_o viaja a través del puente a una velocidad uniforme υ, como se muestra en la figura E8.4. Si se desprecia el amortiguamiento y se supone una función de forma $\psi(x) = \text{sen}(\pi x/L)$, determine una ecuación para la deflexión en el centro del claro como una función del tiempo. Las propiedades de la viga cajón de la autopista elevada, hecha de concreto pretensado, son $L = 200$ pies, $m = 11$ kips/g por pie, $I = 700$ pie^4 y $E = 576{,}000$ kips/pie^2. Si $\upsilon = 55$ mph, determine el factor de impacto definido como la razón de deflexión máxima en el centro del claro y la desviación estática.

Solución Se supone que la masa de la rueda es pequeña en comparación con la masa del puente y puede despreciarse.

1. *Determine la masa y la rigidez generalizadas, así como la frecuencia natural.*

$$\psi(x) = \text{sen}\,\frac{\pi x}{L} \qquad \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}$$

$$\tilde{m} = \int_0^L m\,\text{sen}^2\frac{\pi x}{L}\,dx = \frac{mL}{2} \tag{a}$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)^2 \text{sen}^2\frac{\pi x}{L}\,dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \tag{b}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{c}$$

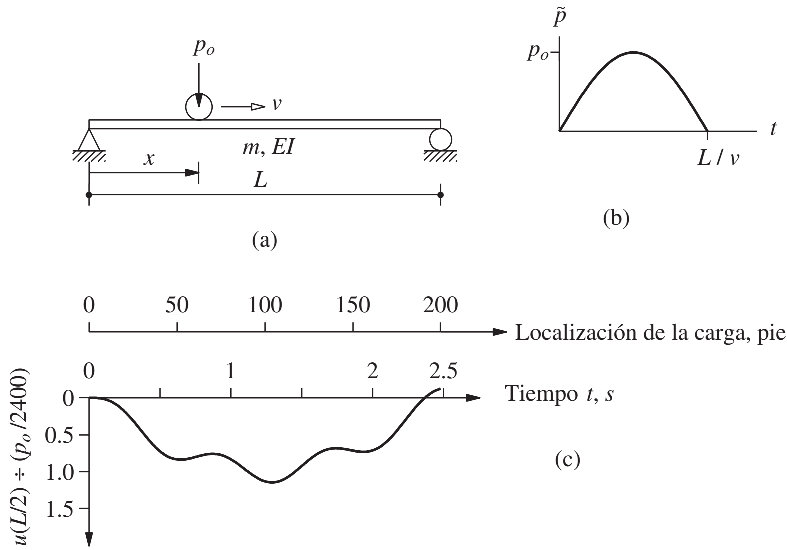


Figura E8.4

Esto resulta ser el valor exacto de la frecuencia natural más baja del puente, debido a que la $\psi(x)$ seleccionada es la forma exacta del modo fundamental de vibración natural de una viga simplemente apoyada (vea la sección 16.3.1).

2. *Determine la fuerza generalizada*. Una carga p_o que viaja con una velocidad v requiere de un tiempo $t_d = L/v$ para cruzar el puente. En cualquier tiempo t su posición es tal como se muestra en la figura E8.4a. Así, la carga en movimiento puede describirse matemáticamente como

$$p(x, t) = \begin{cases} p_o\delta(x - vt) & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t \ge t_d \end{cases} \tag{d}$$

donde $\delta(x - vt)$ es la función delta de Dirac centrada en $x = vt$; es una descripción matemática de la carga concentrada que se desplaza. A partir de la ecuación (8.3.26), la fuerza generalizada es

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) = \int_0^L p(x, t)\psi(x)\, dx &= \begin{cases} \int_0^L p_o\delta(x - vt)\ \mathrm{sen}(\pi x/L)\, dx & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t \ge t_d \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_o\ \mathrm{sen}(\pi vt/L) & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t \ge t_d \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_o\ \mathrm{sen}(\pi t/t_d) & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t \ge t_d \end{cases} \end{aligned} \tag{e}$$

Esta fuerza generalizada es el pulso sinusoidal de medio ciclo que se muestra en la figura E8.4b.

3. *Resuelva la ecuación de movimiento*.

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t) \tag{f}$$

Las ecuaciones (4.8.2) y (4.8.3) describen la respuesta de un sistema de 1GDL a un pulso sinusoidal de medio ciclo. Esta solución se adaptará al problema del puente, para lo cual se

cambiará la notación de $u(t)$ a $z(t)$ y se observará que

$$t_d = \frac{L}{v} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad (z_{\text{st}})_o = \frac{p_o}{\tilde{k}} = \frac{2p_o}{mL\omega_n^2}$$

Los resultados son

$$z(t) = \begin{cases} \dfrac{2p_o}{mL}\dfrac{1}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi vt}{L} - \dfrac{\pi v}{\omega_n L}\,\text{sen}\,\omega_n t\right) & t \le L/v \qquad \text{(g)} \\[2ex] -\dfrac{2p_o}{mL}\dfrac{(2\pi v/\omega_n L)\,\cos(\omega_n L/2v)}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\,\text{sen}[\omega_n(t - L/2v)] & t \ge L/v \qquad \text{(h)} \end{cases}$$

La respuesta está dada por la ecuación (g) mientras la carga móvil se encuentra sobre el puente y por la ecuación (h) después de que la carga ha cruzado el claro. Estas ecuaciones son válidas siempre que $\omega_n \neq \pi v/L$ o $T_n \neq 2L/v$.

4. *Determine la deflexión en el centro del claro.*

$$u(x,t) = z(t)\psi(x) = z(t)\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L} \qquad \text{(i)}$$

En el centro del claro, $x = L/2$ y

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = z(t) \qquad \text{(j)}$$

Así, la deflexión en el centro del claro también está dada por las ecuaciones (g) y (h).

5. *Resultados numéricos*. Para la estructura de concreto pretensado y la velocidad del vehículo dado:

$$m = \frac{11}{32.2} = 0.3416 \text{ kip-s}^2/\text{pie}^2$$

$$EI = 576{,}000 \times 700 = 4.032 \times 10^8 \text{ kip-pie}^2$$

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{(200)^2}\sqrt{\frac{4.032 \times 10^8}{0.3416}} = 8.477 \text{ rad/s}$$

$$T_n = 0.74 \text{ s}$$

$$v = 55 \text{ mph} = 80.67 \text{ pie/s}$$

$$\frac{\pi v}{L} = 1.267$$

$$\frac{L}{v} = \frac{200}{80.67} = 2.479 \text{ s}$$

Como la duración del pulso sinusoidal de medio ciclo $t_d = L/v$ es mayor que $T_n/2$, la respuesta máxima se produce mientras la carga móvil se encuentra sobre el puente. Dicha fase de la respuesta está dada por las ecuaciones (g) y (j):

$$u(L/2, t) = \frac{2p_o}{(0.3416)200}\frac{1}{(8.477)^2 - (1.267)^2}\left(\text{sen}\,1.267t - \frac{1.267}{8.477}\,\text{sen}\,8.477t\right)$$

$$= \frac{p_o}{2400}(\text{sen}\,1.267t - 0.1495\,\text{sen}\,8.477t) \qquad \text{(k)}$$

La ecuación (k) es válida para $0 \leq t \leq 2.479$ s. Los valores de las deflexiones en el centro del claro, calculados a partir de la ecuación (k) para muchos valores de t se muestran en la figura E8.4c; la deflexión máxima es $u_o = (p_o/2400)(1.147)$. La deflexión estática es $u(L/2) = p_o L^3/48EI = p_o/2419$. La relación de estas deflexiones proporciona el factor de impacto: 1.156 (es decir, la carga estática debe incrementarse en un 15.6% para explicar el efecto dinámico).

Ejemplo 8.5

Determine la frecuencia natural de la vibración transversal del puente con tres claros y viga cajón del ejemplo 1.3. Ahí, se proporcionaron varias de las propiedades de esta estructura. Además, se da el momento de inercia para la flexión transversal de la cubierta del puente: $I_y = 65{,}550$ pie^4. Desprecie la rigidez torsional de los ejes.

Solución

1. *Seleccione la función de forma.* Se selecciona una función apropiada para una viga simplemente apoyada en ambos extremos (figura E8.5):

$$\psi(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \tag{a}$$

Esta función de forma se muestra en la figura E8.5.

2. *Determine la masa generalizada.*

$$\tilde{m} = \int_0^L m \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{mL}{2} \tag{b}$$

3. *Determine la rigidez generalizada.*

$$\begin{aligned}
\tilde{k} &= \int_0^L EI_y [\psi''(x)]^2 \, dx + \sum k_{\text{eje}} \psi^2(x_{\text{eje}}) \\
&= \int_0^L EI_y \left(\frac{\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx + k_{\text{eje}} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi L/3}{L} \right) + k_{\text{eje}} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi 2L/3}{L} \right) \\
&= \frac{\pi^4 EI_y}{2L^3} + \frac{3}{4} k_{\text{eje}} + \frac{3}{4} k_{\text{eje}} \\
&= \underbrace{\frac{\pi^4 EI_y}{2L^3}}_{\tilde{k}_{\text{cubierta}}} + \underbrace{\frac{3}{2} k_{\text{eje}}}_{\tilde{k}_{\text{ejes}}}
\end{aligned} \tag{c}$$

4. *Determine los valores numéricos de $\tilde{m}$ y $\tilde{k}$* A partir del ejemplo 1.3, el peso de la cubierta del puente por unidad de longitud es de 18.45 kips/pie.

$$\tilde{m} = \frac{1}{32.2} \frac{18.45 \times 375}{2} = 107.5 \text{ kip-s}^2\text{/pie}$$

$$\tilde{k}_{\text{cubierta}} = \frac{\pi^4 (3000 \times 144) 65{,}550}{2(375)^3} = 26{,}154 \text{ kips/pie}$$

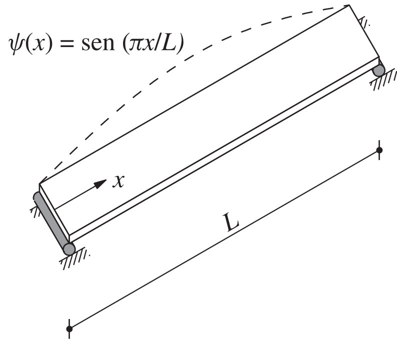


Figura E8.5

A partir del ejemplo 1.3, la rigidez de cada eje en la dirección longitudinal es $k_{\text{eje}} = 12{,}940$ kips/pie. Debido a que cada columna en el eje tiene una sección circular, su segundo momento de área a la flexión es el mismo en las direcciones longitudinal o transversal. Por lo tanto, la rigidez transversal de cada eje también es $k_{\text{ejes}} = 12{,}940$ kips/pie.

$$\tilde{k}_{\text{eje}} = \frac{3}{2}k_{\text{eje}} = \frac{3}{2}(12{,}940) = 19{,}410 \text{ kips/pie}$$

$$\tilde{k} = \tilde{k}_{\text{cubierta}} + \tilde{k}_{\text{ejes}} = 26{,}154 + 19{,}410 = 45{,}564 \text{ kips/pie}$$

5. *Determine el periodo natural de vibración.*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{45{,}564}{107.5}} = 20.59 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.305 \text{ s}$$

8.4 SISTEMA DE MASA CONCENTRADA: EDIFICIO DE CORTANTE

Como una ilustración de la aproximación a un sistema que tiene varios grados de libertad mediante un sistema generalizado de 1GDL, considere el marco mostrado en la figura 8.4.1a y una excitación sísmica. La masa de este marco de N niveles se concentra en el sistema de piso con m_j como la masa en el j-ésimo nivel. Este sistema tiene N grados de libertad: $u_1, u_2, \ldots, u_N$. En esta sección primero se formula la ecuación de movimiento para el sistema sin amortiguamiento; por lo general, el amortiguamiento se define mediante una fracción de amortiguamiento estimada a partir de datos experimentales para estructuras similares (capítulo 11). Después, se resuelve la ecuación de movimiento para determinar la

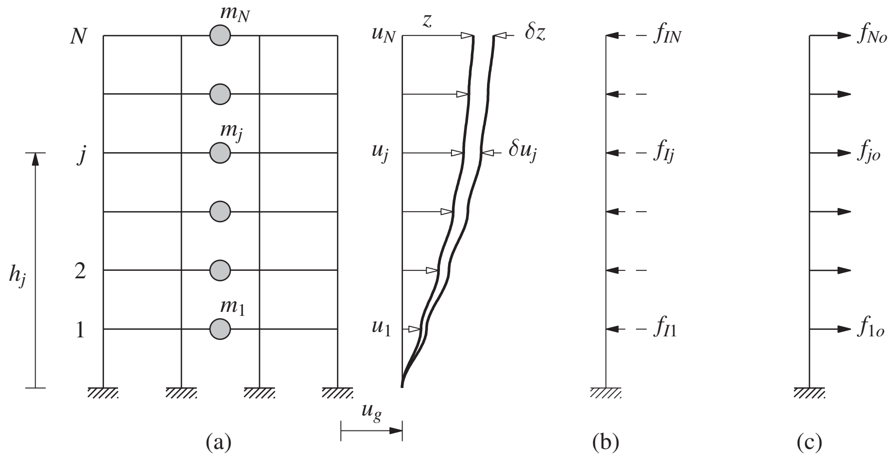


Figura 8.4.1 (a) Desplazamientos del edificio y desplazamientos virtuales; (b) fuerzas de inercia; (c) fuerzas estáticas equivalentes.

respuesta máxima (los desplazamientos y las fuerzas internas) de la estructura a un movimiento sísmico del terreno.

8.4.1 Vector de forma supuesto

Se supone que los desplazamientos de los niveles con respecto al terreno pueden expresarse como

$$u_j(t) = \psi_j z(t) \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{8.4.1a}$$

que en forma vectorial es

$$\mathbf{u}(t) = \psi z(t) \tag{8.4.1b}$$

donde ψ es un vector de forma supuesto que define la forma modificada. El desplazamiento total del j-ésimo nivel es

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t) \tag{8.4.2}$$

8.4.2 Ecuación de movimiento

Antes de que se pueda formular la ecuación de movimiento para este sistema, es necesario definir la manera en que las fuerzas internas se relacionan con los desplazamientos. Esta relación es muy fácil de desarrollar si las vigas son axialmente rígidas, así como en la flexión, y este supuesto de "edificio de cortante" es adecuado para los objetivos presentes; sin embargo, en el capítulo 9 se desarrollan idealizaciones realistas para los edificios de varios niveles. Para esta idealización del edificio de cortante, la fuerza cortante de entrepiso V_j en el j-ésimo nivel (que es la suma de la fuerza cortante en todas las columnas) se relaciona con el desplazamiento relativo de entrepiso $\Delta j = u_j - u_{j-1}$ a través de la rigidez k_j del entrepiso:

$$V_j = k_j \Delta_j = k_j(u_j - u_{j-1}) \tag{8.4.3}$$

La rigidez del entrepiso es la suma de las rigideces laterales de todas las columnas en ese nivel:

$$k_j = \sum_{\text{columnas}} \frac{12EI}{h^3} \tag{8.4.4}$$

donde EI es la rigidez a la flexión de una columna y h es su altura.

Ahora se procede a formular la ecuación de movimiento para el edificio de cortante. En cada instante de tiempo el sistema está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas cortantes internas del entrepiso $V_j(t)$ y las fuerzas de inercia ficticias (figura 8.4.1b), que por el principio de D'Alembert son $f_{Ij} = -m_j\ddot{u}^t_j$. Si se sustituye la ecuación (8.4.2) para u^t_j, resulta

$$f_{Ij} = -m_j[\ddot{u}_j(t) + \ddot{u}_g(t)] \tag{8.4.5}$$

Como antes, el principio de los desplazamientos virtuales proporciona un enfoque práctico para formular la ecuación de movimiento. El procedimiento es similar al desarrollado en la sección 8.3 para una viga. El trabajo virtual externo se debe a las fuerzas f_{Ij} que actúan a través de los desplazamientos virtuales δu_j:

$$\delta W_E = \sum_{j=1}^{N} f_{Ij}(t)\,\delta u_j$$

que después de sustituir la ecuación (8.4.5) se convierte en

$$\delta W_E = -\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{u}_j(t)\,\delta u_j - \ddot{u}_g(t)\sum_{j=1}^{N} m_j\,\delta u_j \tag{8.4.6}$$

El trabajo virtual interno se debe a las fuerzas cortantes de entrepiso $V_j(t)$ de los niveles que actúan a través de los desplazamientos de entrepiso asociados con los desplazamientos virtuales:

$$\delta W_I = \sum_{j=1}^{N} V_j(t)(\delta u_j - \delta u_{j-1}) \tag{8.4.7}$$

donde $V_j(t)$ se relaciona con los desplazamientos mediante la ecuación (8.4.3).

Los trabajos virtuales interno y externo pueden expresarse en términos de la coordenada z generalizada y el vector de forma ψ al observar que los desplazamientos virtuales compatibles con el vector de forma supuesto (figura 8.4.1a) son

$$\delta u_j = \psi_j\,\delta z \quad \text{o} \quad \delta\mathbf{u} = \psi\,\delta z \tag{8.4.8}$$

Si se procede como en la sección 8.3, se llega a las siguientes ecuaciones de los trabajos virtuales externo e interno:

$$\delta W_E = -\delta z\left[\ddot{z}\sum_{j=1}^{N} m_j\psi_j^2 + \ddot{u}_g(t)\sum_{j=1}^{N} m_j\psi_j\right] \tag{8.4.9}$$

$$\delta W_I = \delta z\left[z\sum_{j=1}^{N} k_j(\psi_j - \psi_{j-1})^2\right] \tag{8.4.10}$$

Al obtener estas expresiones para δW_E y δW_I, la ecuación (8.3.4), después de eliminar δ_z (vea la sección 8.3.2), proporciona la ecuación de movimiento:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t) \tag{8.4.11}$$

donde

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2 \qquad \tilde{k} = \sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \qquad \tilde{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j \tag{8.4.12a}$$

Se hará una breve pausa para mencionar que la deducción anterior habría sido más fácil si se hubiera utilizado una fórmula matricial, pero se ha evitado este enfoque porque la matriz de rigidez **k** y la matriz de masa **m** de una estructura no se presentan sino hasta el capítulo 9. Sin embargo, se espera que la mayoría de los lectores esté familiarizada con la matriz de rigidez de una estructura y, como se verá en el capítulo 9, la matriz de masa del sistema de la figura 8.4.1 es una matriz diagonal con $m_{jj} = m_j$. Si se usan estas matrices y el vector de forma $\psi = \langle \psi_1 \; \psi_2 \; \ldots \; \psi_N \rangle^T$, la ecuación (8.4.12a) para las propiedades generalizadas se convierte en

$$\tilde{m} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi} \qquad \tilde{k} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi} \qquad \tilde{L} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \mathbf{1} \tag{8.4.12b}$$

donde **1** es un vector unitario, en el que todos sus elementos son iguales a 1. La ecuación (8.4.12b) para la rigidez generalizada es un resultado general porque, a diferencia de la ecuación (8.4.12a), no se limita a los edificios de cortante, siempre que **k** se determine para una idealización realista de la estructura.

La ecuación (8.4.11) rige el movimiento del marco de cortante de varios niveles, del cual se supone una deflexión en la forma definida por el vector ψ. Para este sistema generalizado de 1GDL, la masa $\tilde{m}$, la rigidez $\tilde{k}$ y la excitación generalizadas $-\tilde{L}\ddot{u}_g(t)$ se definen mediante la ecuación (8.4.12). Al dividir la ecuación (8.4.11) entre $\tilde{m}$ y al incluir un término de amortiguamiento con una fracción de amortiguamiento modal estimada ζ, se obtienen las ecuaciones (8.3.13b) y (8.3.14), lo que demuestra que es posible aplicar la misma ecuación de movimiento a ambos sistemas de 1GDL generalizados (con masa concentrada o masa distribuida); por supuesto, las propiedades generalizadas $\tilde{m}$, $\tilde{k}$, y $\tilde{L}$ dependen del sistema.

8.4.3 Análisis de la respuesta

Ahora es posible analizar el sistema generalizado de 1GDL mediante los métodos desarrollados en los capítulos anteriores para los sistemas de 1GDL. En particular, la frecuencia de vibración natural del sistema está dada por

$$\omega_n^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2} \tag{8.4.13a}$$

Si se reescribe esta ecuación en notación matricial resulta

$$\omega_n^2 = \frac{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}} \tag{8.4.13b}$$

La respuesta en la coordenada generalizada $z(t)$ del sistema a una aceleración específica del terreno puede determinarse al resolver la ecuación (8.3.13b), empleando los métodos de

los capítulos 5 y 6. Entonces, la ecuación (8.4.1) proporciona los desplazamientos del nivel relativos a la base.

Suponga que se desea establecer la respuesta máxima del marco a la excitación sísmica caracterizada por un espectro de diseño. El valor máximo de $z(t)$ sigue siendo dado por la ecuación (8.3.20) y los desplazamientos del nivel relativos al suelo están dados por la ecuación (8.4.1), donde $z(t)$ se sustituye por z_o:

$$u_{jo} = \psi_j z_o = \tilde{\Gamma} D \psi_j \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{8.4.14}$$

Las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con estos desplazamientos del terreno están dadas por la ecuación (8.3.21b) modificada para un sistema de masa concentrada:

$$f_{jo} = \tilde{\Gamma} m_j \psi_j A \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{8.4.15}$$

El análisis estático de la estructura sometida a estas fuerzas del nivel (figura 8.4.1c) da la fuerza cortante de entrepiso V_{io} en i-ésimo nivel y el momento de volteo en el i-ésimo nivel:

$$V_{io} = \sum_{j=i}^{N} f_{jo} \qquad M_{io} = \sum_{j=i}^{N} (h_j - h_i) f_{jo} \tag{8.4.16}$$

donde h_i es la altura del i-ésimo nivel por encima de la base. En particular, la fuerza cortante y momento de volteo en la base son

$$V_{bo} = \sum_{j=1}^{N} f_{jo} \qquad M_{bo} = \sum_{j=1}^{N} h_j f_{jo}$$

Si se sustituye la ecuación (8.4.15) resulta

$$V_{bo} = \tilde{L} \tilde{\Gamma} A \qquad M_{bo} = \tilde{L}^{\theta} \tilde{\Gamma} A \tag{8.4.17}$$

donde $\tilde{L}$ se definió mediante la ecuación (8.4.12) y

$$\tilde{L}^{\theta} = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \psi_j \tag{8.4.18}$$

Observe que estas ecuaciones para las fuerzas en la base de un sistema con masa concentrada son las mismas que se dedujeron con anterioridad para los sistemas de masa distribuida (ecuaciones 8.3.23 y 8.3.24); por supuesto, los parámetros $\tilde{L}$, $\tilde{L}^{\theta}$, y $\tilde{\Gamma}$ dependen del sistema.

Ejemplo 8.6

El marco uniforme de cinco niveles con vigas rígidas que se muestra en la figura E8.6a se somete a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Todas las masas de los niveles son iguales a m y todos los niveles tienen una altura h y una rigidez k. Si se supone que los desplazamientos aumentan linealmente con la altura sobre la base (figura E8.6b), formule la ecuación de movimiento para el sistema y determine su frecuencia natural.

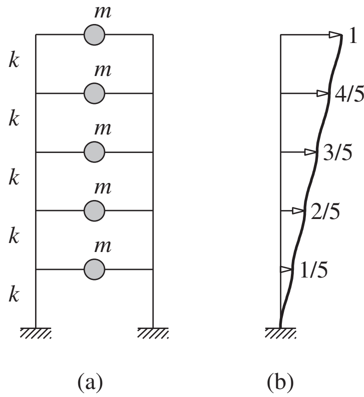


Figura E8.6

Solución

1. *Determine las propiedades generalizadas.*

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^{5} m_j \psi_j^2 = m \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5^2} = \frac{11}{5} m$$

$$\tilde{k} = \sum_{j=1}^{5} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 = k \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{k}{5}$$

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{5} m_j \psi_j = m \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3m$$

2. *Formule la ecuación de movimiento*. Si se sustituye $\tilde{m}$ y $\tilde{L}$ en la ecuación (8.3.14), resulta $\tilde{\Gamma} = \frac{15}{11}$ y la ecuación (8.3.13b) se convierte en

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -\tfrac{15}{11} \ddot{u}_g(t)$$

donde z es el desplazamiento lateral en la ubicación donde $\psi_j = 1$, en este caso la parte superior del marco.

3. *Determine la frecuencia de vibración natural.*

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k/5}{11m/5}} = 0.302\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esto es aproximadamente un 6% más alto que $\omega_n = 0.285\sqrt{k/m}$, la frecuencia exacta del sistema se determinará en el capítulo 12.

Ejemplo 8.7

Determine los desplazamientos máximos, las fuerzas cortantes de entrepiso y los momentos de volteo en cada nivel para el marco del ejemplo 8.6, con $m = 100$ kips/g, $k = 31.54$ kips/pulg y $h = 12$ pies (figura E8.7a), debido al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 y escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.25g.

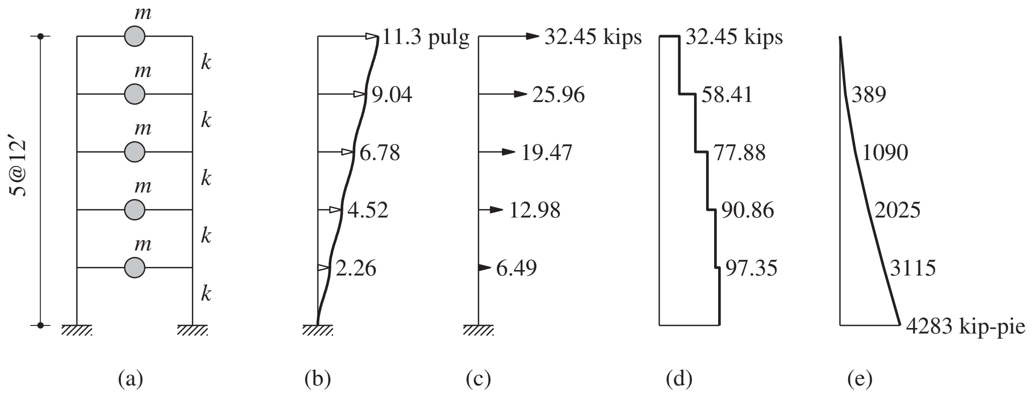


Figura E8.7

Solución

1. *Calcule el periodo natural.*

$$\omega_n = 0.302\sqrt{\frac{31.54}{100/386}} = 3.332$$

$$T_n = \frac{2\pi}{3.332} = 1.89 \text{ s}$$

2. *Determine el valor máximo de $z(t)$.* Para $T_n = 1.89$ s y $\zeta = 0.05$, el espectro de diseño da $A/\text{g} = 0.25(1.80/1.89) = 0.238$ y $D = A/\omega_n^2 = 8.28$ pulg. El valor máximo de $z(t)$ es

$$z_o = \tfrac{15}{11}D = \tfrac{15}{11}(8.28) = 11.3 \text{ pulg}$$

3. *Determine los valores máximos u_{jo} de los desplazamientos del nivel.*

$$u_{jo} = \psi_j z_o \qquad \psi_j = \frac{j}{5}$$

Por lo tanto, $u_{1o} = 2.26$, $u_{2o} = 4.52$, $u_{3o} = 6.78$, $u_{4o} = 9.04$ y $u_{5o} = 11.3$, todo en pulgadas (figura E8.7b).

4. *Determine las fuerzas estáticas equivalentes.*

$$f_{jo} = \tilde{\Gamma} m_j \psi_j A = \tfrac{15}{11} m \psi_j (0.238\text{g}) = 32.45\psi_j \text{ kips}$$

Estas fuerzas se muestran en la figura E8.7c.

5. *Calcule las fuerzas cortantes de entrepiso y los momentos de volteo en cada nivel.* El análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas externas en los niveles, ecuación (8.4.16), proporciona las fuerzas cortantes de entrepiso (figura E8.7d) y los momentos de volteo (figura E8.7e) en los niveles. Si se tuviera interés sólo en las fuerzas sobre la base, éstas podrían calcularse directamente a partir de la ecuación (8.4.17). En particular, el cortante basal es

$$V_{bo} = \tilde{L}\tilde{\Gamma} A = (3m)\tfrac{15}{11}(0.238\text{g})$$

$$= 0.195(5m\text{g}) = 97.35 \text{ kips}$$

Esto es, 19.5% del peso total del edificio.

8.5 FRECUENCIA DE VIBRACIÓN NATURAL POR EL MÉTODO DE RAYLEIGH

Aunque el principio de los desplazamientos virtuales proporciona un resultado aproximado a la frecuencia de vibración natural (ecuaciones 8.3.15 y 8.4.13) de cualquier estructura, resulta instructivo obtener el mismo resultado mediante otro método, desarrollado por Lord Rayleigh. El método de Rayleigh se publicó en 1873 a partir del principio de la conservación de la energía. En la presente sección se aplica este método a los sistemas de masa y resorte, de masa distribuida y de masa concentrada.

8.5.1 Sistema de masa y resorte

Cuando un sistema de 1GDL con una masa concentrada m y una rigidez k es perturbado de su posición de equilibrio, oscila en su frecuencia de vibración natural ω_n y su ecuación de movimiento $\omega_n = \sqrt{k/m}$ puede resolverse de la manera mostrada en la sección 2.1. Ahora se obtendrá el mismo resultado utilizando el principio de la conservación de la energía.

El movimiento armónico simple de un sistema de masa y resorte que vibra libremente, ecuación (2.1.3), puede describirse en forma conveniente al definir una nueva variable de tiempo t', con su origen como se muestra en la figura 8.5.1a:

$$u(t') = u_o \operatorname{sen} \omega_n t' \tag{8.5.1}$$

donde debe determinarse la frecuencia ω_n y la amplitud del movimiento u_o está dada por la ecuación (2.1.9). La velocidad de la masa, que se muestra en la figura 8.5.1b, es

$$\dot{u}(t') = \omega_n u_o \cos \omega_n t' \tag{8.5.2}$$

La energía potencial del sistema es la energía de deformación en el resorte, que es proporcional al cuadrado de la deformación u del resorte (ecuación 2.3.2). Por lo tanto, la energía

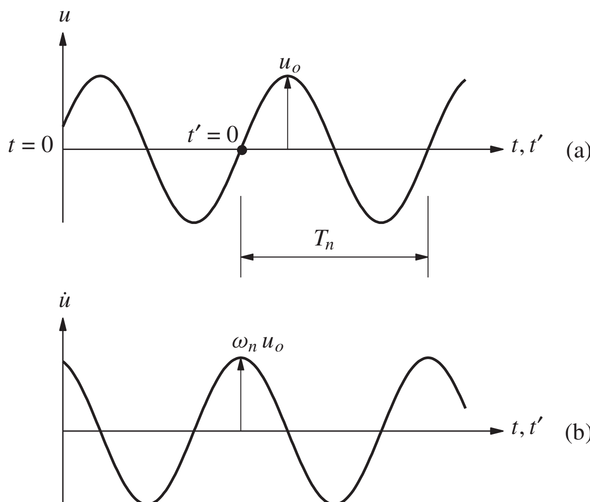


Figura 8.5.1 Movimiento armónico simple de un sistema que vibra libremente: (a) desplazamiento; (b) velocidad.

de deformación es máxima en $t' = T_n/4$ (también en $t' = 3T_n/4, 5T_n/4, ...$) cuando $u(t) = u_o$ y está dada por

$$E_{So} = \tfrac{1}{2}ku_o^2 \tag{8.5.3}$$

Ésta también es la energía total del sistema, porque en este t' la velocidad es cero (figura 8.5.1b), lo que implica que la energía cinética es cero.

La energía cinética del sistema es proporcional al cuadrado de la velocidad de la masa $\dot{u}$ (ecuación 2.3.2). Por lo tanto, la energía cinética es máxima en $t' = 0$ (también en $t' = T_n/2, 3T_n/2, \ldots$) cuando la velocidad $\dot{u}(t) = \omega_n u_o$ y está dada por

$$E_{Ko} = \tfrac{1}{2}m\omega_n^2 u_o^2 \tag{8.5.4}$$

Ésta también es la energía total del sistema, porque en este t', la deformación es igual a cero (figura 8.5.1a), lo que implica que la energía de deformación es cero.

El principio de la conservación de la energía establece que la energía total en un sistema en vibración libre sin amortiguamiento es constante (es decir, que no varía con el tiempo), como se muestra mediante la ecuación (2.3.5). Así, las dos expresiones alternativas, E_{Ko} y E_{So}, para la energía total deben ser iguales, lo que conduce al resultado importante:

$$\text{energía cinética máxima, } E_{Ko} = \text{energía potencial máxima, } E_{So} \tag{8.5.5}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (8.5.3) y (8.5.4), resulta

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8.5.6}$$

Éste es el mismo resultado para la frecuencia de vibración natural que la ecuación (2.1.4) obtenida al resolver la ecuación de movimiento.

El método de Rayleigh no proporciona ninguna ventaja significativa al obtener la frecuencia natural de vibración de un sistema de masa y resorte, pero el concepto subyacente de la conservación de la energía es útil para los sistemas complejos, como se muestra en las dos secciones siguientes.

8.5.2 Sistemas con masa y elasticidad distribuidas

Como una ilustración de tal sistema, considere la torre en voladizo de la figura 8.3.1 que vibra libremente en un movimiento armónico simple:

$$u(x, t') = z_o \operatorname{sen} \omega_n t' \psi(x) \tag{8.5.7}$$

donde $\psi(x)$ es una función de forma supuesta que define el modo en que se dan las deflexiones, z_o es la amplitud de la coordenada generalizada $z(t)$ y ω_n es la frecuencia natural de vibración que debe determinarse. La velocidad de la torre es

$$\dot{u}(x, t') = \omega_n z_o \cos \omega_n t' \psi(x) \tag{8.5.8}$$

La energía potencial máxima del sistema en un ciclo de vibración es igual a su energía de deformación asociada con el desplazamiento máximo $u_o(x)$:

$$E_{So} = \int_0^L \tfrac{1}{2} EI(x)[u_o''(x)]^2\, dx \tag{8.5.9}$$

La energía cinética máxima del sistema en un ciclo de vibración está asociada con la velocidad máxima $\dot{u}_o(x)$:

$$E_{Ko} = \int_0^L \tfrac{1}{2} m(x)[\dot{u}_o(x)]^2 \, dx \tag{8.5.10}$$

A partir de las ecuaciones (8.5.7) y (8.5.8), $u_o(x) = z_o\psi(x)$ y $\dot{u}_o(x) = \omega_n z_o \psi(x)$. Si estas expresiones se sustituyen en las ecuaciones (8.5.9) y (8.5.10), y se iguala E_{Ko} con E_{So}, resulta

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 \, dx}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 \, dx} \tag{8.5.11}$$

Esto se conoce como el *cociente de Rayleigh* para un sistema con masa y elasticidad distribuidas; recuerde que se obtuvo el mismo resultado, ecuación (8.3.15), usando el principio de los desplazamientos virtuales. El cociente de Rayleigh es válido para cualquier frecuencia de vibración natural de un sistema con varios grados de libertad, aunque su mayor utilidad es en la determinación de la frecuencia más baja o frecuencia fundamental.

8.5.3 Sistemas con masas concentradas

Como una ilustración de tal sistema, considere el edificio de cortante de la figura 8.4.1 que vibra libremente en un movimiento armónico simple,

$$\mathbf{u}(t') = z_o \operatorname{sen} \omega_n t' \boldsymbol{\psi} \tag{8.5.12}$$

donde ψ es un vector de forma supuesto que define el modo en que se dan las deflexiones, z_o es la amplitud de la coordenada generalizada $z(t)$ y ω_n es la frecuencia de vibración natural que debe determinarse. Las velocidades de las masas concentradas del sistema están dadas por el vector

$$\dot{\mathbf{u}}(t') = \omega_n z_o \cos \omega_n t' \psi \tag{8.5.13}$$

La energía potencial máxima del sistema en un ciclo de vibración es igual a su energía de deformación asociada con los desplazamientos máximos, $\mathbf{u}_o = \langle u_{1o} \;\; u_{2o} \ldots u_{No} \rangle^T$:

$$E_{So} = \sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{2} k_j \left(u_{jo} - u_{j-1,o} \right)^2 \tag{8.5.14}$$

La energía cinética máxima del sistema en un ciclo de vibración está asociada con las velocidades máximas, $\dot{\mathbf{u}}_o = \langle \dot{u}_{1o} \quad \dot{u}_{2o} \quad \cdots \quad \dot{u}_{No} \rangle^T$:

$$E_{Ko} = \sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_j \dot{u}_{jo}^2 \tag{8.5.15}$$

A partir de las ecuaciones (8.5.12) y (8.5.13), $u_{jo} = z_o\psi_j$ y $\dot{u}_{jo} = \omega_n z_o \psi_j$. Si se sustituyen estas expresiones en las ecuaciones (8.5.14) y (8.5.15), y E_{Ko} se iguala con E_{So}, resulta

$$\omega_n^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{N} m_j \psi_j^2} \tag{8.5.16a}$$

Al reescribir esto en notación matricial da

$$\omega_n^2 = \frac{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}}{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}} \tag{8.5.16b}$$

La expresión anterior es el *cociente de Rayleigh* para un edificio de cortante con N masas concentradas; recuerde que se obtuvo el mismo resultado, ecuación (8.4.13), mediante el principio de los desplazamientos virtuales.

8.5.4 Propiedades del cociente de Rayleigh

El método de Rayleigh es muy útil para estimar la frecuencia de vibración natural más baja o fundamental de un sistema; lo anterior se debe a las propiedades del cociente de Rayleigh que se presentan de manera más formal en la sección 10.12, pero que aquí se describen sólo de manera conceptual: en primer lugar, la frecuencia aproximada obtenida a partir de una función de forma supuesta nunca es menor que el valor exacto. En segundo lugar, el cociente de Rayleigh ofrece excelentes estimaciones de la frecuencia fundamental, incluso con una función de forma mediocre.

Estas propiedades se examinarán en el contexto de un sistema específico, la torre en voladizo considerada en el ejemplo 8.2. Su frecuencia fundamental puede expresarse como $\omega_n = \alpha_n \sqrt{EI/mL^4}$ [vea la ecuación (d) del ejemplo 8.2]. En la tabla 8.5.1 se resumen tres diferentes estimaciones de α_n utilizando tres diferentes funciones de forma. La segunda estimación de frecuencia proviene del ejemplo 8.2. El mismo procedimiento conduce a los resultados para las otras dos funciones de forma. El porcentaje de error mostrado es relativo al valor exacto de $\alpha_n = 3.516$ (capítulo 16).

TABLA 8.5.1 ESTIMACIONES DE LA FRECUENCIA NATURAL PARA UN VOLADIZO UNIFORME

$\psi(x)$	α_n	% error
$3x^2/2L^2 - x^3/2L^3$	3.57	1.5
$1 - \cos(\pi x/2L)$	3.66	4
x^2/L^2	4.47	27

De acuerdo con las propiedades del cociente de Rayleigh, las tres estimaciones de la frecuencia natural son mayores que su valor exacto. Incluso si no se conoce el valor exacto, como sería el caso de los sistemas complejos, es posible decir que el valor más pequeño, $\alpha_n = 3.57$, es la mejor de las tres estimaciones de la frecuencia natural. Este concepto puede utilizarse para establecer la frecuencia *exacta* de un sistema de dos GDL al disminuir al mínimo el cociente de Rayleigh sobre un parámetro de la función de forma.

¿Por qué hay un error tan grande en el tercer caso de la tabla 8.5.1? La función de forma $\psi(x) = x^2/L^2$ satisface las condiciones de frontera del desplazamiento en la base de la torre, pero viola una condición de frontera vigente en el extremo libre. La función implica un momento flexionante constante a lo largo de la altura de la torre, pero un momento flexionante en el extremo libre de un cantiliver es poco realista a menos que haya una masa

con un momento de inercia en dicho extremo. Por lo tanto, una función de forma que sólo satisface las condiciones de contorno geométricas, no siempre garantiza un resultado preciso de la frecuencia natural.

Una estimación de la frecuencia de vibración natural de un sistema obtenido usando el cociente de Rayleigh puede mejorarse mediante métodos iterativos. Tales métodos se desarrollan en el capítulo 10.

8.6 SELECCIÓN DE LA FUNCIÓN DE FORMA

La precisión de la frecuencia de vibración natural estimada utilizando el cociente de Rayleigh depende por completo de la función de forma supuesta para aproximar la forma de un modo exacto. En principio, puede seleccionarse cualquier forma que satisfaga las condiciones de frontera del desplazamiento y la fuerza. En esta sección se aborda el cuestionamiento de cómo puede seleccionarse una función de forma razonable que garantice buenos resultados.

Para este fin, resulta útil identificar las propiedades de la forma del modo exacto. En vibración libre los desplazamientos están dados por la ecuación (8.5.7) y las fuerzas de inercia asociadas son

$$f_I(x,t) = -m(x)\ddot{u}(x,t') = \omega_n^2 z_o m(x)\psi(x) \text{ sen } \omega_n t'$$

Si $\psi(x)$ fuese la forma del modo exacto, la aplicación estática de estas fuerzas de inercia en cada instante de tiempo produciría las deformaciones indicadas por la ecuación (8.5.7), un resultado que será evidente en el capítulo 16. Este concepto no es útil para evaluar la forma del modo exacto $\psi(x)$, puesto que las fuerzas de inercia involucran esta forma desconocida. Sin embargo, sugiere que una función de forma aproximada ψ(x) puede determinarse como la forma modificada debida a las fuerzas estáticas $p(x) = m(x)\tilde{\psi}(x)$, donde $\tilde{\psi}(x)$ es cualquier aproximación razonable de la forma del modo exacto.

En general, este procedimiento para seleccionar la función de forma implica un esfuerzo de cálculo más allá de lo necesario, puesto que, como se mencionó anteriormente, el método de Rayleigh ofrece una excelente precisión incluso si la función de forma es mediocre. Sin embargo, el análisis anterior respalda el concepto de establecer la función de forma a partir de las deflexiones debidas a un conjunto seleccionado de fuerzas estáticas. Una selección común para estas fuerzas es el peso de la estructura aplicado en una dirección apropiada; para la torre en voladizo, sería la dirección lateral (figura 8.6.1a). Esta selección es equivalente a tomar $\tilde{\psi}(x) = 1$ en $p(x) = m(x)\tilde{\psi}(x)$. Otra selección incluye varias fuerzas concentradas como se muestra en la figura 8.6.1b.

Las condiciones de frontera del desplazamiento y la fuerza se satisfacen automáticamente si la función de forma se determina a partir de las deflexiones estáticas debidas a un conjunto seleccionado de fuerzas. Esta elección de la función de forma tiene la ventaja adicional de que la energía de deformación puede calcularse como el trabajo realizado por las fuerzas estáticas al producir las deflexiones, un enfoque que suele ser más simple que la ecuación (8.5.9). Por lo tanto, la energía de deformación máxima del sistema asociado con las fuerzas $p(x)$ en la figura 8.6.1a es

$$E_{So} = \frac{1}{2}\int_0^L p(x)u(x)\,dx$$

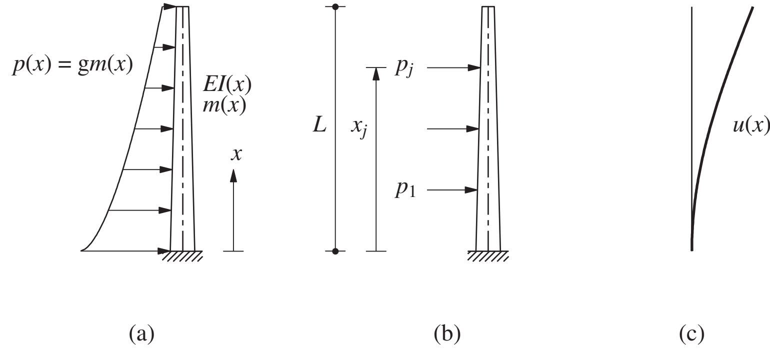


Figura 8.6.1 Función de forma a partir de las deflexiones debidas a fuerzas estáticas.

Si se iguala esta E_{So} con la E_{Ko} de la ecuación (8.5.10) considerando $\dot{u}_o(x) = \omega_n u_o(x)$ y se descarta el subíndice "*o*", resulta

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L p(x)u(x)\,dx}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2\,dx} \tag{8.6.1}$$

Esta ecuación con $p(x) = p_o$ (es decir, con las fuerzas uniformemente distribuidas) aparece en código de la AASHTO (Asociación Americana de Carreteras Estatales y Organismos de Transporte) para estimar la frecuencia natural fundamental de un puente.

Para $p(x) = \mathrm{g}m(x)$ en la figura 8.6.1a, la ecuación (8.6.1) se convierte en

$$\omega_n^2 = \mathrm{g}\frac{\int_0^L m(x)u(x)\,dx}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2\,dx} \tag{8.6.2}$$

De manera similar, la energía de deformación máxima del sistema asociado con las deflexiones $u(x)$ debidas a las fuerzas de la figura 8.6.1b es

$$E_{So} = \tfrac{1}{2}\sum p_j u(x_j)$$

Si se iguala esta E_{So} con la E_{Ko} de la ecuación (8.5.10), resulta

$$\omega_n^2 = \frac{\sum p_j u(x_j)}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2\,dx} \tag{8.6.3}$$

Aunque atractiva en principio, la selección de la función de forma como las deflexiones estáticas debidas a un conjunto de fuerzas puede ser complicada para la torre no uniforme (*EI* variable) que se muestra en la figura 8.6.1a. Un enfoque conveniente consiste en determinar las deflexiones estáticas de una torre uniforme (*EI* constante) con la misma longitud y usar la función de forma resultante para la torre no uniforme. Sin embargo, se le recuerda al lector que resulta complicado hacer un análisis para establecer las formas modificadas, con el fin de obtener una frecuencia natural extremadamente precisa. El principal atractivo del método de Rayleigh reside en su capacidad para proporcionar una estimación útil de la frecuencia natural a partir de cualquier supuesto razonable sobre la función de forma que satisfaga las condiciones de frontera del desplazamiento y de la fuerza.

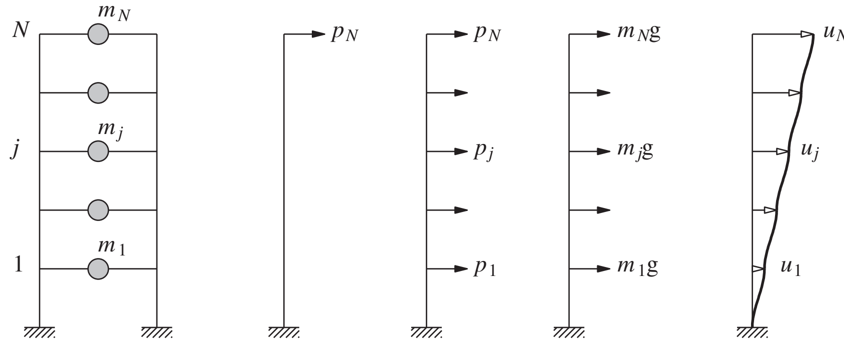


Figura 8.6.2 Función de forma a partir de las deflexiones debidas a las fuerzas estáticas.

El concepto de utilizar la función de forma como las deflexiones estáticas debidas a un conjunto seleccionado de fuerzas, también es útil para los sistemas de masa agrupada. En la figura 8.6.2 se muestran tres conjuntos de fuerzas que pueden utilizarse para el marco de un edificio de varios niveles. La energía de deformación máxima del sistema asociado con las deflexiones u_j en los tres casos es

$$E_{So} = \tfrac{1}{2} p_N u_N \qquad E_{So} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} p_j u_j \qquad E_{So} = \tfrac{1}{2} \mathrm{g} \sum_{j=1}^{N} m_j u_j$$

Si se igualan estas E_{So} con las E_{Ko} de la ecuación (8.5.15) considerando $\dot{u}_{jo} = \omega_n u_{jo}$, y descartando el subíndice "o" y se simplifica, resulta

$$\omega_n^2 = \frac{p_N u_N}{\sum m_j u_j^2} \qquad \omega_n^2 = \frac{\sum p_j u_j}{\sum m_j u_j^2} \qquad \omega_n^2 = \frac{\mathrm{g} \sum m_j u_j}{\sum m_j u_j^2} \tag{8.6.4}$$

respectivamente. Las ecuaciones (8.6.4b) y (8.6.4c) aparecen en los códigos de construcción para estimar la frecuencia natural fundamental de un edificio (capítulo 21). A diferencia de la ecuación (8.5.16a), estos resultados no se limitan a un edificio de cortante siempre que las deflexiones se calculen utilizando las propiedades de rigidez reales del marco.

Es importante reconocer que el éxito del método de Rayleigh para estimar la frecuencia natural fundamental o más baja de una estructura, depende de la capacidad de visualizar el modo correspondiente de vibración natural que pretende aproximarse mediante la función de forma. El modo fundamental de un edificio de varios niveles o de una viga con un solo claro es fácil de visualizar debido a que todas las deflexiones de este modo tienen el mismo signo. Por su parte, la forma del modo de los sistemas más complejos puede ser difícil de visualizar, e incluso una función de forma calculada a partir de las deflexiones estáticas debidas al propio peso de la estructura, puede resultar inapropiada. Por ejemplo, considere una viga continua con dos claros. Su forma simétrica modificada por su propio peso, que se muestra en la figura 8.6.3a, no es apropiada para calcular la frecuencia natural más baja, puesto que dicha frecuencia está asociada con el modo antisimétrico mostrado en la figura 8.6.3b. Si esta forma de modo se puede visualizar, será posible aproximarla mediante las deflexiones estáticas debidas al propio peso de la viga aplicado hacia abajo en un claro y hacia arriba en el otro claro (figura 8.6.3b).

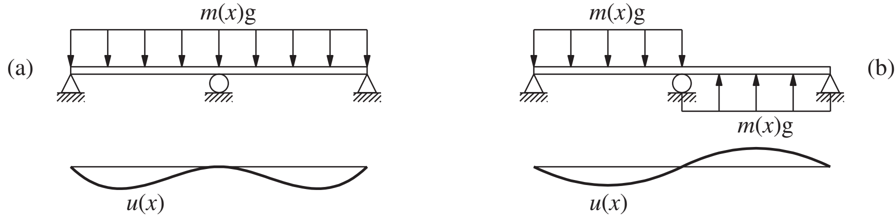


Figura 8.6.3 Funciones de forma resultantes del propio peso aplicado en las direcciones adecuadas.

Ejemplo 8.8

Estime la frecuencia natural de una viga uniforme en voladizo, suponiendo la función de forma obtenida a partir de las deflexiones estáticas debidas a una carga p en el extremo libre.

Solución

1. *Determine las deflexiones*. Con el origen en el extremo sujeto,

$$u(x) = \frac{p}{6EI}(3Lx^2 - x^3) \tag{a}$$

2. *Determine la frecuencia natural a partir de la ecuación (8.6.3).*

$$\sum_j p_j u(x_j) = pu(L) = p^2\frac{L^3}{3EI} \tag{b}$$

$$\int_0^L m(x)[u(x)]^2\,dx = m\frac{p^2}{(6EI)^2}\int_0^L (3Lx^2 - x^3)^2\,dx = \frac{11p^2}{420}\frac{mL^7}{(EI)^2} \tag{c}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (b) y (c) en la ecuación (8.6.3), resulta

$$\omega_n = \frac{3.57}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Ésta es la primera estimación de frecuencia en la tabla 8.5.1.

Ejemplo 8.9

Estime la frecuencia natural fundamental de la estructura de cinco niveles que se muestra en la figura E8.9. Suponga la función de forma obtenida a partir de las deflexiones estáticas, las cuales se deben a fuerzas laterales iguales a los pesos de los niveles $w = mg$.

Solución

1. *Determine las deflexiones debidas a las fuerzas aplicadas*. Las deflexiones estáticas se determinan, como se muestra en la figura E8.9, calculando las fuerzas cortantes de entrepiso y los desplazamientos de entrepiso resultantes en cada nivel; estos desplazamientos de entrepiso se suman desde la parte inferior hasta la superior para obtener

$$\mathbf{u}^T = \frac{w}{k}\langle 5 \quad 9 \quad 12 \quad 14 \quad 15\rangle^T$$

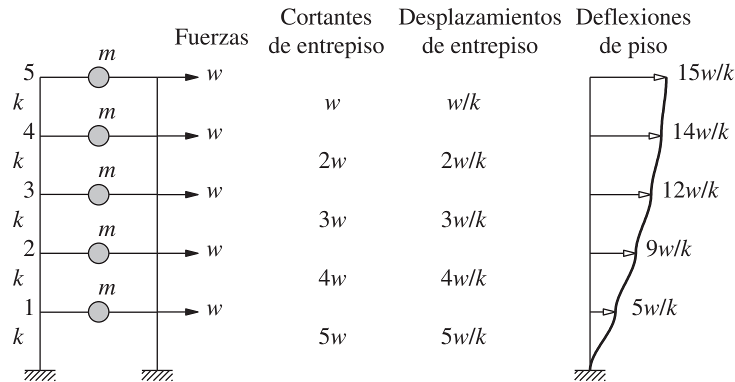


Figura E8.9

2. *Determine la frecuencia natural a partir de la ecuación (8.6.4c).*

$$\omega_n^2 = g\frac{w(w/k)(5+9+12+14+15)}{w(w/k)^2(25+81+144+196+225)} = \frac{55}{671}\frac{k}{m}$$

$$\omega_n = 0.286\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esta estimación es muy cercana al valor exacto, $\omega_{\text{exacta}} = 0.285\sqrt{k/m}$, y mejor que la estimación de una función de forma lineal (ejemplo 8.6).

LECTURA ADICIONAL

Rayleigh, J. W. S., *Theory of Sound*, Dover, Nueva York, 1945; publicado originalmente en 1894.

APÉNDICE 8: FUERZAS DE INERCIA PARA LOS CUERPOS RÍGIDOS

En la figura A8.1 se muestran las fuerzas de inercia para una barra rígida, una placa rígida rectangular y una placa rígida circular asociadas con las aceleraciones $\ddot{u}_x$, $\ddot{u}_y$ y $\ddot{\theta}$ del centro de masa (o centro de gravedad) O. Cada cuerpo rígido tiene un espesor uniforme y su masa total m se distribuye de manera uniforme, el momento de inercia I_O alrededor del eje normal a la barra o placa y que pasa a través de O es tal como se indica en la figura.

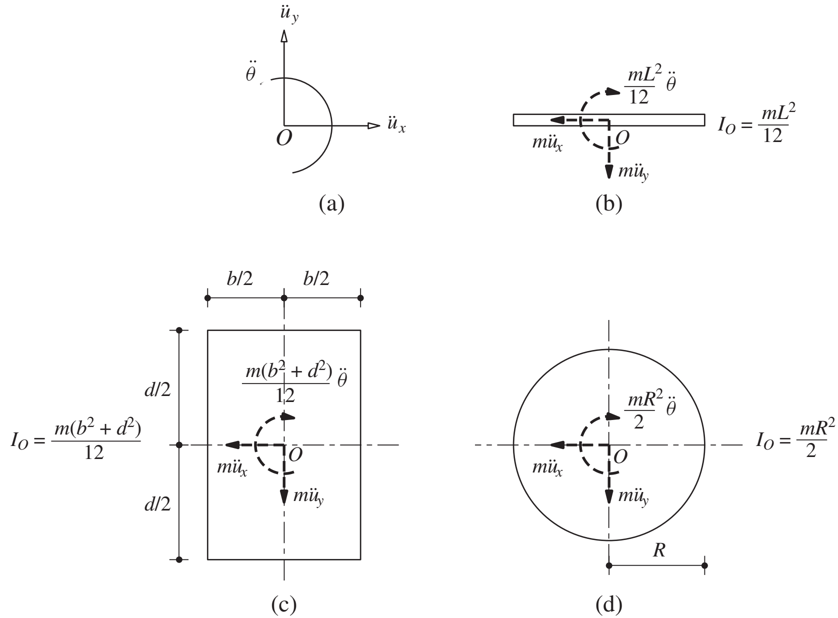


Figura A8.1 Fuerzas de inercia para placas rígidas.

PROBLEMAS

8.1 Repita los incisos (a), (b) y (c) del ejemplo 8.1 con un cambio: utilice el desplazamiento horizontal en C como la coordenada generalizada. Muestre que la frecuencia natural, la fracción de amortiguamiento y la respuesta de desplazamiento son independientes de la elección del desplazamiento generalizado.

8.2 Para el sistema de cuerpo rígido mostrado en la figura P8.2:
(a) Formule la ecuación de movimiento que rige la rotación en O.
(b) Determine la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento.
(c) Determine la respuesta de desplazamiento $u(x, t)$ a $p(t) = \delta(t)$, la función delta de Dirac.

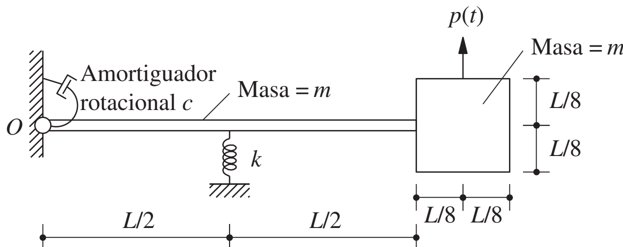


Figura P8.2

8.3 Resuelva el problema 8.2 con un cambio: utilice el desplazamiento vertical en el centro de gravedad de la placa cuadrada como el desplazamiento generalizado. Muestre que los resultados son independientes de la elección del desplazamiento generalizado.

8.4 La barra rígida de la figura P8.4 con una articulación en el centro está unida a una base viscoelástica, que puede modelarse mediante la rigidez k y el coeficiente de amortiguamiento c por unidad de longitud. Use la rotación de la barra como la coordenada generalizada y:
(a) Formule la ecuación de movimiento.
(b) Determine la frecuencia de vibración natural y la fracción de amortiguamiento.

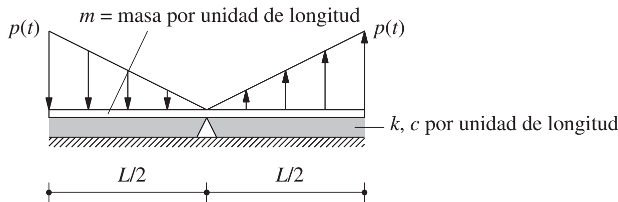


Figura P8.4

8.5 Para el sistema de cuerpo rígido que se muestra en la figura P8.5:
(a) Elija una coordenada generalizada.
(b) Formule la ecuación de movimiento.
(c) Determine la frecuencia de vibración natural y la razón de amortiguamiento.

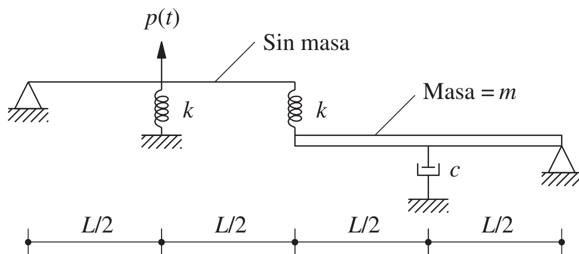


Figura P8.5

8.6 Resuelva el ejemplo 8.3 suponiendo que la función de forma modificada se debe a la fuerza lateral en la parte superior:

$$\psi(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}$$

Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes deben calcularse sólo en la base y a media altura. (Tenga en cuenta que estas fuerzas se determinaron en el ejemplo 8.3 para toda la altura de la chimenea).

8.7 Una chimenea de concreto reforzado con 600 pies de altura tiene una sección transversal hueca circular con un diámetro exterior de 50 pies en la base y 25 pies en la parte superior; el espesor de la pared es de 2 pies 6 pulg, y es uniforme en toda la altura (figura P8.7). Usando la aproxi-

mación de que el espesor de pared es pequeño en comparación con el radio, se calculan la masa y las propiedades de rigidez a la flexión a partir del área bruta del concreto (despreciando el acero de refuerzo). Se supone que la chimenea está fija en la base y se estima que su fracción de amortiguamiento es de 5%. El peso unitario del concreto es de 150 lb/pie^3 y su módulo de elasticidad $E_c = 3600$ ksi. Suponiendo que la función de forma es

$$\psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L}$$

donde L es la longitud de la chimenea y x se mide desde la base, calcule las cantidades siguientes: (**a**) las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en la base y a la mitad de la altura, y (b) la deflexión de la parte superior debida al movimiento del terreno definido por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima de 0.25g.

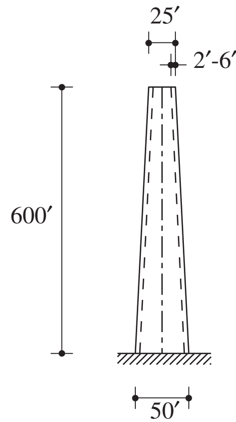


Figura P8.7

8.8 Resuelva el problema 8.7 suponiendo que la función de forma es

$$\psi(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3}$$

8.9 Resuelva el problema 8.7 para una excitación diferente: una fuerza debida a una explosión que varía linealmente en la altura desde cero en la base hasta $p(t)$ en la parte superior, donde $p(t)$ se da en la figura P8.9.

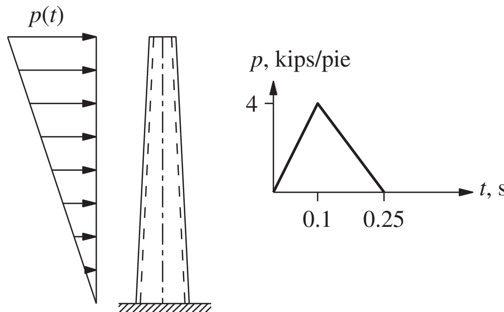


Figura P8.9

8.10- Para los marcos de cortante de tres niveles (vigas y columnas rígidas flexibles) hechos de acero
8.11 estructural (E = 29,000 ksi) que se muestran en las figuras P8.10 y P8.11, w = 100 kips, I = 1400 pulg^4 y sus fracciones de amortiguamiento modal ζ_n son de 5% para todos los modos. Si se supone que la función de forma está dada por las desviaciones debidas a las fuerzas laterales que son iguales a los pesos de cada nivel, determine los desplazamientos de los niveles, las fuerzas cortantes de entrepiso y los momentos de volteo en los niveles y en la base debidos al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.25g.

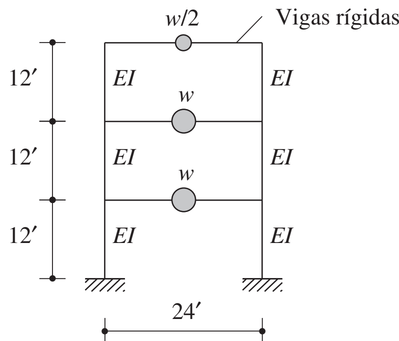


Figura P8.10

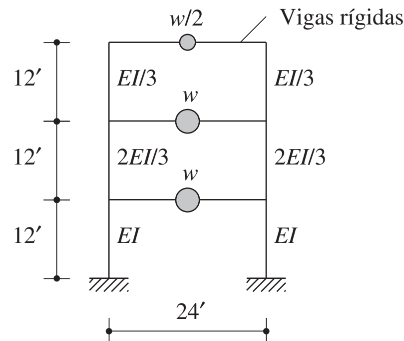


Figura P8.11

8.12- Resuelva los problemas 8.10 y 8.11 usando la función de forma dada por las deflexiones debidas
8.13 a una fuerza lateral aplicada al nivel del techo.

8.14 El marco de cinco niveles con vigas rígidas que se muestra en la figura P8.14a, está sometido a una aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$; las rigideces de entrepiso son k_j. Si se supone que los desplazamientos aumentan linealmente con la altura sobre la base (figura P8.14b), formule la ecuación de movimiento para el sistema y determine su frecuencia natural. Determine los desplazamientos de los niveles, las fuerzas cortantes de entrepiso y los momentos de volteo en cada nivel debidos al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.25g.

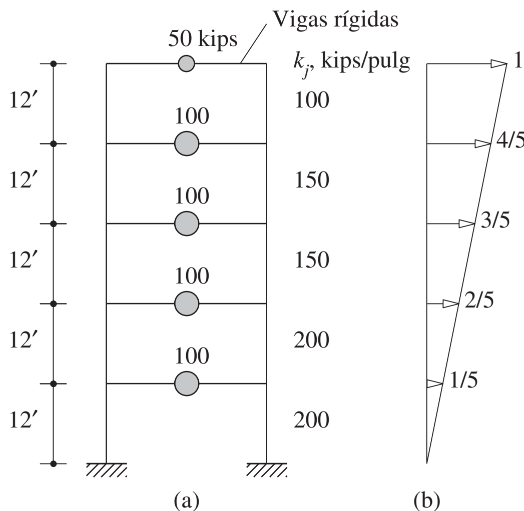


Figura P8.14

8.15 Resuelva el problema 8.14 usando la función de forma obtenida a partir de las deflexiones estáticas debidas a las fuerzas laterales iguales a los pesos de cada nivel.

8.16 Resuelva el problema 8.14 usando la función de forma dada por las deflexiones debidas a una fuerza lateral en el nivel del techo.

8.17 Determine la frecuencia de vibración natural del marco con forma de L invertida que se muestra en la figura P8.17, utilizando la función de forma dada por las deflexiones debidas a una fuerza vertical en el extremo libre. Desprecie las deformaciones debidas a las fuerzas cortantes y axiales. *EI* es constante.

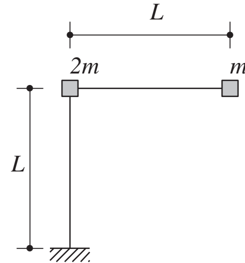


Figura P8.17

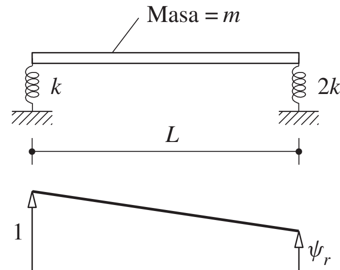


Figura P8.18

8.18 **(a)** Utilice el método de Rayleigh para determinar la frecuencia de vibración natural de una barra rígida sobre dos resortes (figura P8.18) considerando la función de forma mostrada. Tenga en cuenta que el resultado involucra a la incógnita ψ_r. Grafique el valor de ω^2_n como una función de ψ_r.

(b) Use las propiedades del cociente de Rayleigh para determinar los valores exactos de las dos frecuencias de vibración y las formas de vibración correspondientes.

8.19 La estructura en forma de paraguas que se muestra en la figura P8.19, consiste en una columna uniforme con rigidez a la flexión *EI*, la cual soporta una losa uniforme de radio *R* y masa *m*. Utilice el método de Rayleigh para determinar la frecuencia de vibración natural de la estructura. Desprecie la masa de la columna y el efecto de la fuerza axial sobre la rigidez de la columna. Suponga que la losa es rígida a la flexión y que la columna es axialmente rígida.

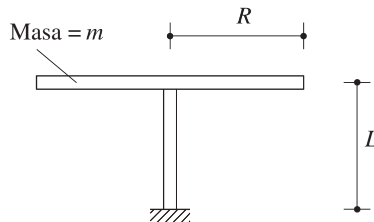


Figura P8.19

8.20 Utilice el método de Rayleigh para determinar la frecuencia de vibración natural de la viga uniforme que se muestra en la figura P8.20. Suponga que la función de forma está dada por las deflexiones debidas a una fuerza aplicada en el extremo libre.

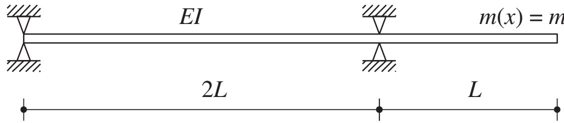


Figura P8.20

8.21 Utilice el método de Rayleigh para determinar la frecuencia de vibración natural del modo transversal en la viga cajón del puente con tres claros del ejemplo 8.5. Suponga que la función de forma está dada por las deflexiones debidas a la fuerza uniforme $p(x) = 1$ aplicada en la dirección transversal. Desprecie la rigidez torsional de los ejes.

8.22 Repita el problema 8.21 utilizando un enfoque más sencillo en el que las deflexiones sean $u(x) = u_o \operatorname{sen}(\pi x/L)$, donde u_o sea la deflexión en el centro del claro debida a la fuerza uniforme $p(x) = 1$ aplicada en la dirección transversal.

8.23 Repita el problema 8.21 utilizando un enfoque más sencillo en el que las deflexiones sean $u(x) = u_o\psi(x)$, donde u_o sea la deflexión en el centro del claro debida a la fuerza uniforme $p(x) = 1$ aplicada en la dirección transversal, y que

$$\psi(x) = \frac{16}{5}\left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right]$$

Tenga en cuenta que $\psi(x)$ es la forma modificada de una viga simplemente apoyada y sin elementos de apoyo, sometida a la fuerza transversal $p(x) = 1$.

8.24 Repita el problema 8.21 con un cambio: considere la rigidez a la torsión de los ejes.

8.25 Un puente simplemente apoyado con un solo claro de L pies tiene una cubierta con sección transversal uniforme de masa m por unidad de longitud y rigidez a la flexión EI. Una fuerza p_o por unidad de longitud muy larga y distribuida de manera uniforme (que representa a un tren muy largo) viaja por el puente a una velocidad uniforme v (figura P8.25). Determine una ecuación para la deflexión en el centro del claro como una función del tiempo. Desprecie el amortiguamiento y suponga que la función de forma es $\psi(x) = \operatorname{sen}(\pi x/L)$.

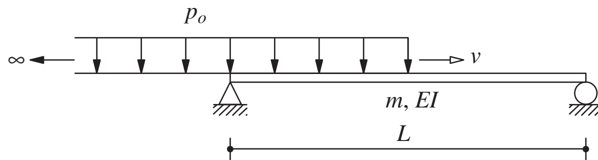


Figura P8.25

8.26 Una fuerza pulsante $p(t) = p_o \cos \omega t$ viaja a través del puente de la figura P8.25 a una velocidad uniforme v, tal como se muestra en la figura P8.26. Determine una ecuación para la deflexión en el centro del claro como una función del tiempo. Desprecie el amortiguamiento y suponga que la función de forma es $\psi(x) = \operatorname{sen}(\pi x/L)$.

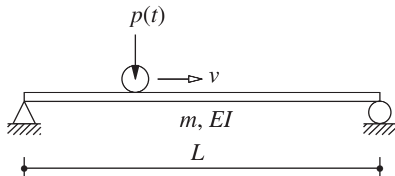


Figura P8.26

PARTE II

Sistemas de varios grados de libertad



9

Ecuaciones de movimiento, planteamiento del problema y métodos de solución

AVANCE

En este primer capítulo de la parte II los problemas de la dinámica estructural se formulan para estructuras discretizadas como sistemas con un número finito de grados de libertad. Primero se desarrollan ecuaciones de movimiento para un sistema simple de varios grados de libertad (VGDL); se selecciona un marco de cortante de dos niveles para permitir una visualización sencilla de las fuerzas elásticas, de amortiguamiento y de inercia. Después, se presenta una formulación general para los sistemas de VGDL sometidos a fuerzas externas o a movimientos del terreno inducidos por los sismos. Más adelante, se ilustra esta formulación general mediante algunos ejemplos y se aplica al desarrollo de las ecuaciones de movimiento para edificios de varios niveles; primero para edificios de planta simétrica y luego para edificios de planta asimétrica. Posteriormente, la formulación para el análisis de la respuesta sísmica se extiende a los sistemas sometidos a un movimiento del terreno espacialmente variable y a los sistemas inelásticos. El capítulo termina con una descripción general de los métodos para resolver las ecuaciones diferenciales que controlan el movimiento de una estructura y de cómo está organizado este estudio del análisis dinámico de los sistemas de VGDL.

9.1 SISTEMA SENCILLO: EDIFICIO CORTANTE DE DOS NIVELES

En primer lugar se formulan las ecuaciones de movimiento para el sistema de VGDL más sencillo posible, un marco muy idealizado de dos niveles sometido a las fuerzas externas $p_1(t)$ y $p_2(t)$ (figura 9.1.1a). En esta idealización, los sistemas de vigas y pisos son rígidos (demasiado rígidos) a la flexión y se desprecian varios factores: la deformación axial de las vigas y las columnas, y el efecto de la fuerza axial sobre la rigidez de las columnas. Aunque esta idealización de marco o edificio de cortante es poco realista, resulta conveniente para ilustrar cómo se desa-

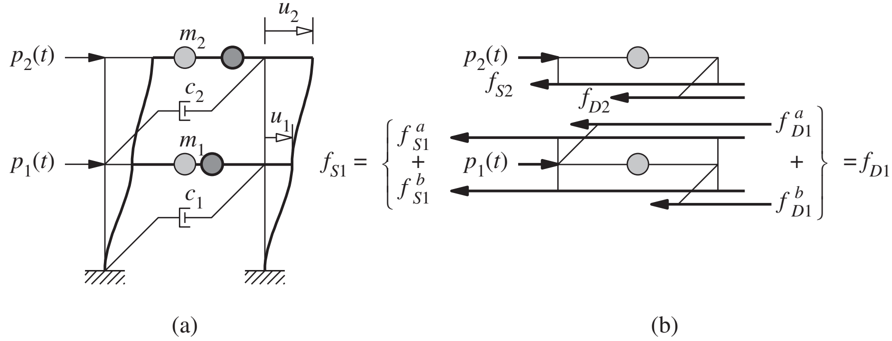


Figura 9.1.1 (a) Marco de cortante de dos niveles; (b) fuerzas que actúan sobre las dos masas.

rrollan las ecuaciones de movimiento para un sistema de VGDL. Más adelante, la formulación se extenderá a idealizaciones más realistas de los edificios que tienen en cuenta la flexión y las rotaciones de los nudos, así como a otras estructuras distintas a los edificios.

La masa se distribuye en todo el edificio, pero se idealizará como si estuviera concentrada en los niveles de los pisos. Este supuesto suele ser apropiado para edificios con varios niveles, porque la mayor parte de la masa del edificio se encuentra, en efecto, al nivel de los pisos.

Del mismo modo que en los sistemas de 1GDL (capítulo 1), se supone que la disipación de energía en una estructura se representa por un mecanismo de amortiguamiento viscoso lineal. Si la disipación de energía se asocia con las deformaciones en cada entrepiso, los amortiguadores viscosos pueden visualizarse de la manera mostrada.

El número de desplazamientos independientes, requerido para definir las posiciones desplazadas de todas las masas en relación con su posición de equilibrio original, se denomina número de grados de libertad. El marco de dos niveles de la figura 9.1.1a, con una masa concentrada al nivel de cada piso, tiene dos grados de libertad: los desplazamientos laterales u_1 y u_2 de los dos niveles en la dirección del eje x.

9.1.1 Uso de la Segunda ley del movimiento de Newton

Las fuerzas que actúan sobre cada nivel de masa m_j se muestran en la figura 9.1.1b. Éstas incluyen la fuerza externa $p_j(t)$, la fuerza restauradora elástica (o inelástica) f_{Sj}, y la fuerza de amortiguamiento f_{Dj}. La fuerza externa se considera positiva a lo largo de la dirección positiva del eje x. Las fuerzas elástica y de amortiguamiento mostradas actúan en la dirección opuesta, ya que son las fuerzas internas que se resisten a los movimientos.

Entonces, la Segunda ley del movimiento de Newton da para cada masa:

$$p_j - f_{Sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \quad \text{o} \quad m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_j(t) \tag{9.1.1}$$

La ecuación (9.1.1) contiene dos ecuaciones para $j = 1$ y 2, las cuales pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \tag{9.1.2}$$

La ecuación (9.1.2) puede escribirse en forma compacta como

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \tag{9.1.3}$$

mediante la introducción de la siguiente notación:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{f}_S = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

donde **m** es la *matriz de masa* para el marco de cortante de dos niveles.

Si se supone un comportamiento lineal, las fuerzas elásticas restauradoras $\mathbf{f}_S$ se relacionan enseguida con los desplazamientos **u** de los niveles. Para este fin se introduce la rigidez lateral k_j del j-ésimo entrepiso; ésta relaciona el cortante V_j del entrepiso con su deformación o desplazamiento relativo, $\Delta_j = u_j - u_{j-1}$, mediante

$$V_j = k_j \, \Delta_j \tag{9.1.4}$$

La rigidez del entrepiso es la suma de las rigideces laterales de todas las columnas de tal entrepiso. Para un entrepiso de altura h y una columna con módulo E y segundo momento de área I_c, la rigidez lateral de una columna con extremos empotrados, implícita en la idealización de un edificio de cortante, es $12EI_c/h^3$. Así, la rigidez del entrepiso es

$$k_j = \sum_{\text{columnas}} \frac{12EI_c}{h^3} \tag{9.1.5}$$

Al haber definido las rigideces de los entrepisos, es posible relacionar las fuerzas elásticas restauradoras f_{S1} y f_{S2} con los desplazamientos del nivel, u_1 y u_2. La fuerza f_{S1} en el primer nivel se compone de dos contribuciones: f_{S1}^a del entrepiso superior y $f^b{}_{S1}$ del entrepiso inferior. Por lo tanto,

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a$$

que, después de sustituir la ecuación (9.1.4) y teniendo en cuenta que $\Delta_1 = u_1$ y $\Delta_2 = u_2 - u_1$, se convierte en

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2) \tag{9.1.6a}$$

La fuerza f_{S2} en el segundo nivel es

$$f_{S2} = k_2(u_2 - u_1) \tag{9.1.6b}$$

Observe que $f^a{}_{S1}$ y f_{S2} son iguales en magnitud y opuestas en dirección porque ambas representan el cortante en el segundo entrepiso. En forma matricial, las ecuaciones (9.1.6a) y (9.1.6b) son

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u} \tag{9.1.7}$$

Así, el vector de fuerzas restauradoras elásticas $\mathbf{f}_S$ y el vector de desplazamiento **u** se relacionan a través de la *matriz de rigidez* **k** para el edificio de cortante de dos niveles.

Enseguida, las fuerzas de amortiguamiento f_{D1} y f_{D2} se relacionan con las velocidades de los niveles $\dot{u}_1$ y $\dot{u}_2$. El coeficiente de amortiguamiento del j-ésimo entrepiso c_j relaciona el cortante V_j del entrepiso debido a los efectos de amortiguamiento con la velocidad $\dot{\Delta}_j$ asociada con la deformación del entrepiso mediante

$$V_j = c_j \, \dot{\Delta}_j \tag{9.1.8}$$

De una manera similar a la ecuación (9.1.6), es posible deducir

$$f_{D1} = c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \qquad f_{D2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \tag{9.1.9}$$

En forma matricial, la ecuación (9.1.9) es

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} \tag{9.1.10}$$

El vector de la fuerza restauradora del amortiguamiento $\mathbf{f}_D$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ se relacionan a través de la *matriz de amortiguamiento* **c** para el edificio cortante de dos niveles.

Ahora, se sustituyen las ecuaciones (9.1.7) y (9.1.10) en la ecuación (9.1.3) para obtener

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{9.1.11}$$

Esta ecuación matricial representa dos ecuaciones diferenciales ordinarias que controlan los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ del marco de dos niveles sometido a las fuerzas externas dinámicas $p_1(t)$ y $p_2(t)$. Cada ecuación contiene las dos incógnitas u_1 y u_2. Por lo tanto, las dos ecuaciones están acopladas y presentadas de esta manera deben resolverse simultáneamente.

9.1.2 Equilibrio dinámico

De acuerdo con el principio de D'Alembert (capítulo 1), al incluir las fuerzas de inercia, un sistema dinámico está en equilibrio en cada instante de tiempo. Para las dos masas en el sistema de la figura 9.1.1a en la figura 9.1.2 se muestran los diagramas de cuerpo libre, incluyendo las fuerzas de inercia. Cada fuerza de inercia es igual al producto de la masa por su aceleración, y actúa en sentido opuesto a la dirección de la aceleración. A partir de los diagramas de cuerpo libre, la condición de equilibrio dinámico también da la ecuación (9.1.3), que conduce a la ecuación (9.1.11), como se mostró en la sección anterior.

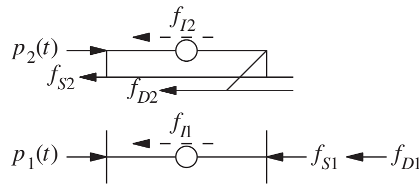


Figura 9.1.2 Diagramas de cuerpo libre.

9.1.3 Sistema de masa-resorte-amortiguador

Se ha presentado el sistema lineal de dos grados de libertad idealizando un marco de dos niveles (un enfoque que debería ser atractivo para los estudiantes de ingeniería estructural). Sin embargo, el sistema clásico de dos grados de libertad que se muestra en la figura 9.1.3a consta de dos masas conectadas mediante resortes y amortiguadores viscosos lineales, sometidas a las fuerzas externas $p_1(t)$ y $p_2(t)$. En cualquier instante de tiempo, las fuerzas que actúan sobre las dos masas son como se muestran en sus diagramas de cuerpo libre (figura 9.1.3b). Las condiciones resultantes del equilibrio dinámico también conducen a la ecuación (9.1.11), donde **u**, **m**, **c**, **k** y **p**(t) están definidas como se hizo anteriormente.

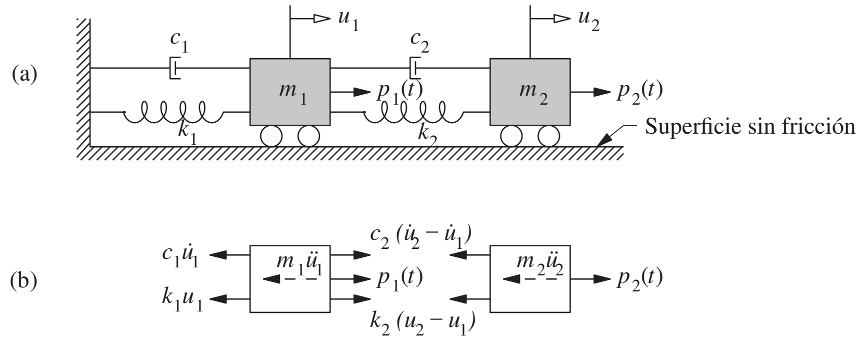


Figura 9.1.3 (a) Sistema de dos grados de libertad, (b) diagramas de cuerpo libre.

Ejemplo 9.1a

Formule las ecuaciones de movimiento para el marco de cortante de dos niveles que se muestra en la figura E9.1a.

Solución La ecuación (9.1.11) se ha especificado para este sistema a fin de obtener su ecuación de movimiento. Para ello, se observa que

$$m_1 = 2m \qquad m_2 = m$$

$$k_1 = 2\frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3} \qquad k_2 = 2\frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

Al sustituir estos datos en las ecuaciones (9.1.2) y (9.1.7), se obtienen las matrices de masa y rigidez:

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se sustituyen **m** y **k** en la ecuación (9.1.11), resultan las ecuaciones que controlan este sistema sin amortiguamiento:

$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

Observe que la matriz de rigidez es no diagonal, lo que implica que las dos ecuaciones están acopladas y que, expresadas de esta manera, deben resolverse al mismo tiempo.

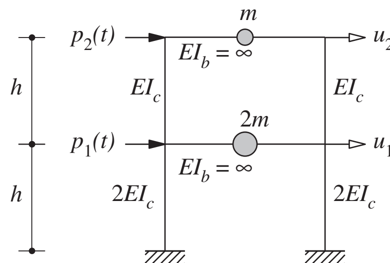


Figura E9.1a

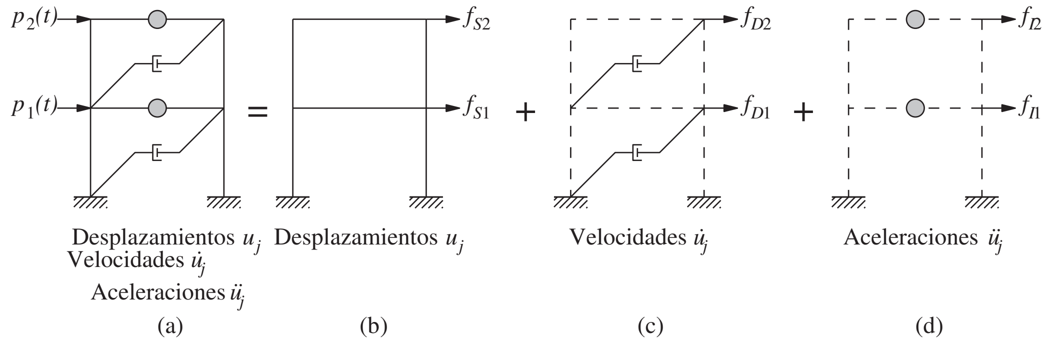


Figura 9.1.4 (a) Sistema; (b) componente de rigidez; (c) componente de amortiguamiento; (d) componente de masa.

9.1.4 Componentes de rigidez, amortiguamiento y masa

En esta sección se formulan las ecuaciones que controlan al marco de cortante de dos niveles con base en un punto de vista alternativo. Bajo la acción de las fuerzas externas $p_1(t)$ y $p_2(t)$ el estado del sistema en cualquier instante de tiempo está descrito por los desplazamientos $u_j(t)$, las velocidades $\dot{u}_j(t)$, y las aceleraciones $\ddot{u}_j(t)$, vea la figura 9.1.4a. Ahora, visualice este sistema como la combinación de tres componentes puros: (1) componente de rigidez: el marco sin amortiguamiento o masa (figura 9.1.4b); (2) componente de amortiguamiento: el marco con su propiedad de amortiguamiento, pero sin rigidez o masa (figura 9.1.4c); y (3) componente de masa: las masas de los niveles sin la rigidez o el amortiguamiento del marco (figura 9.1.4d). Las fuerzas externas f_{Sj} en el componente de rigidez se relacionan con los desplazamientos mediante la ecuación (9.1.7). De manera similar, las fuerzas externas f_{Dj} en el componente de amortiguamiento se relacionan con las velocidades mediante la ecuación (9.1.10). Por último, las fuerzas externas f_{Ij} en el componente de masa se relacionan con las aceleraciones por medio de $\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$. Por lo tanto, las fuerzas externas $\mathbf{p}(t)$ sobre el sistema pueden visualizarse como distribuidas entre los tres componentes de la estructura. Así, la suma $\mathbf{f}_S + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_I$ debe ser igual a las fuerzas $\mathbf{p}(t)$ aplicadas, lo que conduce a la ecuación (9.1.3). Este punto de vista alternativo puede parecer innecesario para el marco de cortante de dos niveles, pero puede ser útil al visualizar la formulación de las ecuaciones de movimiento para los sistemas complejos de VGDL (sección 9.2).

9.2 ENFOQUE GENERAL PARA LOS SISTEMAS LINEALES

Aunque la formulación de las ecuaciones de movimiento en las secciones anteriores es fácil de visualizar para un edificio de cortante y otros sistemas sencillos, no resulta adecuada para las estructuras complejas. Con este propósito, en esta sección se presenta un enfoque más general. Se definen tres tipos de fuerza (las fuerzas de inercia, elásticas y de amortiguamiento) y se usa la línea de razonamiento que se presenta en la sección 9.1.4 para desarrollar las ecuaciones de movimiento. Antes de definir las fuerzas, es necesario discretizar la estructura y definir los grados de libertad.

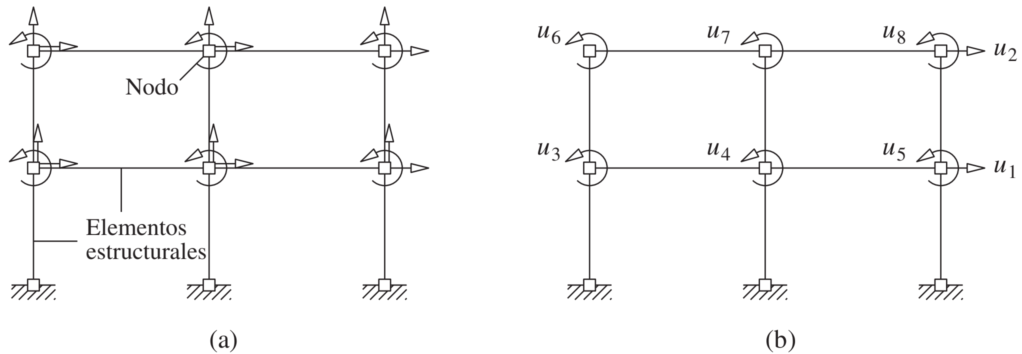


Figura 9.2.1 Grados de libertad: (a) incluyendo la deformación axial, 18 grados de libertad, (b) descartando la deformación axial, 8 grados de libertad.

9.2.1 Discretización

Una estructura reticular puede idealizarse como un conjunto de elementos (vigas, columnas, muros) interconectados en puntos nodales o nodos (figura 9.2.1a). Los desplazamientos de los nodos son los grados de libertad. En general, un nodo en un marco plano de dos dimensiones tiene tres grados de libertad (dos traslaciones y una rotación). Un nodo en un marco tridimensional tiene seis grados de libertad: tres traslaciones (las componentes x, y y z) y tres rotaciones (alrededor de los ejes x, y y z).

Por ejemplo, un marco plano de dos niveles y dos crujías tiene seis nodos y 18 grados de libertad (figura 9.2.1a). En el análisis de la mayoría de los edificios, las deformaciones axiales de las vigas pueden descartarse y las deformaciones axiales de las columnas no necesitan tomarse en cuenta para los edificios de baja altura. Con estos supuestos, el marco de dos niveles y dos crujías tiene ocho grados de libertad (figura 9.2.1b). Ésta es la idealización estructural que se utiliza para ilustrar un enfoque general en la formulación de ecuaciones de movimiento. Las fuerzas dinámicas externas se aplican sobre los nodos (figura 9.2.2). Los momentos externos del $p_3(t)$ al $p_8(t)$ son iguales a cero en la mayoría de los casos prácticos.

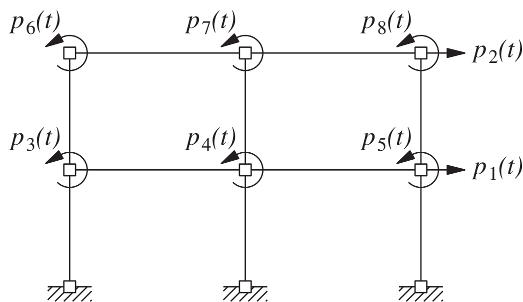


Figura 9.2.2 Fuerzas dinámicas externas, $\mathbf{p}(t)$.

9.2.2 Fuerzas elásticas

Se relacionarán las fuerzas externas f_{Sj} sobre el componente de rigidez de la estructura con los desplazamientos resultantes u_j (figura 9.2.3a). Para los sistemas lineales esta relación puede obtenerse mediante el método de superposición y el concepto de los coeficientes de influencia de rigidez.

Se aplica un desplazamiento unitario a lo largo del grado de libertad j, manteniendo los otros desplazamientos en cero, de la manera mostrada; para mantener estos desplazamientos es necesario aplicar fuerzas a lo largo de todos los grados de libertad. El *coeficiente de influencia de rigidez* k_{ij} es la fuerza requerida a lo largo del grado de libertad i debido al desplazamiento unitario en el grado de libertad j. En particular, las fuerzas k_{i1} ($i = 1, 2, \ldots, 8$) mostradas en la figura 9.2.3b son necesarias para mantener la configuración deformada que se asocia con $u_1 = 1$ y todos los demás $u_j = 0$. De manera similar, las fuerzas k_{i4} ($i = 1, 2, \ldots, 8$) mostradas en la figura 9.2.3c son necesarias para mantener la configuración deformada que se asocia con $u_4 = 1$ y todos los demás $u_j = 0$. Todas las fuerzas en la figura 9.2.3 aparecen con signo positivo, pero algunas pueden ser negativas para ser consistentes con las deformaciones impuestas.

La fuerza f_{Si} en el grado de libertad i, asociada con los desplazamientos u_j, $j = 1$ a N (figura 9.2.3a), se obtiene por superposición:

$$f_{Si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \cdots + k_{ij}u_j + \cdots + k_{iN}u_N \tag{9.2.1}$$

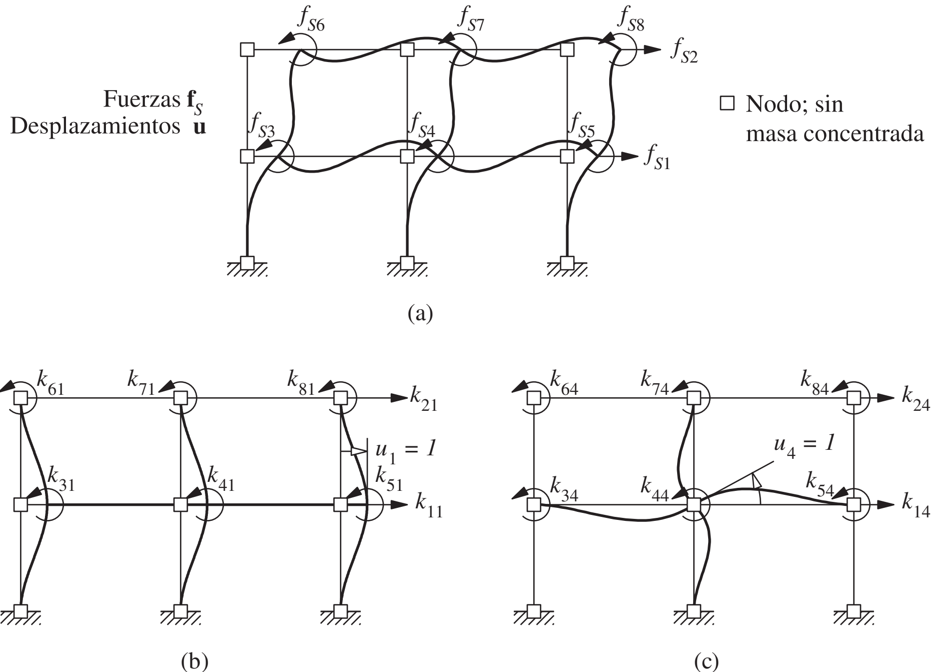


Figura 9.2.3 (a) Componente de rigidez del marco; (b) coeficientes de influencia de rigidez para $u_1 = 1$; (c) coeficientes de influencia de rigidez para $u_4 = 1$.

Para cada $i = 1$ a N existe una ecuación de ese tipo. El conjunto de N ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \tag{9.2.2}$$

o

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{ku} \tag{9.2.3}$$

donde $\mathbf{k}$ es la *matriz de rigidez* de la estructura; es una matriz simétrica (es decir, $k_{ij} = k_{ji}$).

La matriz de rigidez $\mathbf{k}$ para un sistema discretizado puede determinarse mediante varios métodos. La j-ésima columna de $\mathbf{k}$ puede obtenerse al calcular las fuerzas k_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, N$) necesarias para producir $u_j = 1$ (con todos los demás $u_i = 0$). Para las estructuras sencillas con pocos grados de libertad se pueden implementar estos cálculos mediante el método del equilibrio directo; sin embargo, no es práctico para las estructuras complejas o para su aplicación en computadora. El método que se utiliza con más frecuencia es el método de la rigidez directa, en el que se ensamblan las matrices de rigidez de los elementos individuales para obtener la matriz de rigidez de toda la estructura. Éste y otros métodos deben resultar familiares para el lector. Por lo tanto, no se desarrollarán en este libro y, para cada problema a resolver, se utilizará el método adecuado más simple.

9.2.3 Fuerzas de amortiguamiento

Como se mencionó en la sección 1.4, por lo general, los mecanismos mediante los que se disipa la energía de una estructura en vibración pueden idealizarse mediante un amortiguamiento viscoso equivalente. Con este supuesto, se relacionan las fuerzas externas f_{Dj} que actúan sobre el componente de amortiguamiento de la estructura con las velocidades $\dot{u}_j$ (figura 9.2.4). Se impone una velocidad unitaria en la dirección del grado de libertad j, mientras que las velocidades en todos los demás grados de libertad se mantienen en cero. Estas velocidades generarán fuerzas internas de amortiguamiento que se resisten a las velocidades, y se requerirían fuerzas externas para equilibrar dichas fuerzas. El *coeficiente de influencia de amortiguamiento* c_{ij} es la fuerza externa en el grado de libertad i debida a la velocidad unitaria en el grado de libertad j. La fuerza f_{Di} en el grado de libertad i asociada con las velocidades $\dot{u}_j$, $j = 1$ a N (figura 9.2.4), se obtiene por superposición:

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \cdots + c_{ij}\dot{u}_j + \cdots + c_{iN}\dot{u}_N \tag{9.2.4}$$

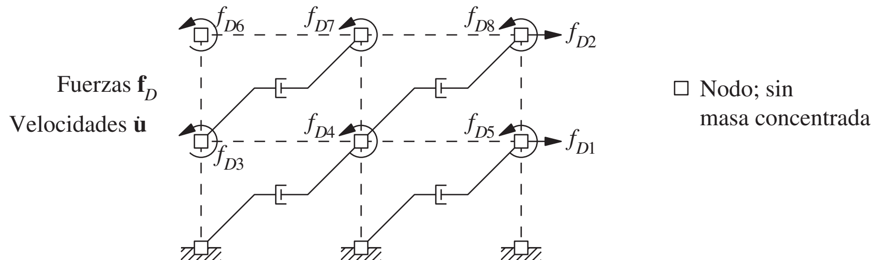


Figura 9.2.4 Componente de amortiguamiento del marco.

Al compilar todas las ecuaciones para $i = 1$ a N y escribirlas en forma matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \tag{9.2.5}$$

o

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} \tag{9.2.6}$$

donde **c** es la *matriz de amortiguamiento* para la estructura.

El cálculo de los coeficientes c_{ij} de la matriz de amortiguamiento directamente a partir de las dimensiones de la estructura y de los tamaños de los elementos estructurales no resulta práctico. Por lo tanto, los valores de amortiguamiento para sistemas de VGDL suelen especificarse mediante valores numéricos de los coeficientes de amortiguamiento, como se hace para los sistemas de 1GDL, con base en datos experimentales para estructuras similares (capítulo 11). Existen métodos para construir la matriz de amortiguamiento a partir de los coeficientes de amortiguamiento conocidos (capítulo 11).

9.2.4 Fuerzas de inercia

En esta sección se relacionarán las fuerzas externas f_{Ij} que actúan sobre el componente de masa de la estructura con las aceleraciones $\ddot{u}_j$ (figura 9.2.5a). Se aplica una aceleración unitaria a en la dirección del grado de libertad j, mientras que las aceleraciones en todos los

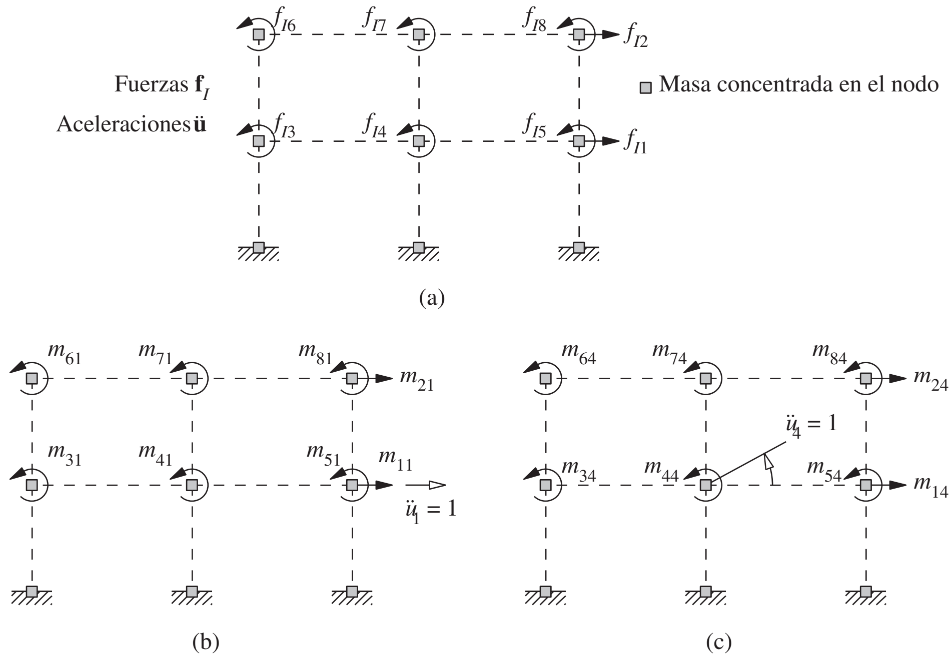


Figura 9.2.5 (a) Componente de masa del marco; (b) coeficientes de influencia de masa para $\ddot{u}_1 = 1$; (c) coeficientes de influencia de masa para $\ddot{u}_4 = 1$.

demás grados de libertad se mantienen en cero. Según el principio de D'Alembert, las fuerzas de inercia ficticias se oponen a estas aceleraciones; por lo tanto, se requerirán fuerzas externas para equilibrar estas fuerzas de inercia. El *coeficiente de influencia de masa* m_{ij} es la fuerza externa en el grado de libertad i debida a la aceleración unitaria a lo largo del grado de libertad j. En particular, las fuerzas m_{i1} ($i = 1, 2, \ldots, 8$) mostradas en la figura 9.2.5b son necesarias en los diversos grados de libertad para equilibrar las fuerzas de inercia asociadas con $\ddot{u}_1 = 1$ y todas las demás $\ddot{u}_j = 0$. De manera similar, las fuerzas m_{i4} ($i = 1, 2, \ldots, 8$) mostradas en la figura 9.2.5c están asociadas con la aceleración $\ddot{u}_4 = 1$ y todas las demás $\ddot{u}_j = 0$. La fuerza f_{Ii} en el grado de libertad i asociada con las aceleraciones $\ddot{u}_j$, $j = 1$ a N (figura 9.2.5a), se obtiene por superposición:

$$f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{ij}\ddot{u}_j + \cdots + m_{iN}\ddot{u}_N \tag{9.2.7}$$

Para cada $i = 1$ a N existe una ecuación de ese tipo. El conjunto de N ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \tag{9.2.8}$$

o

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{9.2.9}$$

donde **m** es la *matriz de masa*. Al igual que la matriz de rigidez, la matriz de masa es simétrica (es decir, $m_{ij} = m_{ji}$).

En una estructura real, la masa se distribuye en toda su longitud, pero puede idealizarse como concentrada en los nodos de la estructura discretizada; por lo general, una idealización de masa concentrada resulta satisfactoria. La masa concentrada en un nodo se determina a partir de la porción del peso que puede asignarse de manera razonable a tal nodo. Cada elemento estructural se sustituye por masas puntuales en sus dos nodos, donde la distribución de las dos masas se determina mediante el análisis estático del elemento bajo su propio peso. La masa concentrada en un nodo de la estructura es la suma de las contribuciones de las masas de todos los elementos estructurales conectados a tal nodo. Este procedimiento se ilustra de manera esquemática en la figura 9.2.6 para un marco de dos niveles y dos crujías, donde la masa de la viga incluye a la masa de la losa de piso que sostiene. Las masas concentradas en los diferentes nodos se identifican como m_a, m_b, etcétera.

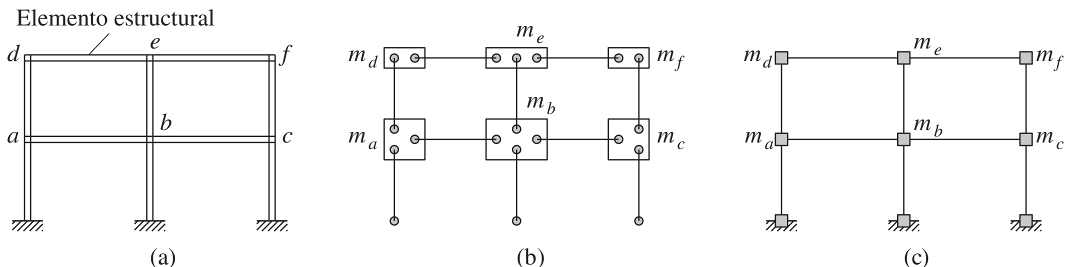


Figura 9.2.6 Concentración de masas en los nodos estructurales.

Una vez que se han calculado las masas concentradas en los nodos, la matriz de masa de la estructura puede formularse con facilidad. Considere de nuevo el marco de dos niveles y dos crujías de la figura 9.2.1b. Las fuerzas externas asociadas con la aceleración $\ddot{u}_1 = 1$ (figura 9.2.5b) son $m_{11} = m_1$, donde $m_1 = m_a + m_b + m_c$ (figura 9.2.6c) y $m_{i1} = 0$ para $i =$ 2, 3, …, 8. Del mismo modo, las fuerzas externas m_{i4} asociadas con $\ddot{u}_4 = 1$ (figura 9.2.5c) son cero para toda i, excepto, quizá, para $i = 4$. El coeficiente de m_{44} es igual a la inercia rotacional de la masa concentrada en el nodo intermedio del primer piso. Esta inercia rotacional tiene una influencia insignificante sobre la dinámica de las estructuras prácticas, por lo que se establece que $m_{44} = 0$.

Entonces, para una idealización de masa concentrada, la matriz de masa suele ser diagonal:

$$m_{ij} = 0 \qquad i \neq j \qquad\qquad m_{jj} = m_j \quad \text{o} \quad 0 \tag{9.2.10}$$

donde m_j es la masa concentrada asociada con el j-ésimo grado de libertad traslacional y $m_{jj} = 0$ para un grado de libertad de rotacional. La masa concentrada en un nodo está asociada con todos los grados de libertad traslacionales de dicho nodo: (1) los grados de libertad horizontales (x) y verticales (z) para un marco de dos dimensiones y (2) los tres grados de libertad traslacionales (x, y y z) para un marco tridimensional.

La representación de masas puede simplificarse para los edificios de varios niveles debido a los efectos restrictivos de las losas o diafragmas de piso. Por lo general, cada diafragma de piso se considera rígido en su propio plano, pero es flexible a la flexión en la dirección vertical, que es una representación razonable del comportamiento real de varios tipos de sistemas de piso (por ejemplo, el concreto colado en el sitio). La introducción de este supuesto implica que ambos grados de libertad horizontales (x y y) de todos los nodos en un nivel están relacionados con los tres grados de libertad de cuerpo rígido del diafragma de piso en su propio plano. Estos tres grados de libertad del diafragma del j-ésimo nivel, definidos en el centro de la masa, son las traslaciones u_{jx} y u_{jy} en las direcciones x y y, y la rotación $u_{j\theta}$ alrededor del eje vertical (figura 9.2.7). Por lo tanto, la masa debe definirse sólo en estos grados de libertad y no necesita identificarse por separado para cada nodo. La masa del diafragma proporciona la masa asociada con los grados de libertad u_{jx} y u_{jy}, y el momento de inercia del diafragma alrededor del eje vertical a través de O da la masa asociada con el grado de libertad $u_{j\theta}$. La masa del diafragma debe incluir las contribuciones de la carga muerta y la carga viva sobre el diafragma, de los elementos estructurales (columnas, muros, etcétera) y de los elementos no estructurales (muros divisorios, acabados arquitectónicos, etcétera) entre los pisos.

La idealización de masas para un edificio de varios niveles se complica si el diafragma de piso no puede suponerse rígido en su propio plano (por ejemplo, en un sistema de piso con viguetas de madera y láminas de madera contrachapada). La masa del diafragma debe entonces asignarse a los nodos individuales. Las cargas muertas y vivas distribuidas al nivel

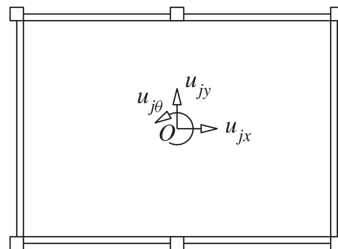


Figura 9.2.7 Grados de libertad para un diafragma de piso rígido en el plano, con masa distribuida.

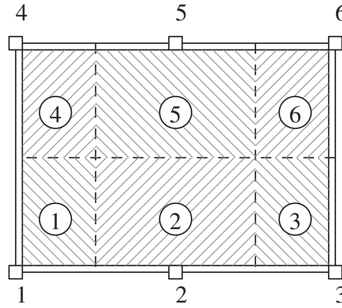


Figura 9.2.8 Áreas tributarias para distribuir la masa de un diafragma en los nodos.

del piso se asignan a los nodos en ese piso de acuerdo con sus áreas tributarias correspondientes (figura 9.2.8). Del mismo modo, los pesos distribuidos de los elementos estructurales y no estructurales en los entrepisos deben distribuirse en los nodos en las partes superior e inferior del nivel de acuerdo a la estática. Además, en la formulación de las propiedades de rigidez de la estructura, también debe reconocerse la flexibilidad del diafragma; para este propósito, el método de los elementos finitos (capítulo 17) es eficaz en la idealización de diafragmas flexibles.

9.2.5 Ecuaciones de movimiento: fuerzas externas

Ahora se escribirán las ecuaciones de movimiento para un sistema de VGDL sometido a las fuerzas dinámicas externas $p_j(t)$, $j = 1$ a N. La respuesta dinámica de la estructura a esta excitación está definida por los desplazamientos $u_j(t)$, las velocidades $\dot{u}_j(t)$ y las aceleraciones $\ddot{u}_j(t)$, $j = 1$ a N. Como se mencionó en la sección 9.1.4, las fuerzas externas $\mathbf{p}(t)$ pueden visualizarse como distribuidas entre los tres componentes de la estructura: $\mathbf{f}_S(t)$ para los componentes de rigidez (figura 9.2.3a), $\mathbf{f}_D(t)$ para el componente de amortiguamiento (figura 9.2.4), y $\mathbf{f}_I(t)$ para el componente de masa (figura 9.2.5a). Así,

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \tag{9.2.11}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (9.2.3), (9.2.6) y (9.2.9) en la ecuación (9.2.11), resulta

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{9.2.12}$$

Éste es un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias que controlan los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ debidos a las fuerzas $\mathbf{p}(t)$ aplicadas. La ecuación (9.2.12) es el equivalente para VGDL de la ecuación (1.5.2) para un sistema de 1GDL; cada término en la ecuación escalar de 1GDL se ha convertido en un vector o una matriz de orden N, el número de grados de libertad en el sistema de VGDL.

Acoplamiento de ecuaciones. Los términos fuera de la diagonal en las matrices de coeficientes $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{k}$ se conocen como los *términos de acoplamiento*. En general, las ecuaciones tienen acoplamientos de masa, amortiguamiento y rigidez; sin embargo, el acoplamiento en un sistema depende de la elección de los grados de libertad utilizados para describir el movimiento. Esto se ilustra en los ejemplos 9.2 y 9.3, en los que se aborda el mismo sistema físico con dos opciones diferentes para los grados de libertad.

Ejemplo 9.1b

Formule las ecuaciones de movimiento para el marco de cortante de dos niveles de la figura E9.1a, utilizando coeficientes de influencia.

Solución

Los dos grados de libertad de este sistema son $\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \rangle^T$.

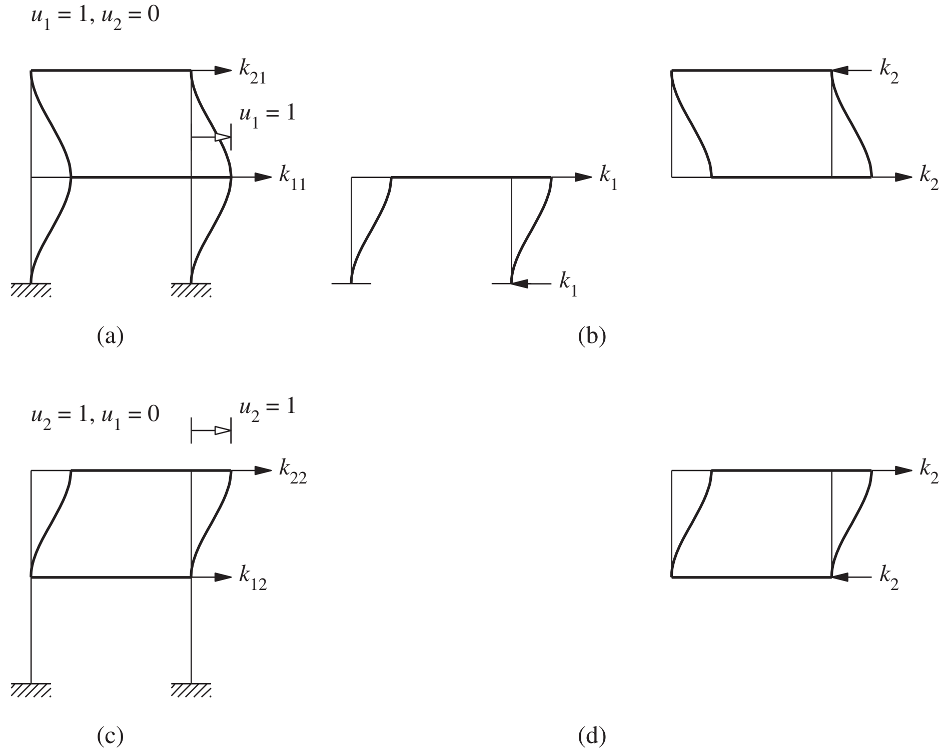


Figura E9.1b

1. *Determine la matriz de rigidez*. Para obtener la primera columna de la matriz de rigidez, se impone $u_1 = 1$ y $u_2 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez son k_{ij} (figura E9.1b). Las fuerzas necesarias en la parte superior e inferior de cada nivel para mantener la configuración deformada se expresan en términos de las rigideces k_1 y k_2 de los niveles (inciso b de la figura), tal como se definieron en la sección 9.1.1 y se determinaron en el ejemplo 9.1a:

$$k_1 = \frac{48EI_c}{h^3} \qquad k_2 = \frac{24EI_c}{h^3} \tag{a}$$

Los dos conjuntos de fuerzas en los incisos (a) y (b) de la figura son uno y el mismo. Por lo tanto,

$$k_{11} = k_1 + k_2 = \frac{72EI_c}{h^3} \qquad k_{21} = -k_2 = -\frac{24EI_c}{h^3} \tag{b}$$

La segunda columna de la matriz de rigidez se obtiene de una manera similar al imponer $u_2 = 1$ con $u_1 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez son k_{i2}, inciso (c) de la figura, y las fuerzas necesarias para mantener la configuración deformada se muestran en el inciso (d). Los dos conjuntos de fuerzas en los incisos (c) y (d) son uno y el mismo. Por lo tanto,

$$k_{12} = -k_2 = -\frac{24EI_c}{h^3} \qquad k_{22} = k_2 = \frac{24EI_c}{h^3} \tag{c}$$

Al haber determinado los coeficientes de influencia de rigidez, la matriz de rigidez es

$$\mathbf{k} = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{d}$$

2. *Determine la matriz de masa*. Con los grados de libertad definidos en las ubicaciones de masa concentrada, la matriz de masa diagonal está dada por la ecuación (9.2.10):

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{e}$$

3. *Determine las ecuaciones de movimiento*. Las ecuaciones que controlan el movimiento son

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{f}$$

donde **m** y **k** están dados por las ecuaciones (e) y (d), y $\mathbf{p}(t) = \langle p_1(t) \quad p_2(t)\rangle^T$.

Ejemplo 9.2

Una barra rígida uniforme de masa total m está apoyada sobre dos resortes k_1 y k_2 en sus dos extremos y sometida a las fuerzas dinámicas que se muestran en la figura E9.2a. La barra está restringida de modo que sólo puede moverse verticalmente en el plano; con esta restricción, el sistema tiene dos grados de libertad.

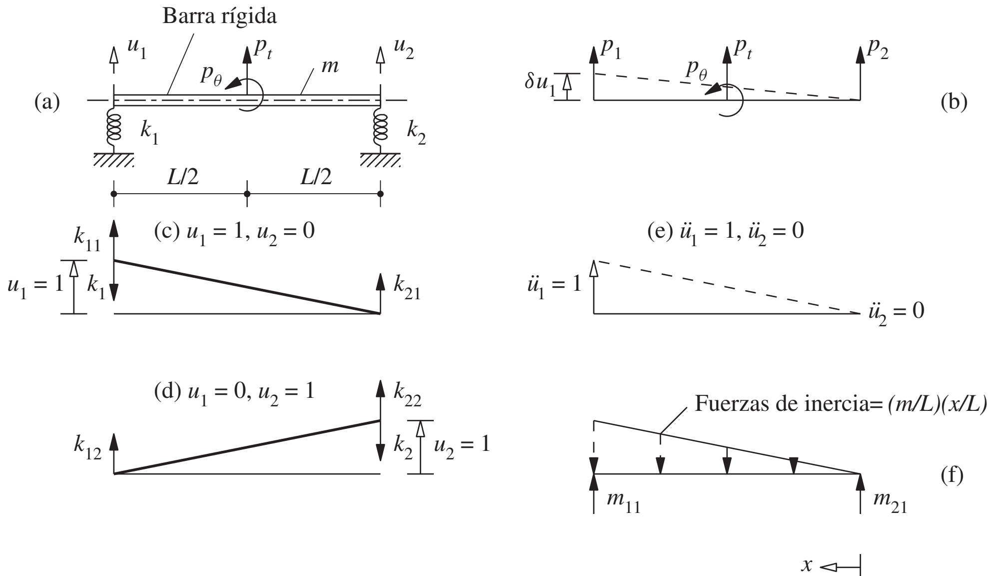


Figura E9.2

Formule las ecuaciones de movimiento con respecto a los desplazamientos u_1 y u_2 de los dos extremos, como los dos grados de libertad.

Solución

1. *Determine las fuerzas aplicadas*. Las fuerzas externas no actúan en la dirección de los grados de libertad y, por lo tanto, deben convertirse a las fuerzas equivalentes p_1 y p_2 en la dirección de los grados de libertad (figura E9.2b) usando las ecuaciones de equilibrio. Esto también puede lograrse mediante el principio de los desplazamientos virtuales. Así, si se introduce un desplazamiento virtual δu_1 a lo largo del grado de libertad 1, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es

$$\delta W = p_t \frac{\delta u_1}{2} - p_\theta \frac{\delta u_1}{L} \tag{a}$$

Del mismo modo, el trabajo realizado por las fuerzas equivalentes es

$$\delta W = p_1 \delta u_1 + p_2(0) \tag{b}$$

Debido a que el trabajo realizado por los dos conjuntos de fuerzas debe ser el mismo, se igualan las ecuaciones (a) y (b) para obtener

$$p_1 = \frac{p_t}{2} - \frac{p_\theta}{L} \tag{c}$$

Del mismo modo, al introducir el desplazamiento virtual δu_2, se obtiene

$$p_2 = \frac{p_t}{2} + \frac{p_\theta}{L} \tag{d}$$

2. *Determine la matriz de rigidez*. Aplique un desplazamiento unitario $u_1 = 1$ con $u_2 = 0$, e identifique las fuerzas elásticas resultantes y los coeficientes de influencia de rigidez k_{11} y k_{21} (figura E9.2c). Por la estática, $k_{11} = k_1$ y $k_{21} = 0$. Ahora aplique un desplazamiento unitario $u_2 = 1$ con $u_1 = 0$, e identifique las fuerzas resultantes elásticas y los coeficientes de influencia de rigidez (figura E9.2d). Por la estática, $k_{12} = 0$ y $k_{22} = k_2$. Así, la matriz de rigidez es

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \tag{e}$$

En este caso, la matriz de rigidez es diagonal (es decir, no hay términos de acoplamiento), porque los dos grados de libertad están definidos en las posiciones de los resortes.

3. *Determine la matriz de masa*. Imponga una aceleración unitaria $\ddot{u}_1 = 1$ con $\ddot{u}_2 = 0$, determine la distribución de aceleraciones de la figura E9.2e y las fuerzas de inercia asociadas; asimismo, identifique los coeficientes de influencia de masa (figura E9.2f). Por la estática, $m_{11} = m/3$ y $m_{21} = m/6$. Del mismo modo, imponga una aceleración unitaria $\ddot{u}_2 = 1$ con $\ddot{u}_1 = 0$; al definir las fuerzas de inercia y los coeficientes de influencia de masa, y al aplicar la estática se obtiene $m_{12} = m/6$ y $m_{22} = m/3$. Por lo tanto, la matriz de masa es

$$\mathbf{m} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{f}$$

La matriz de masa está acoplada, como lo indican los términos fuera de la diagonal, porque la masa se distribuye y no se concentra en las posiciones donde están definidos los grados de libertad.

4. *Determine las ecuaciones de movimiento*. Si se sustituyen las ecuaciones (c) a (f) en la ecuación (9.2.12) con $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, resulta

$$\frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_t/2) - (p_\theta/L) \\ (p_t/2) + (p_\theta/L) \end{bmatrix} \tag{g}$$

Las dos ecuaciones diferenciales están acopladas a causa del acoplamiento de la masa, por los términos fuera de la diagonal en la matriz de masa.

Ejemplo 9.3

Formule las ecuaciones de movimiento para el sistema de la figura E9.2a, con los dos grados de libertad definidos en el centro de masa O de la barra rígida: traslación u_t y rotación u_θ (figura E9.3a).

Solución

1. *Determine la matriz de rigidez*. Aplique un desplazamiento unitario $u_t = 1$ con $u_\theta = 0$, e identifique las fuerzas elásticas resultantes, así como k_{tt} y $k_{\theta t}$ (figura E9.3b). Por la estática, $k_{tt} = k_1 + k_2$ y $k_{\theta t} = (k_2 - k_1)L/2$. Ahora, aplique una rotación unitaria $u_\theta = 1$ con $u_t = 0$, e identifique las fuerzas elásticas resultantes, así como $k_{t\theta}$ y $k_{\theta\theta}$ (figura E9.3c). Por la estática, $k_{t\theta} = (k_2 - k_1)L/2$ y $k_{\theta\theta} = (k_1 + k_2)L_2/4$. Así, la matriz de rigidez es

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)L/2 \\ (k_2 - k_1)L/2 & (k_1 + k_2)L^2/4 \end{bmatrix} \tag{a}$$

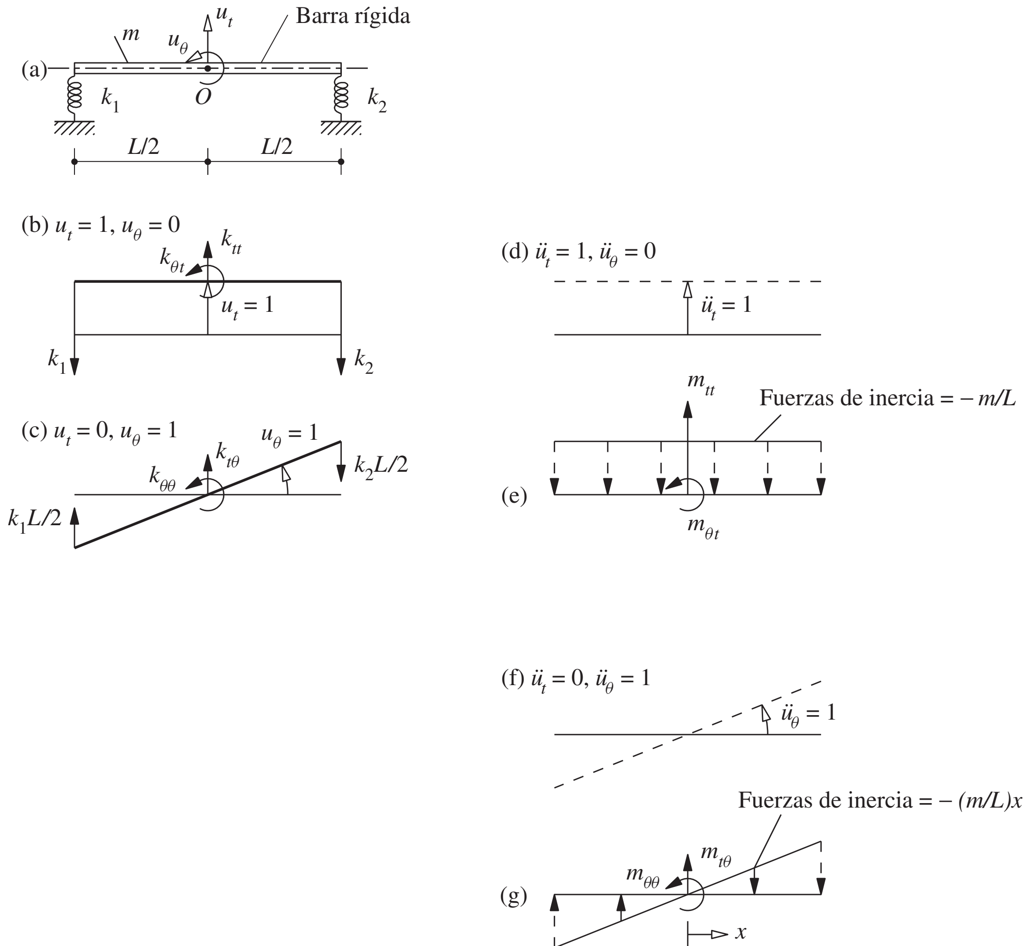


Figura E9.3

Observe que ahora la matriz de rigidez tiene términos de acoplamiento porque los grados de libertad elegidos no son los desplazamientos en las posiciones de los resortes.

2. *Determine la matriz de masa*. Imponga una aceleración unitaria $\ddot{u}_t = 1$ con $\ddot{u}_\theta = 0$, determine la distribución de la aceleración (figura E9.3d) y las fuerzas de inercia asociadas e identifique m_{tt} y $m_{\theta t}$ (figura E9.3e). Por la estática, $m_{tt} = m$ y $m_{\theta t} = 0$. Ahora imponga una aceleración rotacional unitaria $\ddot{u}_\theta = 1$ con $\ddot{u}_t = 0$, determine las aceleraciones resultantes (figura E9.3f) y las fuerzas de inercia asociadas, e identifique $m_{t\theta}$ y $m_{\theta\theta}$ (figura E9.3g). Por la estática, $m_{t\theta} = 0$ y $m_{\theta\theta} = mL^2/12$. Tenga en cuenta que $m_{\theta\theta} = I_O$, el momento de inercia de la barra alrededor de un eje que pasa por O y es perpendicular al plano de rotación. Así, la matriz de masa es

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} \tag{b}$$

Ahora la matriz de masa es diagonal (es decir, no tiene términos de acoplamiento) porque los grados de libertad de esta barra rígida están definidos en el centro de masa.

3. *Determine las ecuaciones de movimiento*. Si se sustituyen $\mathbf{u} = \langle u_t \quad u_\theta \rangle^T$, $\mathbf{p} = \langle p_t \quad p_\theta \rangle^T$ y las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación (9.2.12), resulta

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_t \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)L/2 \\ (k_2 - k_1)L/2 & (k_1 + k_2)L^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_t \\ p_\theta \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Ahora, las dos ecuaciones diferenciales están acopladas a través de la matriz de rigidez.

Debe tenerse en cuenta que si las ecuaciones de movimiento para un sistema están disponibles en un conjunto de grados de libertad, éstas pueden transformarse en una elección diferente de grados de libertad. Este concepto se ilustra para el sistema de la figura E9.2a. Suponga que las matrices de masa y rigidez y el vector de fuerza aplicado en el sistema están disponibles para la primera opción de grados de libertad, $\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \rangle^T$. Estos desplazamientos se relacionan con el segundo conjunto de grados de libertad, $\bar{\mathbf{u}} = \langle u_t \quad u_\theta \rangle^T$, mediante

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L/2 \\ 1 & L/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{u}} \tag{d}$$

donde **a** indica la matriz de transformación de coordenadas. Las matrices de rigidez y de masa y el vector de fuerza aplicada para los grados de libertad $\bar{\mathbf{u}}$ están dados por

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{a}^T\mathbf{k}\mathbf{a} \qquad \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^T\mathbf{m}\mathbf{a} \qquad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{a}^T\mathbf{p} \tag{e}$$

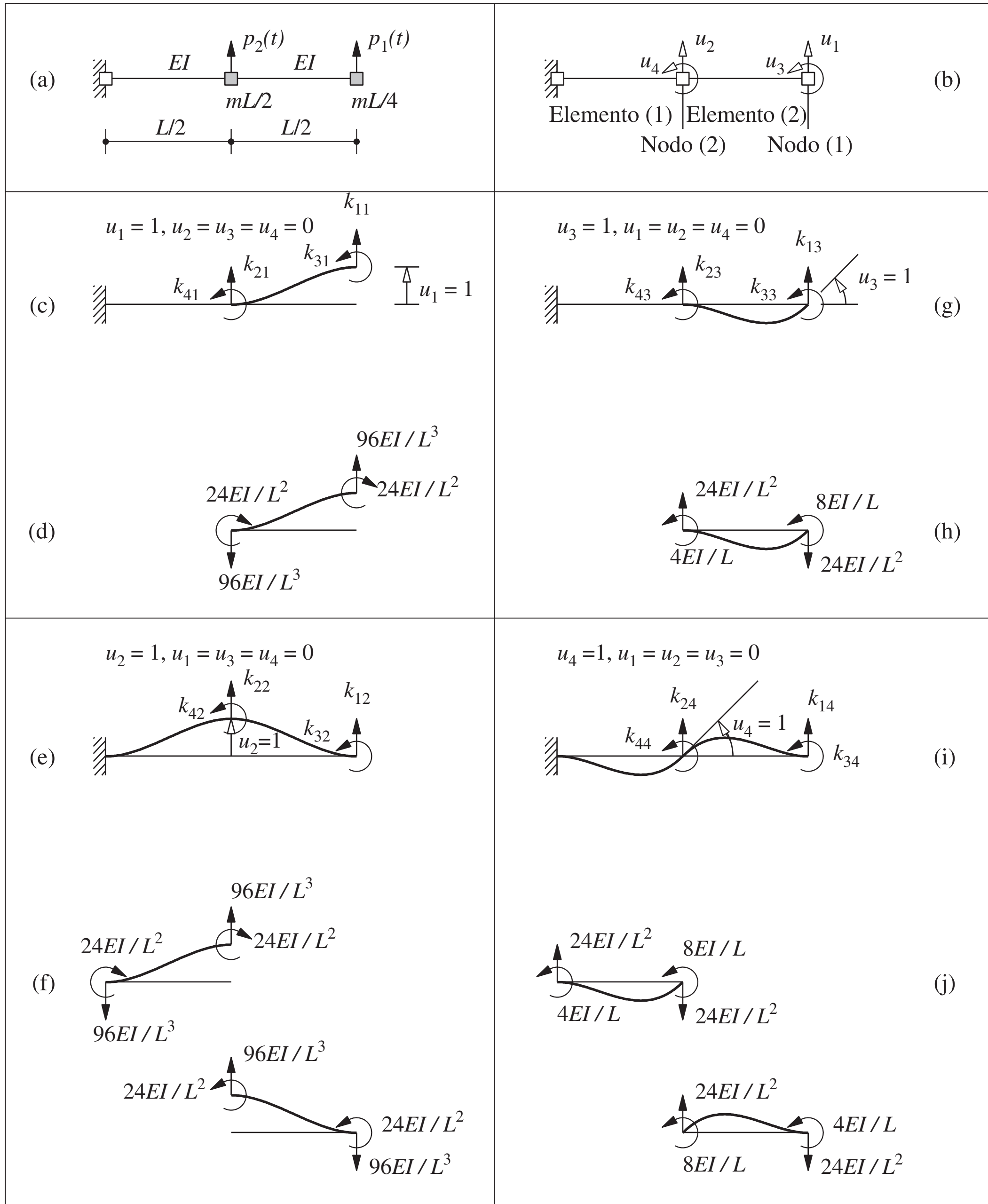
Si se sustituye **a** de la ecuación (d) y **k**, **m** y **p** del ejemplo 9.2 en la ecuación (e), se obtiene $\bar{\mathbf{k}}$ y $\bar{\mathbf{m}}$, que son idénticas a las ecuaciones (a) y (b), y a la $\bar{\mathbf{p}}$ de la ecuación (c).

Ejemplo 9.4

Una viga en voladizo de longitud L y sin masa soporta dos masas concentradas $mL/2$ y $mL/4$ en su punto medio y en su extremo libre, como se muestra en la figura E9.4a. La rigidez a la flexión EI de la viga es uniforme. Con los cuatro grados de libertad elegidos como se muestra en la figura E9.4b y las fuerzas aplicadas $p_1(t)$ y $p_2(t)$, formule las ecuaciones de movimiento del sistema. Desprecie las deformaciones axiales y cortantes en la viga.

Solución

La viga se compone de dos elementos y tres nodos. El nodo izquierdo está restringido y cada uno de los otros dos nodos tiene dos grados de libertad (figura E9.4b). Por lo tanto, el vector de desplazamiento $\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \rangle^T$.



(a)
$p_2(t)$
$p_1(t)$
EI
EI
mL/2
mL/4
L/2
L/2
(b)
u_2
u_1
u_4
u_3
Elemento (1)
Elemento (2)
Nodo (2)
Nodo (1)
(c)
$u_1 = 1, u_2 = u_3 = u_4 = 0$
k_{11}
k_{21}
k_{31}
k_{41}
$u_1 = 1$
(g)
$u_3 = 1, u_1 = u_2 = u_4 = 0$
k_{13}
k_{23}
k_{33}
k_{43}
$u_3 = 1$
(d)
$96EI / L^3$
$24EI / L^2$
$24EI / L^2$
$96EI / L^3$
(h)
$24EI / L^2$
$8EI / L$
$4EI / L$
$24EI / L^2$
(e)
$u_2 = 1, u_1 = u_3 = u_4 = 0$
k_{22}
k_{12}
k_{42}
k_{32}
u_2=1
(i)
$u_4 =1, u_1 = u_2 = u_3 = 0$
k_{24}
k_{14}
k_{44}
$u_4 = 1$
k_{34}
(f)
$96EI / L^3$
$24EI / L^2$
$24EI / L^2$
$96EI / L^3$
$96EI / L^3$
$24EI / L^2$
$24EI / L^2$
$96EI / L^3$
(j)
$24EI / L^2$
$8EI / L$
$4EI / L$
$24EI / L^2$
$24EI / L^2$
$4EI / L$
$8EI / L$
$24EI / L^2$

Figura E9.4

1. *Determine la matriz de masa*. Con los grados de libertad definidos en las posiciones de las masas concentradas, la matriz de masa diagonal está dada por la ecuación (9.2.10):

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} mL/4 & & & \\ & mL/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

2. *Determine la matriz de rigidez*. Existen varios métodos disponibles para determinar la matriz de rigidez. Aquí se utilizará el método del equilibrio directo basado en la definición de los coeficientes de influencia de rigidez (apéndice 1).

Para obtener la primera columna de la matriz de rigidez se impone $u_1 = 1$ y $u_2 = u_3 = u_4 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez son k_{i1} (figura E9.4c). Las fuerzas necesarias en los nodos de cada elemento de viga para mantener la configuración deformada se determinan a partir de los coeficientes de rigidez de la viga (figura E9.4d). Los dos conjuntos de fuerzas en las figuras (c) y (d) son uno y el mismo. Así, $k_{11} = 96EI/L^3$, $k_{21} = -96EI/L^3$, $k_{31} = -24EI/L^2$ y $k_{41} = -24EI/L^2$.

La segunda columna de la matriz de rigidez se obtiene de una manera similar al imponer $u_2 = 1$ con $u_1 = u_3 = u^4 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez son k_{i2} (figura E9.4e) y las fuerzas sobre cada elemento de viga necesarias para mantener los desplazamientos impuestos se muestran en la figura E9.4f. Los dos conjuntos de fuerzas en las figuras (e) y (f) son uno y el mismo. Así, $k_{12} = -96EI/L^3$, $k_{32} = 24EI/L^2$, $k_{22} = 96EI/L^3 + 96EI/L^3 = 192EI/L^3$ y $k_{42} = -24EI/L^2 + 24EI/L^2 = 0$.

La tercera columna de la matriz de rigidez se obtiene de un modo similar al imponer $u_3 = 1$ con $u_1 = u_2 = u_4 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez k_{i3} se muestran en la figura E9.4g y las fuerzas nodales en la figura E9.4h. Así, $k_{13} = -24EI/L^2$, $k_{23} = 24EI/L^2$, $k_{33} = 8EI/L$ y $k_{43} = 4EI/L$.

La cuarta columna de la matriz de rigidez se obtiene de una manera similar al imponer $u_4 = 1$ con $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Los coeficientes de influencia de rigidez k_{i4} se muestran en la figura E9.4i y las fuerzas nodales en la figura E9.4j. Así $k_{14} = -24EI/L^2$, $k_{34} = 4EI/L$, $k_{24} = -24EI/L^2 + 24EI/L^2 = 0$, y $k_{44} = 8EI/L + 8EI/L = 16EI/L$.

Con todos los coeficientes de influencia de rigidez determinados, la matriz de rigidez es

$$\mathbf{k} = \frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -12 & -3L & -3L \\ -12 & 24 & 3L & 0 \\ -3L & 3L & L^2 & L^2/2 \\ -3L & 0 & L^2/2 & 2L^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

3. *Determine las ecuaciones de movimiento*. Las ecuaciones que controlan el movimiento son

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \qquad \text{(c)}$$

donde **m** y **k** están dadas por las ecuaciones (a) y (b), y $\mathbf{p}(t) = \langle p_1(t) \quad p_2(t) \quad 0 \quad 0\rangle^T$.

Ejemplo 9.5

Deduzca las ecuaciones de movimiento de la viga del ejemplo 9.4 (también mostrada en la figura E9.5a) expresadas en términos de los desplazamientos u_1 y u_2 de las masas (figura E9.5b).

Solución Este sistema es igual al del ejemplo 9.4, pero sus ecuaciones de movimiento se formularán teniendo en cuenta sólo los grados de libertad traslacionales u_1 y u_2 (es decir, los grados de libertad rotacionales u_3 y u_4 se excluirán).

1. *Determine la matriz de rigidez*. En una estructura estáticamente determinada como la de la figura E9.5a resulta más fácil calcular primero la matriz de flexibilidad e invertirla para obtener la matriz de rigidez. El coeficiente de influencia de flexibilidad $\hat{f}_{ij}$ es el desplazamiento

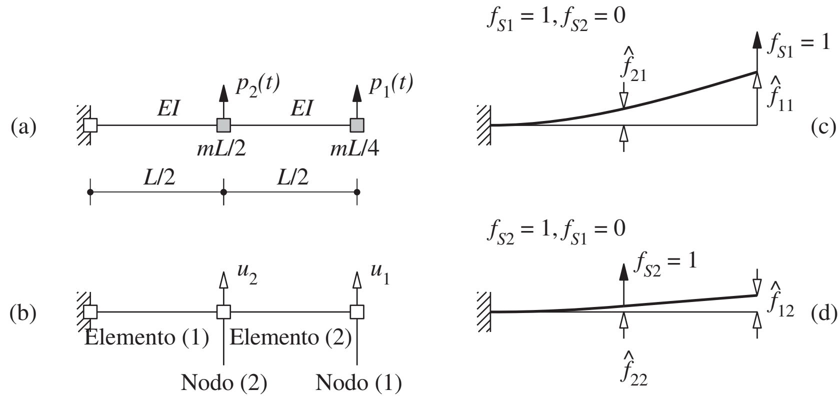


Figura E9.5

en el grado de libertad i debido a la fuerza unitaria aplicada en el grado de libertad j (figura E9.4c y d). Las deflexiones se calculan mediante los procedimientos estándar del análisis estructural para obtener la matriz de flexibilidad:

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Los elementos fuera de la diagonal $\hat{f}_{12}$ y $\hat{f}_{21}$ son iguales, como era de esperarse, por el teorema de Maxwell de las deflexiones recíprocas. Al invertir $\hat{\mathbf{f}}$, se obtiene la matriz de rigidez:

$$\mathbf{k} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{(a)}$$

2. *Determine la matriz de masa*. Ésta es una matriz diagonal porque las masas concentradas se encuentran en las posiciones donde están definidos los grados de libertad:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} mL/4 & \\ & mL/2 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}$$

3. *Determine las ecuaciones de movimiento*. Si se sustituyen $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{p}(t) = \langle p_1(t) \quad p_2(t)\rangle^T$ en la ecuación (9.2.12) con $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, resulta

$$\begin{bmatrix} mL/4 & \\ & mL/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{(c)}$$

Ejemplo 9.6

Formule las ecuaciones de vibración libre para el marco de dos elementos de la figura E9.6a. Para ambos elementos la rigidez a la flexión es EI y las deformaciones axiales deben despreciarse. El marco no tiene masa y sostiene masas concentradas en los dos nodos de la manera mostrada.

Solución Se muestran los dos grados de libertad del marco. La matriz de masa es

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \text{(a)}$$

Tenga en cuenta que la masa correspondiente a $\ddot{u}_1 = 1$ es $2m + m = 3m$; es decir, ambas masas se someterán a la misma aceleración porque la viga que las conecta es indeformable en la dirección axial. La matriz de rigidez se formula al evaluar en primer lugar la matriz de flexibilidad, para después invertirla. Los coeficientes de influencia de flexibilidad se identifican en la figura

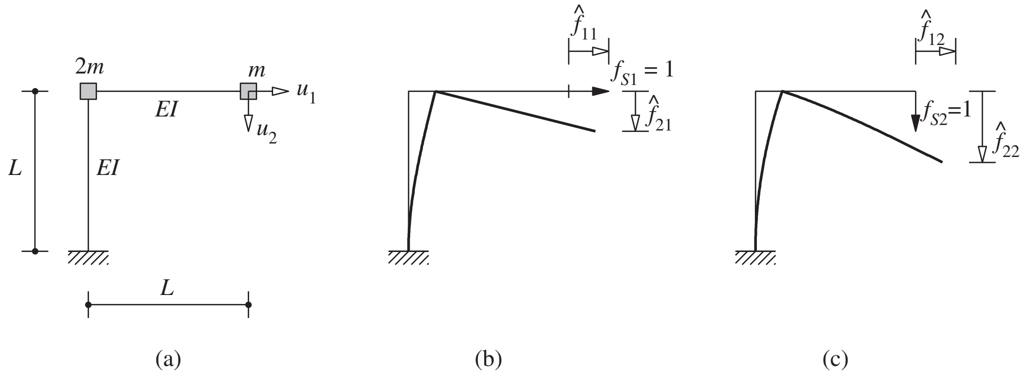


Figura E9.6

E9.6b y c, y las deflexiones se calculan mediante los procedimientos estándar del análisis estructural para obtener la matriz de flexibilidad:

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{L^3}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se invierte para determinar la matriz de rigidez:

$$\mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Así, las ecuaciones de vibración libre del sistema (sin amortiguamiento) son

$$\begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 9.7

Formule las ecuaciones de movimiento para el marco de dos niveles de la figura E9.7a. Se indican la rigidez a la flexión de las vigas y columnas, así como las masas concentradas al nivel de los pisos. La excitación dinámica consiste en las fuerzas laterales $p_1(t)$ y $p_2(t)$ al nivel de los dos pisos. La altura de los entrepisos es h y el ancho de las crujías es $2h$. Desprecie las deformaciones axiales en las vigas y columnas.

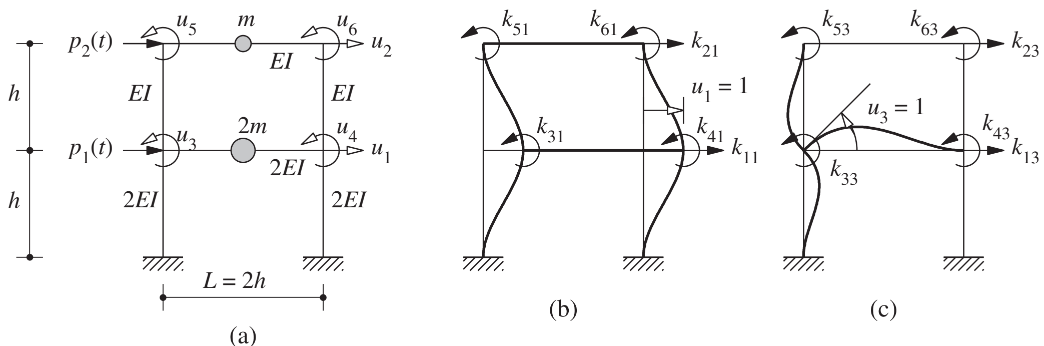


Figura E9.7

Solución El sistema tiene los seis grados de libertad mostrados en la figura E9.7a: los desplazamientos laterales u_1 y u_2 de los pisos y las rotaciones conjuntas u_3, u_4, u_5 y u_6. El vector de desplazamiento es

$$\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \rangle^T \tag{a}$$

La matriz de masa está dada por la ecuación (9.2.10):

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{b}$$

Los coeficientes de influencia de rigidez se evalúan siguiendo el procedimiento del ejemplo 9.4. Se impone un desplazamiento unitario, de uno en uno, para cada grado de libertad mientras los otros cinco grados de libertad se restringen, y los coeficientes de influencia de rigidez (por ejemplo, los mostrados en las figuras E9.7b y c para $u_1 = 1$ y $u_3 = 1$, respectivamente) se calculan mediante la estática a partir de las fuerzas nodales para los distintos elementos estructurales asociados con los desplazamientos impuestos. Estas fuerzas nodales se determinan de acuerdo con los coeficientes de rigidez de las vigas (apéndice 1). El resultado es

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 72 & -24 & 6h & 6h & -6h & -6h \\ -24 & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ 6h & 6h & 16h^2 & 2h^2 & 2h^2 & 0 \\ 6h & 6h & 2h^2 & 16h^2 & 0 & 2h^2 \\ -6h & 6h & 2h^2 & 0 & 6h^2 & h^2 \\ -6h & 6h & 0 & 2h^2 & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix} \tag{c}$$

Las fuerzas dinámicas aplicadas son las fuerzas laterales $p_1(t)$ y $p_2(t)$ en los dos niveles sin ningún momento en los nodos. Así, el vector de la fuerza aplicada es

$$\mathbf{p}(t) = \langle p_1(t) \quad p_2(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle^T \tag{d}$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{e}$$

donde $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{p}(t)$ están dadas por las ecuaciones (a), (b), (c) y (d), respectivamente.

9.3 CONDENSACIÓN ESTÁTICA

El método de condensación estática se utiliza para eliminar de los análisis dinámicos aquellos grados de libertad de una estructura a los cuales se les asigna una masa cero; sin embargo, todos los grados de libertad se incluyen en el análisis estático. Considere el marco con dos niveles y dos crujías que se muestra en la figura 9.3.1. Si se desprecian las deformaciones axiales en los elementos estructurales, el sistema tiene ocho grados de libertad para la formulación de su matriz de rigidez (figura 9.3.1a). Como se indicó en la sección 9.2.4, la masa de la estructura suele idealizarse como concentrada en los nodos (figura 9.3.1b), y la matriz de masa contiene cero elementos diagonales en los grados de libertad rotacionales (vea también el ejemplo 9.7). Éstos son los grados de libertad que pueden eliminarse del análisis dinámico de la estructura siempre que la excitación dinámica no incluya ninguna fuerza externa en los grados de libertad rotacionales, como en el caso de una excitación sísmica (sección 9.4). Incluso si los grados de libertad verticales del edificio se incluyen en la formulación de la matriz de rigidez, también pueden eliminarse del análisis dinámico (debido a que los efectos inerciales asociados con los grados de libertad verticales de los marcos de edificio suelen ser pequeños)

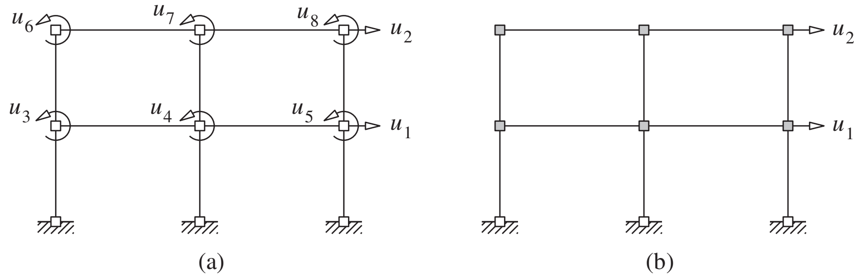


Figura 9.3.1 (a) Grados de libertad para las fuerzas elásticas (se desprecian las deformaciones axiales); (b) grados de libertad para las fuerzas de inercia.

siempre que la excitación dinámica no incluya fuerzas verticales en los nodos, como en el caso de un movimiento horizontal del terreno (sección 9.4).

Las ecuaciones de movimiento para un sistema que excluye el amortiguamiento (ecuación 9.2.12) se escriben en forma separada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{9.3.1}$$

donde $\mathbf{u}_0$ indica los grados de libertad sin masa y $\mathbf{u}_t$ los grados de libertad con masa, también conocidos como los grados de libertad dinámicos; $\mathbf{k}_{t0} = \mathbf{k}^T{}_{0t}$. Las dos ecuaciones separadas son

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{t0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_t(t) \qquad \mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t + \mathbf{k}_{00}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \tag{9.3.2}$$

Como no hay términos de inercia o fuerzas externas asociadas con $\mathbf{u}_0$, la ecuación (9.3.2b) permite una relación estática entre $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t}\mathbf{u}_t \tag{9.3.3}$$

Si se sustituye la ecuación (9.3.3) en la ecuación (9.3.2a), resulta

$$\mathbf{m}_{tt}\ddot{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{k}}_{tt}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t) \tag{9.3.4}$$

donde $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ es la *matriz de rigidez condensada* dada por

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T\mathbf{k}_{00}^{-1}\mathbf{k}_{0t} \tag{9.3.5}$$

La solución de la ecuación (9.3.4) ofrece los desplazamientos $\mathbf{u}_t(t)$ en los grados de libertad dinámicos y los desplazamientos $\mathbf{u}_0(t)$ en cada instante de tiempo de los grados de libertad condensados se determinan a partir de la ecuación (9.3.3).

En lo sucesivo, por conveniencia de notación, la ecuación (9.2.12) también indicará las ecuaciones de movimiento que controlan a los grados de libertad dinámicos en cada instante de tiempo (ecuación 9.3.4), y se entenderá que sólo se conservan los grados de libertad dinámicos. Antes de cerrar esta sección, observe que un método alternativo para determinar $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ consiste en invertir la matriz de flexibilidad $\hat{\mathbf{f}}_{tt}$. Cada columna de $\hat{\mathbf{f}}_{tt}$ está dada por los desplazamientos $\mathbf{u}_t$, debidos a una fuerza unitaria aplicada sucesivamente en cada grado de libertad de $\mathbf{u}_t$, los cuales pueden determinarse mediante el método de las fuerzas. (Este enfoque se empleó en los ejemplos 9.5 y 9.6).

Ejemplo 9.8

Los ejemplos 9.4 y 9.5 se refieren a la formulación de las ecuaciones de movimiento de una viga en voladizo con dos masas concentradas. Los grados de libertad seleccionados en el ejem-

plo 9.5 fueron los desplazamientos traslacionales u_1 y u_2 en las masas concentradas; en el ejemplo 9.4, los cuatro grados de libertad fueron u_1, u_2 y las rotaciones nodales u_3 y u_4. A partir de las ecuaciones que controlan estos cuatro grados de libertad, deduzca las ecuaciones de movimiento en los dos grados de libertad traslacionales.

Solución El vector de cuatro grados de libertad se divide en dos: $\mathbf{u}_t = \langle u_1 \quad u_2\rangle^T$ y $\mathbf{u}_0 = \langle u_3 \quad u_4\rangle^T$. Las ecuaciones del movimiento que controlan a $\mathbf{u}_t$ están dadas por la ecuación (9.3.4), donde

$$\mathbf{m}_{tt} = \begin{bmatrix} mL/4 & \\ & mL/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_t(t) = \langle\, p_1(t) \quad p_2(t)\,\rangle^T \tag{a}$$

Para determinar $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$, la matriz de rigidez de 4 × 4 determinada en el ejemplo 9.4 se divide como:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} = \frac{8EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc:cc} 12 & -12 & -3L & -3L \\ -12 & 24 & 3L & 0 \\ \hdashline -3L & 3L & L^2 & L^2/2 \\ -3L & 0 & L^2/2 & 2L^2 \end{array}\right] \tag{b}$$

Si se sustituyen estas submatrices en la ecuación (9.3.5), se obtiene la matriz de rigidez condensada:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} \tag{c}$$

Esta matriz de rigidez de la ecuación (c) es igual a la obtenida en el ejemplo 9.5 al invertir la matriz de flexibilidad correspondiente a los dos grados de libertad traslacionales.

Al sustituir las submatrices de rigidez en la ecuación (9.3.3), resulta la relación entre el grado de libertad condensado $\mathbf{u}_0$ y el grado de libertad dinámico $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{T}\mathbf{u}_t \qquad \mathbf{T} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 2.57 & -3.43 \\ 0.857 & 0.857 \end{bmatrix} \tag{d}$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por la ecuación (9.3.4), donde $\mathbf{m}_{tt}$ y $\mathbf{p}_t(t)$ se definen en la ecuación (a) y $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ en la ecuación (c). Estos términos son iguales a los de la ecuación (c) del ejemplo 9.5.

Ejemplo 9.9

Formule las ecuaciones de movimiento para el marco de dos niveles del ejemplo 9.7, que controla los desplazamientos laterales u_1 y u_2 de los pisos.

Solución Las ecuaciones de movimiento para este sistema se formularon en el ejemplo 9.7 considerando seis grados de libertad que se dividen en $\mathbf{u}_t = \langle u_1 \quad u_2\rangle^T$ y $\mathbf{u}_0 = \langle u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\rangle^T$.

Las ecuaciones que controlan a $\mathbf{u}_t$ están dadas por la ecuación (9.3.4), donde

$$\mathbf{m}_{tt} = m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_t(t) = \langle\, p_1(t) \quad p_2(t)\,\rangle^T \tag{a}$$

Para determinar $\mathbf{k}_{tt}$, la matriz de rigidez de 6 × 6 determinada en el ejemplo 9.7 se divide como:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{bmatrix} = \frac{EI}{h^3}\left[\begin{array}{cc:cccc} 72 & -24 & 6h & 6h & -6h & -6h \\ -24 & 24 & 6h & 6h & 6h & 6h \\ \hdashline 6h & 6h & 16h^2 & 2h^2 & 2h^2 & 0 \\ 6h & 6h & 2h^2 & 16h^2 & 0 & 2h^2 \\ -6h & 6h & 2h^2 & 0 & 6h^2 & h^2 \\ -6h & 6h & 0 & 2h^2 & h^2 & 6h^2 \end{array}\right] \tag{b}$$

Si se sustituyen estas submatrices de la ecuación (9.3.5), resulta la matriz de rigidez condensada:

$$\hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix} \tag{c}$$

Ésta se denomina *matriz de rigidez lateral* porque los grados de libertad son los desplazamientos laterales de los pisos y tiene injerencia en el análisis sísmico de edificios (sección 9.4).

Al sustituir las submatrices de rigidez en la ecuación (9.3.3), se obtiene la relación entre el grado de libertad condensado $\mathbf{u}_0$ y el grado de libertad traslacional $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{T}\mathbf{u}_t \qquad \mathbf{T} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -0.4426 & -0.2459 \\ -0.4426 & -0.2459 \\ 0.9836 & -0.7869 \\ 0.9836 & -0.7869 \end{bmatrix} \tag{d}$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas por la ecuación (9.3.4), donde $\mathbf{m}_{tt}$ y $\mathbf{p}_t$ se define en la ecuación (a) y $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$ en la ecuación (c):

$$m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \tag{e}$$

9.4 SISTEMAS PLANOS O DE PLANTA SIMÉTRICA: MOVIMIENTO DEL TERRENO

Una de las aplicaciones importantes de la dinámica estructural es la predicción de la forma en que las estructuras responden a un movimiento de la base de la estructura inducido por un sismo. En esta sección y las siguientes se formulan las ecuaciones de movimiento para los sistemas de VGDL sometidos a una excitación sísmica. Los sistemas planos sometidos a movimientos traslacionales y rotacionales del terreno se consideran en las secciones 9.4.1 y 9.4.3; los edificios de planta simétrica sometidos a excitaciones traslacionales y torsionales se estudian en las secciones 9.4.2 y 9.6; y los edificios de planta asimétrica sometidos a un movimiento traslacional del terreno se analizan en la sección 9.5. Los sistemas excitados por diferentes movimientos prescritos en sus múltiples soportes son el objeto de la sección 9.7.

9.4.1 Sistemas planos: movimiento traslacional del suelo

Se inicia con el caso más sencillo en el que todos los grados de libertad son desplazamientos dinámicos en la misma dirección que el movimiento del terreno. En la figura 9.4.1 se muestran dos de estas estructuras (una torre y un marco de un edificio). El desplazamiento del terreno se indica por u_g, el desplazamiento total (o absoluto) de la masa m_j por u_j^t, y el desplazamiento relativo entre esta masa y el terreno por u_j. En cada instante de tiempo estos desplazamientos se relacionan mediante

$$u_j^t(t) = u_g(t) + u_j(t) \tag{9.4.1a}$$

Estas ecuaciones para todas las N masas pueden combinarse en forma vectorial:

$$\mathbf{u}^t(t) = u_g(t)\mathbf{1} + \mathbf{u}(t) \tag{9.4.1b}$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector de orden N en el que cada elemento es igual a la unidad.

La ecuación de equilibrio dinámico, ecuación (9.2.11), desarrollada con anterioridad, sigue siendo válida, excepto por $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ porque no hay fuerzas externas dinámicas aplicadas. Así,

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{0} \tag{9.4.2}$$

Sólo los movimientos relativos $\mathbf{u}$ entre las masas y la base, debidos a las deformaciones estructurales, producen fuerzas elásticas y de amortiguamiento (es decir, el componente de cuerpo rígido del desplazamiento de la estructura no produce fuerzas internas). Así, para

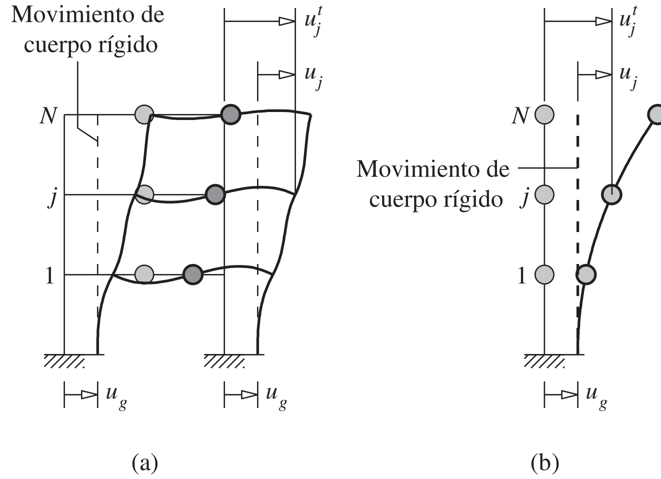


Figura 9.4.1 (a) Marco de un edificio; (b) torre.

un sistema lineal, las ecuaciones (9.2.3) y (9.2.6) siguen siendo válidas. Sin embargo, las fuerzas de inercia $\mathbf{f}_I$ están relacionadas con las aceleraciones totales $\ddot{\mathbf{u}}^t$ de las masas y la ecuación (9.2.9) se convierte en

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t \tag{9.4.3}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (9.2.3), (9.2.6) y (9.4.3) en la ecuación (9.4.2) y se utiliza la ecuación (9.4.1b), resulta

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) \tag{9.4.4}$$

La ecuación (9.4.4) contiene N ecuaciones diferenciales que controlan los desplazamientos relativos $u_j(t)$ de un sistema elástico-lineal con VGDL sometido a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$. La matriz de rigidez en la ecuación (9.4.4) se refiere a los desplazamientos horizontales u_j y se obtiene mediante el método de condensación estática (sección 9.3) para eliminar los grados de libertad rotacional y vertical de los nodos; por lo tanto, esta $\mathbf{k}$ se conoce como la *matriz de rigidez lateral*.

Al comparar la ecuación (9.4.4) con la ecuación (9.2.12), se muestra que las ecuaciones de movimiento de la estructura sometida a dos excitaciones separadas [la aceleración del terreno = $\ddot{u}_g(t)$ y las fuerzas externas = $-m_j\ddot{u}_g(t)$] son una y la misma. Por consiguiente,

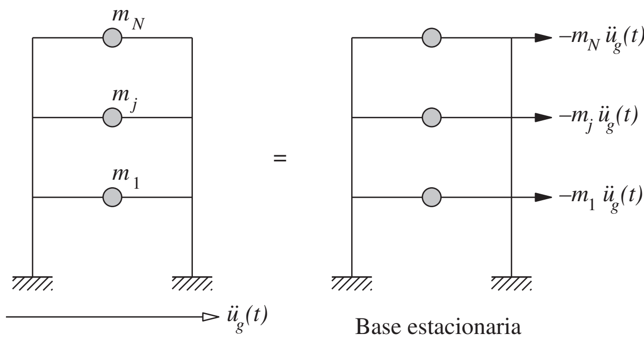


Figura 9.4.2 Fuerzas sísmicas efectivas.

como se muestra en la figura 9.4.2, el movimiento del terreno puede sustituirse por las *fuerzas sísmicas efectivas*:

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) \tag{9.4.5}$$

Una generalización de la deducción anterior resulta útil si todos los grados de libertad del sistema no están en la dirección del movimiento del terreno (más adelante en esta sección), o si la excitación sísmica no es idéntica en todos los soportes de la estructura (sección 9.7). En esta aproximación general, el desplazamiento total de cada masa se expresa como su desplazamiento u_j^s debido a la aplicación estática del movimiento del terreno más el desplazamiento dinámico u_j relativo al desplazamiento cuasi-estático:

$$u_j^t(t) = u_j^s(t) + u_j(t) \quad \text{o} \quad \mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}^s(t) + \mathbf{u}(t) \tag{9.4.6}$$

Los desplazamientos cuasi-estáticos pueden expresarse como $\mathbf{u}^s(t) = \iota u_g(t)$, donde el *vector de influencia* ι representa los desplazamientos de las masas resultantes de la aplicación estática de un desplazamiento unitario del terreno; por lo tanto, la ecuación (9.4.6b) se convierte en

$$\mathbf{u}^t(t) = \iota u_g(t) + \mathbf{u}(t) \tag{9.4.7}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen como antes, excepto que la ecuación (9.4.7) se utiliza en vez de la ecuación (9.4.1b):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\iota\ddot{u}_g(t) \tag{9.4.8}$$

Ahora las fuerzas sísmicas efectivas son

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\ddot{u}_g(t) \tag{9.4.9}$$

Esta generalización no trae ningún beneficio especial a la obtención de las ecuaciones que controlan el movimiento de los sistemas de la figura 9.4.1. La aplicación estática de $u_g = 1$ para estos sistemas da $u_j = 1$ para toda j (es decir, $\iota = \mathbf{1}$), como se muestra en la figura 9.4.3, donde las masas están en blanco para enfatizar que los desplazamientos son estáticos. Así, las ecuaciones (9.4.8) y (9.4.9) se vuelven idénticas a las ecuaciones (9.4.4) y (9.4.5), respectivamente.

A continuación se consideran los sistemas en los que no todos los grados de libertad dinámicos tienen la misma dirección del movimiento del terreno. Un ejemplo se muestra en la figura 9.4.4a, donde un marco en forma de L invertida con masas concentradas se somete

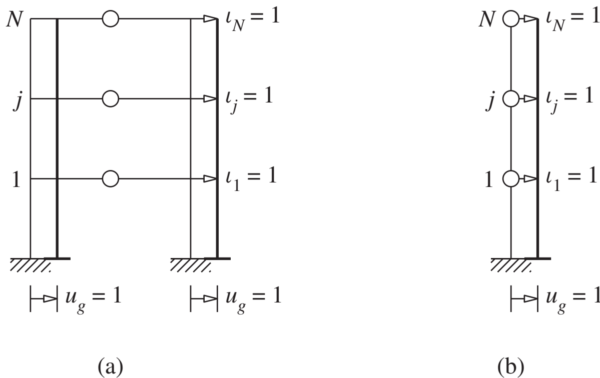


Figura 9.4.3 Vector de influencia ι: desplazamientos estáticos debidos a $u_g = 1$.

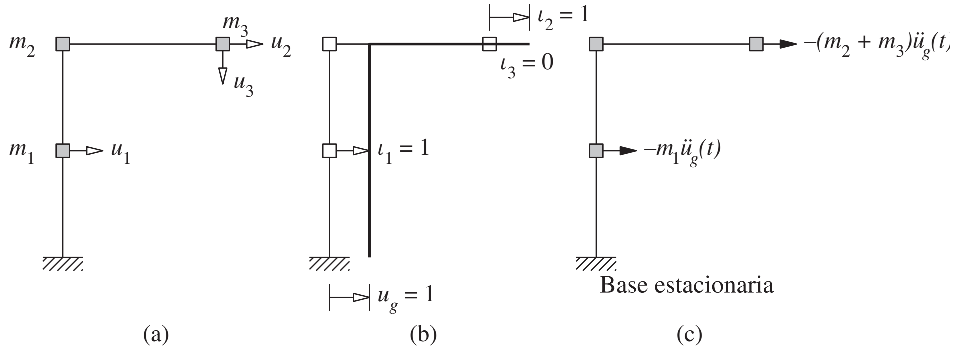


Figura 9.4.4 (a) Marco en forma de L; (b) vector de influencia ι: desplazamientos estáticos debidos a $u_g = 1$; (c) fuerzas sísmicas efectivas.

a un movimiento horizontal del terreno. Si se supone que los elementos son axialmente rígidos, los tres grados de libertad son como se muestra; $\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3\rangle^T$. La aplicación estática de $u_g = 1$ resulta en los desplazamientos que se muestran en la figura 9.4.4b. Así, $\iota = \langle 1 \quad 1 \quad 0\rangle^T$ en la ecuación (9.4.8) y la ecuación (9.4.9) se convierte en

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\,\ddot{u}_g(t) = -\ddot{u}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 + m_3 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\ddot{u}_g(t)\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 + m_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.4.10}$$

Tenga en cuenta que la masa correspondiente a $\ddot{u}_2 = 1$ es $m_2 + m_3$; es decir, ambas masas se someterán a la misma aceleración, puesto que la viga de conexión es axialmente rígida. Las fuerzas efectivas de la ecuación (9.4.10) se muestran en la figura 9.4.4c. Observe que la fuerza efectiva es igual a cero en los grados de libertad verticales debido a que el movimiento del terreno es horizontal.

9.4.2 Edificios de planta simétrica: movimiento traslacional del terreno

Considere el edificio de N niveles que se muestra en la figura 9.4.5 con diafragmas de piso rígidos y varios marcos en las direcciones x y y; la distribución de la masa y la rigidez en la planta es simétrica respecto a los ejes x y y. En la sección 9.5 se muestra que los edificios de planta simétrica pueden analizarse de forma independiente en las dos direcciones laterales. El movimiento del edificio debido al movimiento del terreno a lo largo de uno de los dos ejes, por ejemplo el eje x, también está controlado por la ecuación (9.4.4) con la interpretación adecuada de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{k}$. La matriz de masa es una matriz diagonal con elementos diagonales $m_{jj} = m_j$, donde m_j es la masa total concentrada en el diafragma del j-ésimo nivel (sección 9.2.4). La matriz de rigidez $\mathbf{k}$ es la matriz de rigidez lateral del edificio para el movimiento en la dirección x.

La matriz de rigidez lateral de un edificio puede determinarse a partir de las matrices de rigidez lateral de los marcos individuales en ese edificio. En primer lugar, la matriz de rigidez lateral $\mathbf{k}_{xi}$ del i-ésimo marco orientado en la dirección x se determina mediante el procedimiento de condensación estática a fin de condensar las rotaciones y los desplaza-

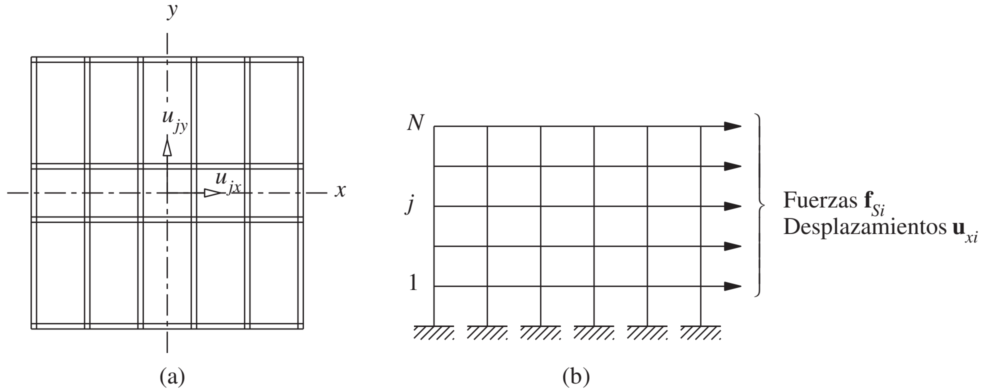


Figura 9.4.5 (a) j-ésima planta de entrepiso con los grados de libertad indicados; (b) marco i, dirección x, con las fuerzas laterales y los desplazamientos mostrados.

mientos verticales en las juntas (sección 9.3). Esta matriz de rigidez lateral proporciona la relación entre las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{Si}$ en el i-ésimo marco y los desplazamientos laterales $\mathbf{u}_{xi}$ del marco (figura 9.4.5b):

$$\mathbf{f}_{Si} = \mathbf{k}_{xi}\mathbf{u}_{xi} \tag{9.4.11}$$

Debido a que los diafragmas de piso se consideran rígidos, todos los marcos están sometidos a los mismos desplazamientos laterales:

$$\mathbf{u}_{xi} = \mathbf{u}_x \tag{9.4.12}$$

donde $\mathbf{u}_x^T = \langle u_{1x} \quad u_{2x} \quad \dots \quad u_{jx} \quad \dots \quad u_{Nx}\rangle$ son los desplazamientos laterales de los niveles definidos en sus centros de masa. Si se sustituye la ecuación (9.4.12) en la ecuación (9.4.11) y se suman las últimas ecuaciones para todos los marcos, resulta

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}_x\mathbf{u}_x \tag{9.4.13}$$

donde $\mathbf{f}_S = \sum_i \mathbf{f}_{Si}$ es el vector de fuerzas laterales en los centros de masa de los pisos del edificio y

$$\mathbf{k}_x = \sum_i \mathbf{k}_{xi} \tag{9.4.14}$$

es la rigidez lateral del edificio en x. Se trata de una matriz de orden N para un edificio de N niveles. La ecuación (9.4.4) con $\mathbf{k} = \mathbf{k}_x$ controla el movimiento lateral de un edificio de varios niveles en x, debido al movimiento del terreno en la dirección x.

9.4.3 Sistemas planos: movimiento rotacional del suelo

Aunque los componentes rotacionales del movimiento del terreno no se miden durante los sismos, es posible estimarlos a partir de los componentes traslacionales medidos, y la aplicación de los conceptos anteriores a esta excitación resulta interesante. Para este propósito, considere el marco de la figura 9.4.6a sometido a la rotación $\theta_g(t)$ en la base. Los desplazamientos totales $\mathbf{u}^t$ de las masas se componen de dos partes: el componente $\mathbf{u}$ asociado con

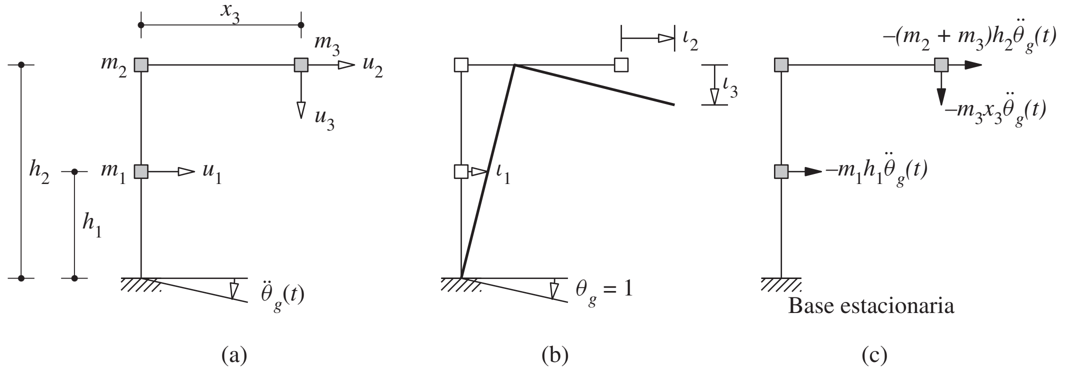


Figura 9.4.6 (a) Marco, (b) vector de influencia ι: desplazamientos estáticos debidos a $\theta_g = 1$, (c) fuerzas sísmicas efectivas.

las deformaciones estructurales y un componente de cuerpo rígido $\mathbf{u}^s(t) = \iota\theta_g(t)$ debido a la aplicación estática de la rotación θ_g del suelo:

$$\mathbf{u}^t(t) = \mathbf{u}(t) + \iota\theta_g(t) \tag{9.4.15}$$

La aplicación estática de $\theta_g = 1$ resulta en los desplazamientos que se muestran en la figura 9.4.6b; por lo tanto, $\iota = \langle h_1 \quad h_2 \quad x_3\rangle^T$. Las ecuaciones (9.4.2) y (9.4.3) siguen siendo válidas, pero ahora las aceleraciones totales $\ddot{\mathbf{u}}^t(t)$ deben determinarse a partir de la ecuación (9.4.15). Al unir todas estas ecuaciones se obtiene

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\iota\ddot{\theta}_g(t) \tag{9.4.16}$$

Las fuerzas efectivas asociadas con la rotación del terreno se muestran en la figura 9.4.6c:

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\ddot{\theta}_g(t) = -\ddot{\theta}_g(t)\begin{bmatrix} m_1h_1 \\ (m_2 + m_3)h_2 \\ m_3x_3 \end{bmatrix} \tag{9.4.17}$$

9.5 EDIFICIOS DE UN PISO CON PLANTA ASIMÉTRICA

En esta sección se extenderá el desarrollo de las secciones anteriores a fin de formular las ecuaciones de movimiento para edificios con planta asimétrica. Por ejemplo, cuando tales edificios se someten a un componente y del movimiento del terreno, a la vez experimentan un movimiento lateral en dos direcciones horizontales (x y y) y una torsión alrededor del eje vertical (z). Se formularán las ecuaciones que controlan tales movimientos laterales y torsionales acoplados (primero los sistemas de un nivel, seguidos por los edificios de varios niveles).

9.5.1 Sistema asimétrico en dos direcciones

Sistema considerado. Considere el edificio idealizado de un nivel que se muestra en la figura 9.5.1, el cual consta de un diafragma de techo. Este diafragma se supone rígido

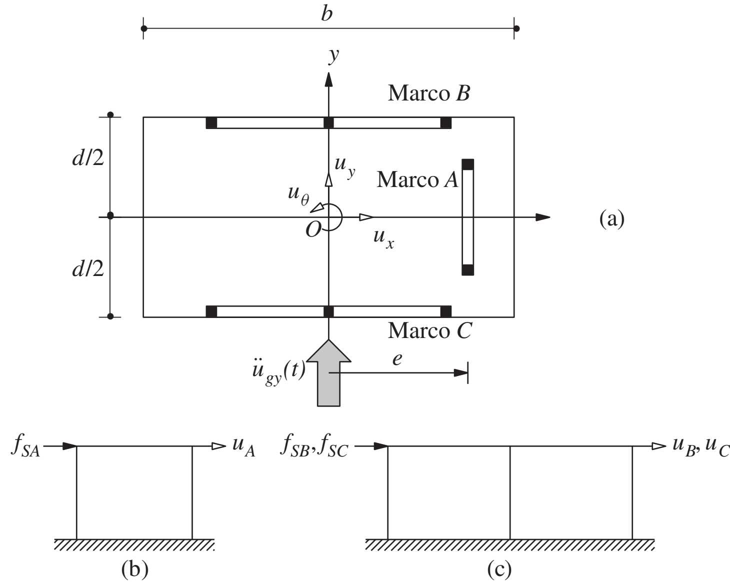


Figura 9.5.1 Sistema de un nivel considerado: (a) planta; (b) marco A; (c) marcos B y C.

en su propio plano y está apoyado en tres marcos: A, B y C. El marco A está orientado en la dirección y, ubicado a una distancia e del eje y que pasa a través del centro de masa (CM) del diafragma. Los marcos B y C están orientados en la dirección x, ubicados a la misma distancia $d/2$ a ambos lados del eje x; por simplicidad, los marcos se encuentran en el borde del diafragma y su espesor se desprecia. El movimiento de la masa del techo se puede describir mediante tres grados de libertad definidos en el centro de masa del techo: los desplazamientos u_x en la dirección x y u_y en la dirección y, así como la rotación torsional u_θ alrededor del eje vertical.

Relación fuerza-desplazamiento. Considere que $\mathbf{f}_S$ representa el vector de fuerzas externas aplicadas estáticamente sobre el componente de rigidez de la estructura, y $\mathbf{u}$ es el vector de los desplazamientos resultantes, ambos definidos en términos de los tres grados de libertad. Las fuerzas y desplazamientos se relacionan a través de

$$\begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{S\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u} \tag{9.5.1}$$

La matriz de rigidez $\mathbf{k}$ de 3×3 para la estructura puede determinarse mediante el método del equilibrio directo (con base en la definición de coeficientes de influencia de rigidez) o por medio del método de la rigidez directa.

Con este propósito, se define la rigidez lateral de cada marco. La rigidez lateral k_y de marco A relaciona la fuerza lateral f_{SA} con el desplazamiento u_A (figura 9.5.1b):

$$f_{SA} = k_y u_A \tag{9.5.2}$$

Las rigideces laterales de los marcos B y C son k_{xB} y k_{xC}, respectivamente, y relacionan las fuerzas laterales con los desplazamientos mostrados en la figura 9.5.1c:

$$f_{SB} = k_{xB} u_B \qquad f_{SC} = k_{xC} u_C \tag{9.5.3}$$

La rigidez lateral para cada marco se determina mediante el procedimiento de condensación estática descrito en la sección 9.3.

La matriz de rigidez del sistema completo se determina primero mediante el método del equilibrio directo. Se impone un desplazamiento unitario sucesivamente en cada grado de libertad y se determinan los coeficientes de influencia de rigidez con base en la estática. Los detalles se presentan en la figura 9.5.2 y se explican por sí mismos. La matriz de rigidez resultante de la estructura es

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & ek_y \\ (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) & ek_y & e^2 k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC}) \end{bmatrix} \tag{9.5.4}$$

Observe que $k_{xy} = 0$ en la ecuación (9.5.4) para el sistema de la figura 9.5.1; en general, $k_{xy} \neq 0$.

De manera alternativa, la matriz de rigidez de la estructura puede formularse mediante el método de la rigidez directa, implementado como sigue: primero se determina la matriz de transformación que relaciona el desplazamiento lateral u_i del marco i con u_x, u_y y u_θ, el grado de libertad global del sistema. Esta matriz de 1×3 se indica por $\mathbf{a}_{xi}$ si el marco está orientado en la dirección x, o por $\mathbf{a}_{yi}$ si lo está en la dirección y. El desplazamiento lateral del marco A, $u_A = u_y + eu_\theta$ o $u_A = \mathbf{a}_{yA}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{a}_{yA} = \langle 0 \quad 1 \quad e \rangle$. Del mismo modo, el desplazamiento lateral del marco B, $u_B = u_x - (d/2)u_\theta$, o $u_B = \mathbf{a}_{xB}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{a}_{xB} = \langle 1 \quad 0 \quad -d/2 \rangle$. Finalmente, el desplazamiento lateral del marco C, $u_C = u_x + (d/2)u_\theta$, o $u_C = \mathbf{a}_{xC}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{a}_{xC} = \langle 1 \quad 0 \quad d/2 \rangle$.

En segundo lugar, la matriz de rigidez para el marco i con respecto al grado de libertad global se determina a partir de la rigidez lateral k_{xi} o k_{yi} del marco i en las coordenadas locales u_i con base en

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{xi}^T k_{xi} \mathbf{a}_{xi} \quad \text{o} \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{yi}^T k_{yi} \mathbf{a}_{yi} \tag{9.5.5}$$

La primera ecuación se aplica a los marcos orientados en la dirección x y la segunda a los marcos en la dirección y. Al sustituir las correspondientes $\mathbf{a}_{xi}$ o $\mathbf{a}_{yi}$ y k_{xi} o k_{yi}, se obtienen las matrices de rigidez $\mathbf{k}_A$, $\mathbf{k}_B$ y $\mathbf{k}_C$ de los tres marcos:

$$\mathbf{k}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ e \end{Bmatrix} k_y \langle 0 \quad 1 \quad e \rangle = k_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & e & e^2 \end{bmatrix} \tag{9.5.6}$$

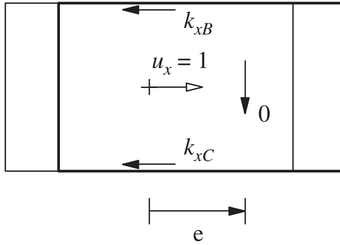
$$\mathbf{k}_B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -d/2 \end{Bmatrix} k_{xB} \langle 1 \quad 0 \quad -d/2 \rangle = k_{xB} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d/2 & 0 & d^2/4 \end{bmatrix} \tag{9.5.7}$$

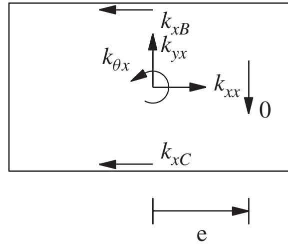
$$\mathbf{k}_C = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ d/2 \end{Bmatrix} k_{xC} \langle 1 \quad 0 \quad d/2 \rangle = k_{xC} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ d/2 & 0 & d^2/4 \end{bmatrix} \tag{9.5.8}$$

Por último, la matriz de rigidez del sistema es

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_A + \mathbf{k}_B + \mathbf{k}_C \tag{9.5.9}$$

(a) $u_x = 1,\ u_y = u_\theta = 0$



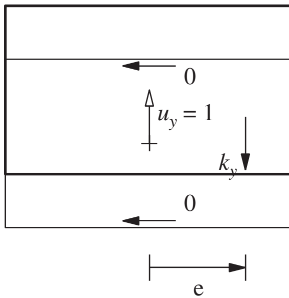


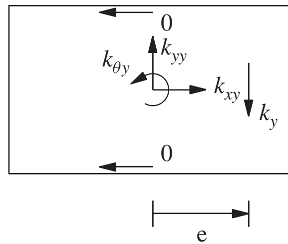
$k_{xx} = k_{xB} + k_{xC}$

$k_{yx} = 0$

$k_{\theta x} = (d/2)(k_{xC} - k_{xB})$

(b) $u_x = 0,\ u_y = 1,\ u_\theta = 0$



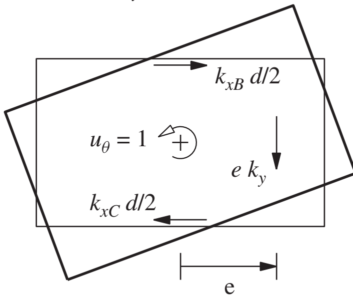


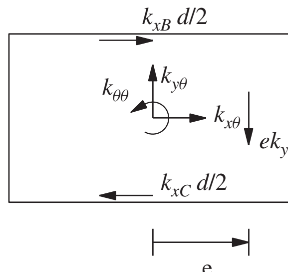
$k_{xy} = 0$

$k_{yy} = k_y$

$k_{\theta y} = e\,k_y$

(c) $u_x = u_y = 0,\ u_\theta = 1$





$k_{x\theta} = (d/2)(k_{xC} - k_{xB})$

$k_{y\theta} = e\,k_y$

$k_{\theta\theta} = e^2 k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC})$

Figura 9.5.2 Evaluación de la matriz de rigidez de un sistema asimétrico en dos direcciones con un solo nivel.

Si se sustituyen las ecuaciones (9.5.6), (9.5.7) y (9.5.8), se obtiene

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & ek_y \\ (d/2)(k_{xC} - k_{xB}) & ek_y & e^2 k_y + (d^2/4)(k_{xB} + k_{xC}) \end{bmatrix} \tag{9.5.10}$$

Como era de esperarse, esta matriz de rigidez es igual a la determinada anteriormente con base en la definición de los coeficientes de influencia de rigidez.

Fuerzas de inercia. Dado que los grados de libertad globales seleccionados se encuentran en el centro de masa O, las fuerzas de inercia sobre el componente de masa de la estructura son

$$f_{Ix} = m\ddot{u}_x^t \qquad f_{Iy} = m\ddot{u}_y^t \qquad f_{I\theta} = I_O\ddot{u}_\theta^t \tag{9.5.11}$$

donde m es la masa del diafragma distribuida de manera uniforme en la planta; $I_O = m(b^2 + d^2)/12$ es el momento de inercia del diafragma alrededor del eje vertical que pasa por O; y $\ddot{u}^t_x$, $\ddot{u}^t_y$ y $\ddot{u}^t_\theta$ son los componentes x, y y θ de la aceleración total del centro de masa. En forma matricial, las fuerzas de inercia y las aceleraciones se relacionan a través de la matriz de masa:

$$\begin{Bmatrix} f_{Ix} \\ f_{Iy} \\ f_{I\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{f}_I = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t \tag{9.5.12}$$

Ecuaciones de movimiento. Si se sustituyen las ecuaciones (9.5.12b) y (9.5.1b) en la ecuación (9.4.2), y se excluyen las fuerzas de amortiguamiento, resulta

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{9.5.13}$$

Considere la excitación sísmica definida por $\ddot{u}_{gx}(t)$ y $\ddot{u}_{gy}(t)$, los componentes x y y de la aceleración del terreno, así como por $u_{g\theta}(t)$, la aceleración rotacional de la base del edificio alrededor del eje vertical. Las aceleraciones totales son

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \\ \ddot{u}_{g\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \ddot{\mathbf{u}}^t = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}_g \tag{9.5.14}$$

Al sustituir la ecuación (9.5.14) en (9.5.13) y al utilizar **m** y **k** tal como se definieron en las ecuaciones (9.5.12) y (9.5.10), se obtiene

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{x\theta} \\ 0 & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_O\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{Bmatrix} \tag{9.5.15}$$

donde

$$\begin{gathered} k_{xx} = k_{xB} + k_{xC} \qquad k_{yy} = k_y \qquad k_{\theta\theta} = e^2 k_y + \frac{d^2}{4}(k_{xB} + k_{xC}) \\ k_{x\theta} = k_{\theta x} = \frac{d}{2}(k_{xC} - k_{xB}) \qquad k_{y\theta} = k_{\theta y} = e k_y \end{gathered} \tag{9.5.16}$$

Las tres ecuaciones diferenciales en la ecuación (9.5.15) que controlan los tres grados de libertad (u_x, u_y y u_θ) se acoplan a través de la matriz de rigidez debido a que las propiedades de rigidez no son simétricas alrededor de los ejes x o y. Así, la respuesta del sistema al componente x (y y) del movimiento del terreno no se limita al desplazamiento lateral en la dirección x (y y), sino que incluye al movimiento lateral en la dirección transversal, y (y x), y a la torsión del diafragma del techo alrededor del eje vertical.

9.5.2 Sistema asimétrico en una dirección

A continuación se examinará un caso especial del sistema de la figura 9.5.1 para el que la rigidez lateral de los marcos B y C es idéntica (es decir, $k_{xB} = k_{xC} = k_x$). Este sistema es

simétrico alrededor del eje x, pero no alrededor del eje y. Para este sistema asimétrico en una dirección, la ecuación (9.5.15) se especifica como

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & ek_y \\ 0 & ek_y & e^2k_y + (d^2/2)k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.5.17}$$

donde se descarta la excitación rotacional. La primera de las tres ecuaciones,

$$m\ddot{u}_x + 2k_x u_x = -m\ddot{u}_{gx}(t) \tag{9.5.18}$$

es una ecuación de movimiento de 1GDL conocida que controla la respuesta u_x de un sistema de un solo nivel a los movimientos del terreno en la dirección x; u_y y u_θ no entran en esta ecuación. Lo anterior implica que el movimiento en la dirección x se produce independientemente del movimiento en la dirección y o del movimiento torsional. Esto es así por la simetría del sistema alrededor del eje x.

La segunda y tercera ecuaciones pueden rescribirse como

$$\begin{bmatrix} m & \\ & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & ek_y \\ ek_y & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & \\ & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \tag{9.5.19}$$

Estas ecuaciones que controlan a u_y y u_θ se acoplan a través de la matriz de rigidez debido a que las propiedades de rigidez no son simétricas con respecto al eje y. Así, la respuesta del sistema al componente y del movimiento del terreno no se limita al desplazamiento lateral en la dirección del eje y, sino que incluye a la torsión alrededor de un eje vertical.

La separación de las ecuaciones que controlan el movimiento en las ecuaciones (9.5. 18) y (9.5.19) indica que la respuesta sísmica de un sistema con planta simétrica alrededor del eje x, pero asimétrica alrededor del eje y, puede determinarse mediante dos análisis independientes: (1) la respuesta de la estructura al movimiento del terreno en la dirección x puede encontrarse resolviendo la ecuación (9.5.18) del sistema de 1GDL mediante los procedimientos del capítulo 6; y (2) la respuesta acoplada lateral-torsional de la estructura al movimiento del terreno en la dirección del eje y puede encontrarse resolviendo la ecuación (9.5.19) del sistema de dos grados de libertad mediante los procedimientos del capítulo 13. Además, se observa que la ecuación (9.5.19) puede interpretarse como la ecuación (9.4.8) sin amortiguamiento con el vector de influencia $\iota = \langle 1 \quad 0 \rangle^T$.

9.5.3 Sistema simétrico

A continuación se examinará un caso especial adicional del sistema de la figura 9.5.1 en el que los marcos B y C son idénticos (es decir, $k_{xB} = k_{xC} = k_x$), y el marco A está ubicado en el centro de masa (es decir, $e = 0$). Para tales sistemas, la ecuación (9.5.15) se especifica como

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & I_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & (d^2/2)k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_O\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{Bmatrix} \tag{9.5.20}$$

Las tres ecuaciones están ahora desacopladas, y cada una tiene la misma forma que la ecuación para un sistema de 1GDL. Este desacoplamiento de ecuaciones implica: (1) el movimiento traslacional del terreno en la dirección x (o y) causaría un movimiento lateral

del sistema sólo en la dirección x (o y); (2) el movimiento rotacional del terreno causaría solamente un movimiento torsional del sistema; y (3) la respuesta a los componentes individuales del movimiento del terreno puede determinarse resolviendo sólo la ecuación correspondiente en la ecuación (9.5.20).

9.6 EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES CON PLANTA ASIMÉTRICA

En esta sección se formulan las ecuaciones de movimiento para un edificio de varios niveles, con planta asimétrica respecto a los ejes x y y, sometido a una excitación sísmica. En la figura 9.6.1 se muestra una idealización esquemática del sistema, que consta de ciertos marcos orientados en la dirección y y otros en la dirección x. La planta de la estructura y, por consiguiente, las propiedades de rigidez son asimétricas respecto a los ejes x y y; sin embargo, la distribución de la masa en cada diafragma de piso es simétrica respecto a ambos ejes, y los centros de masa O de todos los diafragmas de piso se encuentran en el mismo eje vertical. Cada diafragma de piso se considera rígido en su propio plano, tiene tres grados de libertad definidos en el centro de masa (figura 9.6.1a). Los grados de libertad para el

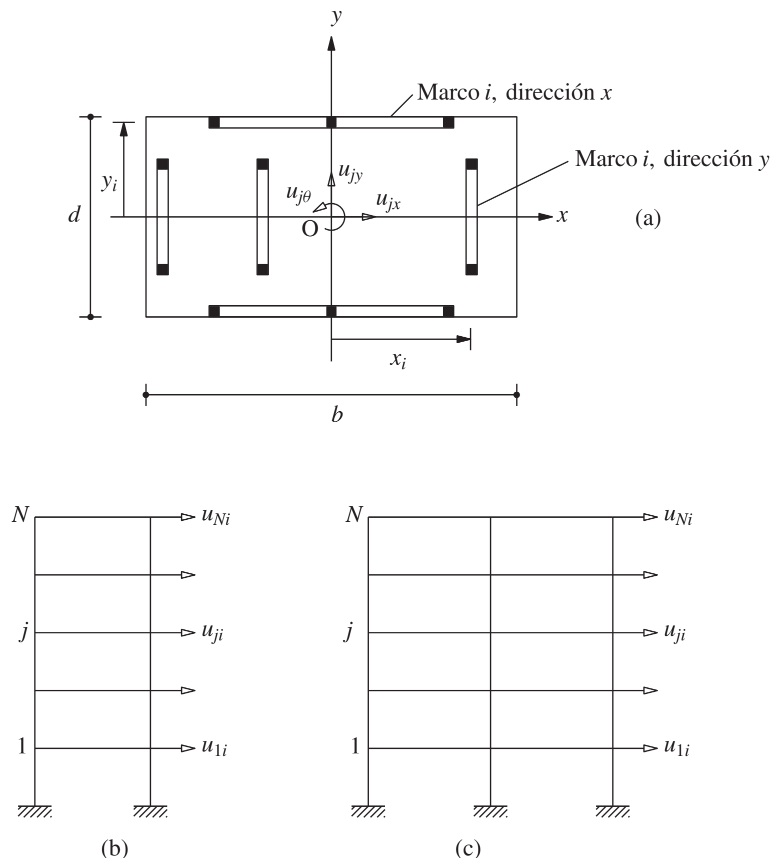


Figura 9.6.1 Sistema de varios niveles: (a) planta; (b) marco i, dirección y; (c) marco i, dirección x.

j-ésimo nivel son: la traslación u_{jx} a lo largo del eje x, la traslación u_{jy} a lo largo del eje y, y la rotación torsional $u_{j\theta}$ alrededor del eje vertical; u_{jx} y u^{jy} se definen en relación al terreno.

La excitación sísmica se define mediante $\ddot{u}_{gx}(t)$ y $\ddot{u}_{gy}(t)$, los componentes x y y de la aceleración del terreno, así como por $\ddot{u}_{go}(t)$, la aceleración rotacional del terreno alrededor del eje vertical. Aunque la aceleración rotacional de la base de un edificio no se registra en los acelerógrafos de movimientos fuertes, en algunos casos puede calcularse a partir de las aceleraciones traslacionales registradas en dos ubicaciones de la base (sección 13.4).

Como lo sugiere la formulación anterior de las ecuaciones de movimiento para un sistema de un solo nivel, el edificio de varios niveles sufriría el movimiento lateral-torsional acoplado descrito por los $3N$ grados de libertad: u_{jx}, u_{jy} y $u_{j\theta}$, $j = 1, 2, ..., N$. El vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ para el sistema, de tamaño $3N \times 1$, se define como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{u}_x = \langle u_{1x} \quad u_{2x} \quad \cdots \quad u_{Nx} \rangle^T \qquad \mathbf{u}_y = \langle u_{1y} \quad u_{2y} \quad \cdots \quad u_{Ny} \rangle^T$$

$$\mathbf{u}_\theta = \langle u_{1\theta} \quad u_{2\theta} \quad \cdots \quad u_{N\theta} \rangle^T$$

La matriz de rigidez de este sistema con respecto a los grados de libertad globales $\mathbf{u}$ se formula mediante el método de la rigidez directa; en éste se ejecutan cuatro pasos principales (similares a las ecuaciones 9.5.5 a 9.5.10 en el caso del marco de un nivel).

Paso 1. Determine la matriz de rigidez lateral de cada marco. Para el i-ésimo marco se determina mediante el siguiente procedimiento: (a) defina el grado de libertad para el i-ésimo marco: los desplazamientos laterales al nivel de los pisos, $\mathbf{u}_i = \langle u_{1i} \quad u_{2i} \quad \cdots \quad u_{Ni} \rangle^T$ (figura 9.5.3b y c), y los desplazamiento verticales y rotacionales de cada nodo. (b) Obtenga la matriz de rigidez completa para el i-ésimo marco con referencia al grado de libertad del marco. (c) Condense estáticamente todos los grados de libertad rotacionales y verticales para obtener la matriz de rigidez lateral del i-ésimo marco, con tamaño $N \times N$ e indicada mediante $\mathbf{k}_{xi}$ si el marco está orientado en la dirección x, o por $\mathbf{k}_{yi}$ si el marco es paralelo al eje y.

Paso 2. Determine la matriz de transformación del desplazamiento que relaciona el grado de libertad lateral $\mathbf{u}_i$ definido en el paso 1(a) para el i-ésimo marco con el grado de libertad global para el edificio. Esta matriz de $N \times 3N$ se indica mediante $\mathbf{a}_{xi}$ si el marco está orientado en la dirección x, o por $\mathbf{a}_{yi}$ si lo está en la dirección y. Así,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_{xi}\mathbf{u} \quad \text{o} \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{a}_{yi}\mathbf{u} \tag{9.6.1}$$

Estas matrices de transformación son

$$\mathbf{a}_{xi} = [\,\mathbf{I} \quad \mathbf{O} \quad -y_i\mathbf{I}\,] \quad \text{o} \quad \mathbf{a}_{yi} = [\,\mathbf{O} \quad \mathbf{I} \quad x_i\mathbf{I}\,] \tag{9.6.2}$$

donde x_i y y_i definen la ubicación del i-ésimo marco (figura 9.6.1a) orientado en las direcciones y y x, respectivamente, $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden N y $\mathbf{O}$ es una matriz cuadrada de orden N con todos los elementos iguales a cero.

Paso 3. Transforme la matriz de rigidez lateral para el i-ésimo marco en el grado de libertad del edificio a fin de obtener

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{xi}^T \mathbf{k}_{xi} \mathbf{a}_{xi} \quad \text{o} \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{a}_{yi}^T \mathbf{k}_{yi} \mathbf{a}_{yi} \tag{9.6.3}$$

La matriz $\mathbf{k}_i$ de $3N \times 3N$ es la contribución del i-ésimo marco a la matriz de rigidez del edificio.

Paso 4. Sume las matrices de rigidez para todos los marcos a fin de obtener la matriz de rigidez del edificio:

$$\mathbf{k} = \sum_i \mathbf{k}_i \tag{9.6.4}$$

Si se sustituye la ecuación (9.6.2) en la ecuación (9.6.3) y esta última en la ecuación (9.6.4), resulta

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xy} & \mathbf{k}_{x\theta} \\ \mathbf{k}_{yx} & \mathbf{k}_{yy} & \mathbf{k}_{y\theta} \\ \mathbf{k}_{\theta x} & \mathbf{k}_{\theta y} & \mathbf{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{9.6.5}$$

donde

$$\begin{gathered} \mathbf{k}_{xx} = \sum_i \mathbf{k}_{xi} \qquad \mathbf{k}_{yy} = \sum_i \mathbf{k}_{yi} \qquad \mathbf{k}_{\theta\theta} = \sum_i (x_i^2 \mathbf{k}_{yi} + y_i^2 \mathbf{k}_{xi}) \\ \mathbf{k}_{xy} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k}_{x\theta} = \mathbf{k}_{\theta x}^T = \sum_i -y_i \mathbf{k}_{xi} \qquad \mathbf{k}_{y\theta} = \mathbf{k}_{\theta y}^T = \sum_i x_i \mathbf{k}_{yi} \end{gathered} \tag{9.6.6}$$

Las ecuaciones de movimiento no amortiguado del edificio son

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} \mathbf{m} & & \\ & \mathbf{m} & \\ & & \mathbf{I}_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_x \\ \ddot{\mathbf{u}}_y \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xy} & \mathbf{k}_{x\theta} \\ \mathbf{k}_{yx} & \mathbf{k}_{yy} & \mathbf{k}_{y\theta} \\ \mathbf{k}_{\theta x} & \mathbf{k}_{\theta y} & \mathbf{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} \mathbf{m} & & \\ & \mathbf{m} & \\ & & \mathbf{I}_O \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gx}(t) + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{g\theta}(t) \right) \end{gathered} \tag{9.6.7}$$

donde $\mathbf{m}$ es una matriz diagonal de orden N, con $m_{jj} = m_j$, la masa concentrada en el diafragma del j-ésimo nivel; $\mathbf{I}_O$ es una matriz diagonal de orden N con $I_{jj} = I_{Oj}$, el momento de inercia del diafragma del j-ésimo nivel alrededor del eje vertical a través del centro de masa; y $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ son vectores de dimensión N, con todos los elementos iguales a 1 y cero, respectivamente.

Si se considera un componente del movimiento del terreno a la vez, la ecuación (9.6.7) indica que el movimiento del terreno en la dirección x puede sustituirse por la fuerzas sísmicas efectivas $-m_j\ddot{u}_{gx}(t)$, el movimiento del terreno en la dirección y por las fuerzas sísmicas efectivas $-m_j\ddot{u}_{gy}(t)$ y el movimiento del terreno en la dirección θ por las fuerzas sísmicas efectivas

$-I_{Oj}\ddot{u}_{g\theta}(t)$; observe que estas fuerzas son efectivas a lo largo de la dirección considerada para el componente del movimiento del terreno y son cero en las otras dos direcciones. La ecuación (9.6.7) puede interpretarse como la ecuación (9.4.8) con el vector de influencia ι asociado a los componentes x, y y θ del movimiento del terreno dado por los tres vectores en el lado derecho de la ecuación (9.6.7), respectivamente.

Debido a que los tres conjuntos de grados de libertad ($\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ y $\mathbf{u}_\theta$) en la ecuación (9.6.7) se acoplan a través de la matriz de rigidez, el sistema sometido a cualquiera de los componentes del movimiento del terreno responderá simultáneamente a los movimientos laterales en x y y, así como al movimiento torsional; tal movimiento se conoce como movimiento acoplado lateral-torsional.

9.6.1 Edificios de planta asimétrica en una dirección

A continuación se examinará un caso especial del sistema de la figura 9.6.1 que tiene propiedades de rigidez simétrica con respecto al eje x. Para tales sistemas, las submatrices de rigidez $\mathbf{k}_{xy} = \mathbf{k}_{x\theta} = \mathbf{0}$ y la ecuación (9.6.7) puede escribirse como

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_x + \mathbf{k}_{xx}\mathbf{u}_x = -\mathbf{m1}\,\ddot{u}_{gx}(t) \tag{9.6.8a}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \\ & \mathbf{I}_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_y \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{yy} & \mathbf{k}_{y\theta} \\ \mathbf{k}_{\theta y} & \mathbf{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \\ & \mathbf{I}_O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \tag{9.6.8b}$$

donde la excitación rotacional se ha descartado temporalmente.

La ecuación (9.6.8) permite las siguientes observaciones: el movimiento del terreno en la dirección x, un eje de simetría, haría que el edificio estuviese sometido sólo al movimiento lateral en la dirección x, y esta respuesta puede determinarse resolviendo el sistema de N grados de libertad controlado por la ecuación (9.6.8a), que es similar a las ecuaciones de movimiento para los sistemas planos (ecuación 9.4.8). El movimiento del terreno en la dirección y causaría un movimiento acoplado lateral-torsional del edificio, y esta respuesta puede determinarse resolviendo el sistema de $2N$ grados de libertad regido por la ecuación (9.6.8b).

9.6.2 Edificios de planta simétrica

A continuación se examinará un caso especial adicional del sistema de la figura 9.6.1, que tiene propiedades de rigidez simétricas respecto a los ejes x y y. Para tales sistemas, las submatrices de rigidez $\mathbf{k}_{xy} = \mathbf{k}_{x\theta} = \mathbf{k}_{y\theta} = \mathbf{0}$ y la ecuación (9.6.7) pueden escribirse como

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_x + \mathbf{k}_{xx}\mathbf{u}_x = -\mathbf{m1}\,\ddot{u}_{gx}(t) \tag{9.6.9a}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_y + \mathbf{k}_{yy}\mathbf{u}_y = -\mathbf{m1}\,\ddot{u}_{gy}(t) \tag{9.6.9b}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_\theta + \mathbf{k}_{\theta\theta}\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{I}_O\mathbf{1}\,\ddot{u}_{g\theta}(t) \tag{9.6.9c}$$

A partir de la ecuación (9.6.9) es evidente que un edificio de planta simétrica sometido a los componentes x, y y θ del movimiento del terreno (un componente a la vez) sólo estará sometido a los movimientos laterales en x o y, o bien al movimiento torsional,

respectivamente. Como corolario, un sistema de planta simétrica no experimentaría ningún movimiento torsional a menos que el movimiento de la base incluya la rotación alrededor de un eje vertical; consulte la sección 13.4 para ver un análisis más profundo de este tema. La respuesta de un edificio de planta simétrica a un componente individual del movimiento del terreno puede determinarse resolviendo un sistema de N grados de libertad controlado por las ecuaciones (9.6.9a), (9.6.9b) o (9.6.9c), según sea apropiado.

9.7 EXCITACIÓN MULTISOPORTE

Hasta ahora se ha supuesto que todos los soportes donde la estructura está conectada al terreno se someten a un movimiento idéntico al prescrito. En esta sección se generaliza la formulación anterior de las ecuaciones de movimiento para permitir diferentes movimientos prescritos (incluyendo la posibilidad de movimientos con varios componentes) en los distintos soportes. Tal excitación multisoporte (o excitación espacialmente variable) puede surgir en varias situaciones. En primer lugar, considere el análisis sísmico de las estructuras de gran longitud como el puente Golden Gate, que se muestra en la figura 2.1.2. Se espera que el movimiento del terreno generado por un sismo en la cercana falla de San Andrés varíe de manera significativa a lo largo de los 6450 pies de la estructura. Por lo tanto, deben prescribirse diferentes movimientos para los cuatro soportes: la base de las dos torres y los dos extremos del puente. En segundo lugar, considere el análisis dinámico de las tuberías en las centrales nucleares. Aunque la tubería puede no ser muy larga, sus extremos están conectados en diferentes lugares de la estructura principal y, por lo tanto, experimentan distintos movimientos durante un sismo.

Para el análisis de estos sistemas se extiende la formulación de la sección 9.4 a fin de incluir los grados de libertad en los soportes (figura 9.7.1). El vector de desplazamiento ahora contiene dos partes: (1) $\mathbf{u}^t$ que incluye los N grados de libertad de la superestructura, donde el superíndice T indica que se trata de desplazamientos totales y (2) $\mathbf{u}_g$ que contiene los N_g componentes de los desplazamientos de los soportes. La ecuación de equilibrio dinámico para todos los grados de libertad se escribe en forma particionada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_g^T & \mathbf{c}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g(t) \end{Bmatrix} \qquad (9.7.1)$$

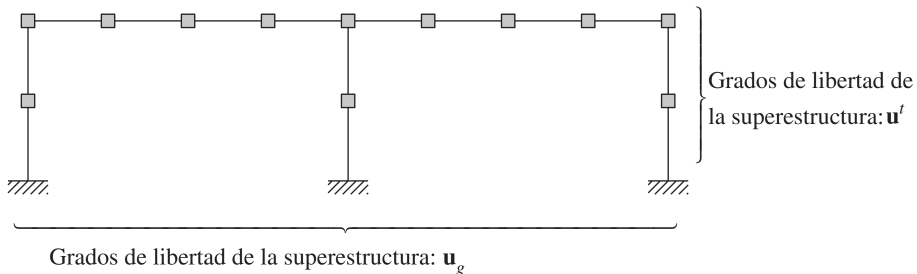


Figura 9.7.1 Definición de los grados de libertad de la superestructura y los soportes.

Observe que no se aplican fuerzas externas a lo largo de los grados de libertad de la superestructura. En la ecuación (9.7.1) las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez pueden determinarse a partir de las propiedades de la estructura utilizando los procedimientos presentados con anterioridad en este capítulo, mientras que los movimientos de los soportes $\mathbf{u}_g(t)$, $\dot{\mathbf{u}}_g(t)$ y $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$ deben especificarse. Se desea determinar los desplazamientos $\mathbf{u}^t$ en los grados de libertad de la superestructura y las fuerzas en los soportes $\mathbf{p}_g$.

Para escribir las ecuaciones que controlan el movimiento de un modo familiar a partir de la formulación anterior para una excitación sencilla, se separan los desplazamientos en dos partes, de manera similar a la ecuación (9.4.6):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{9.7.2}$$

En esta ecuación, $\mathbf{u}^s$ es el vector de los desplazamientos estructurales debidos a la aplicación estática de los desplazamientos $\mathbf{u}_g$ en los soportes, prescritos en cada instante de tiempo. Ambos se relacionan a través de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g^s \end{Bmatrix} \tag{9.7.3}$$

donde $\mathbf{p}_g^s$ son las fuerzas en los soportes necesarias para imponer estáticamente los desplazamientos $\mathbf{u}_g$ que varían con el tiempo; obviamente, $\mathbf{u}^s$ varía con el tiempo y, por consiguiente, se conoce como el vector de desplazamientos cuasi-estáticos. Observe que $\mathbf{p}_g^s = \mathbf{0}$ si la estructura es estáticamente determinada o si el sistema de soportes se somete a un movimiento de cuerpo rígido; para la última condición, un ejemplo evidente es el movimiento horizontal idéntico de todos los soportes. El resto de los desplazamientos estructurales $\mathbf{u}$ se conoce como los desplazamientos dinámicos, porque para poder evaluarlos se requiere un análisis dinámico.

Con los desplazamientos estructurales totales divididos en desplazamientos cuasi-estáticos y dinámicos, ecuación (9.7.2), se vuelve a la primera de las dos ecuaciones particionadas (9.7.1):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{k}\mathbf{u}^t + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g = \mathbf{0} \tag{9.7.4}$$

Si se sustituye la ecuación (9.7.2) y se transfieren todos los términos que contienen $\mathbf{u}_g$ y $\mathbf{u}^s$ a la derecha, resulta

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{ef}}(t) \tag{9.7.5}$$

donde el vector de fuerzas sísmicas efectivas es

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}^s + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{k}\mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g) \tag{9.7.6}$$

Este vector de fuerza efectiva puede reescribirse en una forma más útil. El último término se descarta porque la ecuación (9.7.3) da

$$\mathbf{k}\mathbf{u}^s + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g = \mathbf{0} \tag{9.7.7}$$

Esta relación también permite expresar los desplazamientos cuasi-estáticos $\mathbf{u}^s$ en términos de los desplazamientos en los soportes $\mathbf{u}_g$ especificados:

$$\mathbf{u}^s = \iota\,\mathbf{u}_g \qquad \iota = -\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}_g \tag{9.7.8}$$

ι se denomina la *matriz de influencia* porque describe la influencia de los desplazamientos de los soportes sobre los desplazamientos estructurales. Si se sustituyen las ecuaciones (9.7.8) y (9.7.7) en la ecuación (9.7.6), resulta

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -(\mathbf{m}\iota + \mathbf{m}_g)\ddot{\mathbf{u}}_g(t) - (\mathbf{c}\iota + \mathbf{c}_g)\dot{\mathbf{u}}_g(t) \tag{9.7.9}$$

Si se prescriben las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$ y las velocidades $\dot{\mathbf{u}}_g(t)$ del terreno (o los soportes), la $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$ se conoce a partir de la ecuación (9.7.9), y así se completa la formulación de la ecuación que controla el movimiento (ecuación 9.7.5).

Simplificación de $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$. Para muchas aplicaciones prácticas es posible lograr una mayor simplificación del vector de fuerza efectiva por dos razones. En primer lugar, el término de amortiguamiento en la ecuación (9.7.9) es cero si las matrices de amortiguamiento son proporcionales a las matrices de rigidez (es decir, $\mathbf{c} = a_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{c}_g = \mathbf{a}_1\mathbf{k}_g$) por la ecuación (9.7.7); sin embargo, en el capítulo 11 se muestra que este amortiguamiento proporcional a la rigidez es poco realista. Aunque el término de amortiguamiento en la ecuación (9.7.9) no es cero para las formas arbitrarias de amortiguamiento, por lo general es pequeño en relación con el término de inercia y, por lo tanto, puede eliminarse. En segundo lugar, para las estructuras cuyas masas se idealizan concentradas en los grados de libertad, la matriz de masa es diagonal, lo que implica que $\mathbf{m}_g$ es una matriz nula y que $\mathbf{m}$ es diagonal. Con estas simplificaciones, la ecuación (9.7.9) se reduce a

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\,\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \tag{9.7.10}$$

Observe que esta ecuación para las fuerzas sísmicas efectivas asociadas con la excitación multisoporte es una generalización de la ecuación (9.4.9), válida para las estructuras con un solo soporte (y para las estructuras con un movimiento idéntico en varios soportes). La matriz de influencia ι de $N \times N_g$ era antes un vector de $N \times 1$, y el vector $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$ de $N_g \times 1$ para los movimientos en los soportes era un escalar $\ddot{u}_g(t)$.

Interpretación de $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$. En esta sección será útil emplear una forma diferente de la ecuación (9.7.8a):

$$\mathbf{u}^s(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \iota_l u_{gl}(t) \tag{9.7.11}$$

donde ι_l, la l-ésima columna de la matriz de influencia ι, es el vector de influencia asociado con el desplazamiento del soporte u_{gl}. Éste es el vector de desplazamientos estáticos en los grados de libertad estructurales debidos a $u_{gl} = 1$. Si se usan las ecuaciones (9.7.8) y (9.7.11), el vector de fuerza efectiva, ecuación (9.7.10), puede expresarse como

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\sum_{l=1}^{N_g} \mathbf{m}\iota_l \ddot{u}_{gl}(t) \tag{9.7.12}$$

El l-ésimo término en la ecuación (9.7.12), que indica las fuerzas sísmicas efectivas debidas a la aceleración en el l-ésimo grado de libertad del soporte, tiene la misma forma que la ecuación (9.4.9) para las estructuras con un solo soporte (y para las estructuras con movimiento idéntico en soportes múltiples). Sin embargo, los dos casos se diferencian en un sentido importante: en el último caso, el vector de influencia puede determinarse usando la cinemática, y para el caso de las excitaciones multisoporte es necesario resolver N ecuaciones algebraicas (ecuación 9.7.7) a fin de determinar cada vector de influencia ι_l.

Ejemplo 9.10

Un puente continuo de dos claros uniformes, con rigidez a flexión *EI*, se idealiza como un sistema de masas concentradas (figura E9.10a). Formule las ecuaciones de movimiento para el puente sometido a los movimientos verticales, u_{g1}, u_{g2} y u_{g3} en los tres soportes. Considere sólo los grados de libertad traslacionales. Desprecie el amortiguamiento.

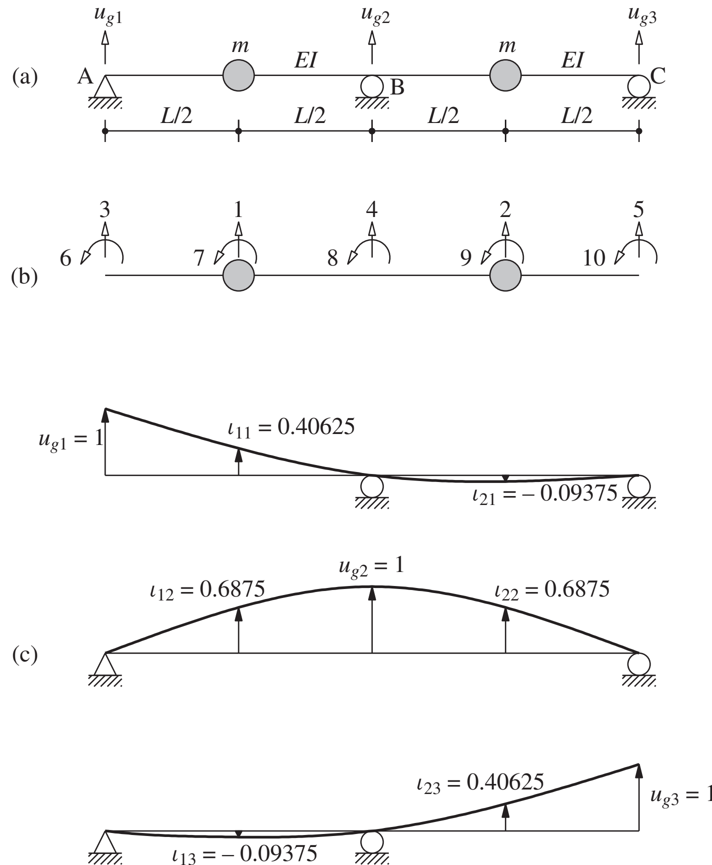


Figura E9.10

Solución

1. *Formule la matriz de rigidez.* Con referencia a los 10 grados de libertad identificados en la figura E9.10b, la matriz de rigidez del sistema se formula mediante el procedimiento utilizado en el ejemplo 9.7 para un marco de dos niveles. La condensación estática de los grados de libertad rotacionales, empleando el procedimiento de la sección 9.3, conduce a la matriz de

rigidez de 5 × 5 con referencia a los cinco grados de libertad traslacionales:

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 78.86 & 30.86 & -29.14 & -75.43 & -5.14 \\ 30.86 & 78.86 & -5.14 & -75.43 & -29.14 \\ -29.14 & -5.14 & 12.86 & 20.57 & 0.86 \\ -75.43 & -75.43 & 20.57 & 109.71 & 20.57 \\ -5.14 & -29.14 & 0.86 & 20.57 & 12.86 \end{bmatrix} \tag{a}$$

2. *Divida la matriz de rigidez.* Los vectores del grado de libertad estructural y el grado de libertad del soporte son

$$\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \rangle^T \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_g = \langle u_3 \quad u_4 \quad u_5 \rangle^T \tag{b}$$

La $\hat{\mathbf{k}}$ determinada previamente se divide:

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \tag{c}$$

donde

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 78.86 & 30.86 \\ 30.86 & 78.86 \end{bmatrix} \tag{d1}$$

$$\mathbf{k}_g = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -29.14 & -75.43 & -5.14 \\ -5.14 & -75.43 & -29.14 \end{bmatrix} \tag{d2}$$

$$\mathbf{k}_{gg} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12.86 & 20.57 & 0.86 \\ 20.57 & 109.71 & 20.57 \\ 0.86 & 20.57 & 12.86 \end{bmatrix} \tag{d3}$$

3. *Formule la matriz de masa.* En relación con los grados de libertad u_1 y u_2, la matriz de masa es

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{e}$$

4. *Determine la matriz de influencia.*

$$\iota = -\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} 0.40625 & 0.68750 & -0.09375 \\ -0.09375 & 0.68750 & 0.40625 \end{bmatrix} \tag{f}$$

Los vectores de influencia asociados con cada uno de los soportes son

$$\iota_1 = \langle 0.40625 \quad -0.09375 \rangle^T \tag{g1}$$

$$\iota_2 = \langle 0.68750 \quad 0.68750 \rangle^T \tag{g2}$$

$$\iota_3 = \langle -0.09375 \quad 0.40625 \rangle^T \tag{g3}$$

Los desplazamientos estructurales descritos por cada uno de los vectores de influencia se muestran en la figura E9.10c.

5. *Determine las ecuaciones de movimiento.*

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{ef}}(t) \tag{h}$$

donde **m** y **k** están definidos por las ecuaciones (e) y (d1), respectivamente. El vector de fuerza efectiva es

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\sum_{l=1}^{3} \mathbf{m}\iota_l \ddot{u}_{gl}(t) \tag{i}$$

donde los ι_l están dados por la ecuación (g) y las $\ddot{u}_{gl}(t)$ son las aceleraciones en los soportes.

9.8 SISTEMAS INELÁSTICOS

En la figura 1.3.1c se muestra la relación fuerza-deformación para un elemento estructural de acero sometido a deformaciones cíclicas. La curva de carga inicial es no lineal en las amplitudes más grandes de deformación, y las curvas de descarga y recarga difieren de la rama de carga inicial. Así, la relación entre el vector de fuerzas restauradoras $\mathbf{f}_S$ y el vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ es dependiente de la trayectoria, es decir, depende de si los desplazamientos están aumentando o disminuyendo. Entonces, $\mathbf{f}_S$ puede expresarse como una función implícita de $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{u}) \tag{9.8.1}$$

Esta ecuación general sustituye a la ecuación (9.2.3), y la ecuación (9.4.8) se convierte en

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_S(\mathbf{u}) = -\mathbf{m}\iota\, \ddot{u}_g(t) \tag{9.8.2}$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento para los sistemas inelásticos de VGDL sometidos a una aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, que es igual en todos los puntos de soporte.

Siguiendo el enfoque descrito en la sección 1.4 para los sistemas de 1GDL, la matriz de amortiguamiento de un sistema de VGDL que modela la disipación de energía surgida de los efectos dependientes de la velocidad dentro del intervalo de deformaciones elástico-lineales (vea el capítulo 11) se supone que también representa este mecanismo de amortiguamiento en el intervalo inelástico de deformaciones. La energía adicional disipada debido al comportamiento inelástico en las deformaciones más grandes se explica por la relación histerética de fuerza-deformación, utilizada en los procedimientos numéricos paso a paso para resolver las ecuaciones de movimiento (capítulo 16).

Estos procedimientos numéricos se basan en la linealización de las ecuaciones de movimiento en un paso de tiempo, de t_i a $t_i + \Delta t$, y en el uso de la iteración de Newton-Raphson (sección 5.7). La matriz de rigidez estructural en t_i se formula mediante el ensamble directo de las matrices de rigidez de los elementos. Para cada elemento estructural (columna, viga, muro, etcétera) la matriz de rigidez del elemento se determina para el estado del sistema (desplazamientos y velocidades) en t_i y el mecanismo de cedencia prescrito para el material. Después, las matrices de rigidez de los elementos se ensamblan. Estos procedimientos no se presentan en este libro de dinámica estructural, debido a que se espera que el lector esté familiarizado con el análisis estático de los sistemas inelásticos. Sin embargo, el tema se tratará brevemente en el capítulo 19 en el contexto del análisis no lineal para las idealizaciones sencillas de edificios con varios niveles.

9.9 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dadas la matriz de masa $\mathbf{m}$, la matriz de rigidez $\mathbf{k}$ de un sistema elástico-lineal o las relaciones de fuerza-deformación $\mathbf{f}_S(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ para un sistema inelástico, la matriz de amortiguamiento $\mathbf{c}$ y la excitación dinámica [que puede constar de las fuerzas externas $\mathbf{p}(t)$ o de la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$] un problema fundamental en la dinámica estructural consiste en determinar la respuesta de una estructura de VGDL.

El término *respuesta* indica cualquier cantidad de respuesta, como el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cada masa, así como una fuerza o esfuerzo internos en los elementos estructurales. Cuando la excitación es un conjunto de fuerzas externas, resultan de interés los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$, las velocidades $\dot{\mathbf{u}}(t)$ y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}(t)$. Para las excitaciones sísmicas pueden requerirse las cantidades de respuesta con relación al terreno

($\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$, y $\ddot{\mathbf{u}}$), así como las respuestas totales ($\mathbf{u}^t$, $\dot{\mathbf{u}}^t$ y $\ddot{\mathbf{u}}^t$). Los desplazamientos relativos $\mathbf{u}(t)$ asociados con las deformaciones de la estructura son los más importantes, puesto que las fuerzas internas en la estructura están directamente relacionadas con $\mathbf{u}(t)$.

9.10 ELEMENTOS MECÁNICOS

Una vez que se han determinado los desplazamientos relativos $\mathbf{u}(t)$ por medio del análisis dinámico, es posible encontrar los elementos mecánicos y los esfuerzos necesarios para el diseño estructural mediante el análisis estático de la estructura en cada instante de tiempo (es decir, no se requiere ningún análisis dinámico adicional). El análisis estático de un sistema de VGDL puede visualizarse de dos maneras:

1. En cada instante de tiempo los desplazamientos nodales se conocen a partir de $\mathbf{u}(t)$; si $\mathbf{u}(t)$ incluye sólo el grado de libertad dinámico, los desplazamientos en el grado de libertad condensado están dados por la ecuación (9.3.3). De acuerdo con los desplazamientos y rotaciones conocidos en los nodos de cada elemento estructural (viga y columna), los elementos mecánicos (momentos flexionantes y fuerzas cortantes) pueden determinarse a través de las propiedades de rigidez de los elementos (apéndice 1), y los esfuerzos pueden encontrarse a partir de los elementos mecánicos.

2. El segundo enfoque consiste en introducir las *fuerzas estáticas equivalentes*; en cualquier instante de tiempo t estas fuerzas $\mathbf{f}_S$ son las fuerzas externas que producirán los desplazamientos $\mathbf{u}$ en el mismo t en el componente de rigidez de la estructura. Así,

$$\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}(t) \tag{9.10.1}$$

Los elementos mecánicos o los esfuerzos pueden determinarse en cada instante de tiempo mediante el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $\mathbf{f}_S$. Los análisis estáticos repetidos pueden implementarse de manera eficiente en muchos instantes de tiempo, como se describe en el capítulo 13.

Para los sistemas inelásticos los elementos mecánicos pueden determinarse realizando las modificaciones adecuadas de estos procedimientos; el propósito es reconocer que tales sistemas se analizan mediante métodos paso a paso, con una iteración dentro de cada paso de tiempo (capítulo 16).

A fin de que la formulación del problema anterior se mantenga simple, se han excluido los sistemas sometidos a excitaciones múltiples y muy variables en los soportes (sección 9.7). Estos análisis de la respuesta dinámica implican consideraciones adicionales que se describen en la sección 13.5.

9.11 MÉTODOS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO: DESCRIPCIÓN GENERAL

La respuesta dinámica de los sistemas lineales con amortiguamiento clásico, que es un modelo razonable para muchas estructuras, puede determinarse mediante el análisis modal clásico. Para tales sistemas existen frecuencias naturales y modos de vibración clásicos (capítulo 10) y sus ecuaciones de movimiento se desacoplan al transformarlas a coordenadas modales (capítulos 12 y 13). Así, la respuesta en cada modo natural de vibración puede calcularse en forma independiente de las otras, y las respuestas modales pueden combinarse para determinar la

respuesta total. Cada modo responde con su propio patrón particular de deformación, la forma modal; con su propia frecuencia, la frecuencia natural; y con su propio amortiguamiento. Cada respuesta modal puede calcularse como una función del tiempo mediante el análisis de un sistema de 1GDL con las propiedades de vibración (frecuencia natural y amortiguamiento) del modo particular. Estas ecuaciones de 1GDL se resuelven en forma cerrada para las excitaciones que pueden describirse en forma analítica (capítulos 3 y 4), o se resuelven mediante métodos paso a paso para las excitaciones complicadas que se definen numéricamente (capítulo 5).

El análisis modal clásico no es aplicable a una estructura que consta de subsistemas con niveles muy diferentes de amortiguamiento. Para tales sistemas, el modelo de amortiguamiento clásico puede no ser apropiado, los modos de vibración clásicos no existen y las ecuaciones de movimiento no pueden desacoplarse mediante la transformación a coordenadas modales del sistema sin amortiguamiento. Estos sistemas pueden analizarse (1) por medio de la transformación de las ecuaciones de movimiento en los vectores característicos del problema de valores característicos complejo, que incluye la matriz de amortiguamiento (capítulo 14); o (2) mediante la solución directa del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales (capítulo 16). El último enfoque requiere métodos numéricos porque las soluciones analíticas no pueden obtenerse de forma cerrada, incluso si la excitación dinámica es una función simple en el tiempo descrita analíticamente y tampoco, por supuesto, si la excitación dinámica se describe numéricamente.

El análisis modal clásico tampoco es aplicable a los sistemas inelásticos independientemente del modelo de amortiguamiento, clásico o no clásico. El enfoque estándar consiste en resolver de manera directa las ecuaciones acopladas en los desplazamientos nodales originales mediante métodos numéricos (capítulo 16). La descripción general de los procedimientos de análisis presentados en esta sección se resume en la figura 9.11.1.

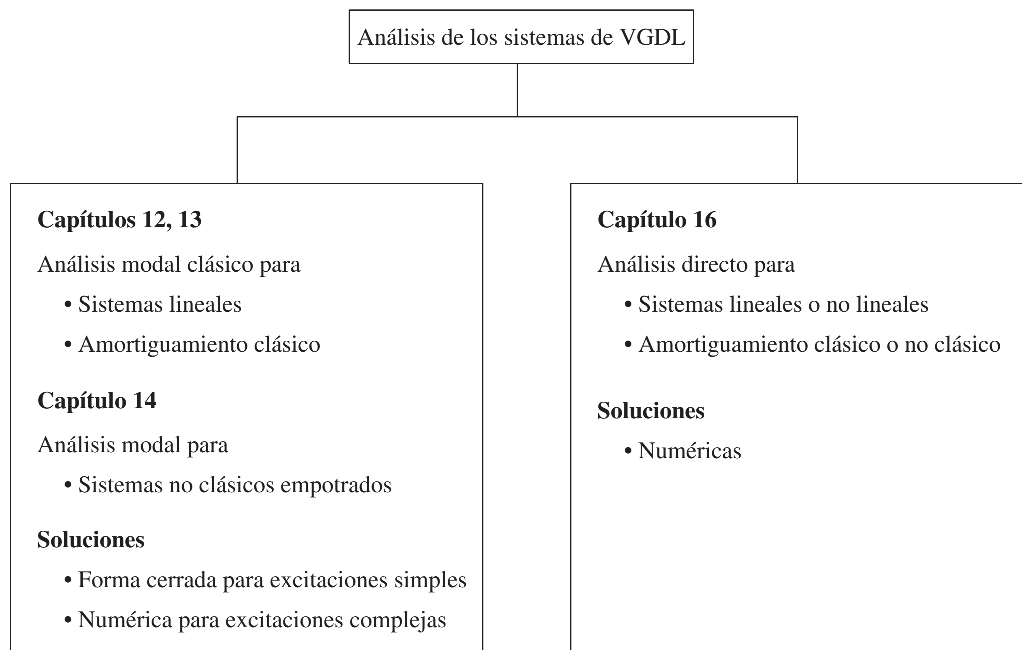


Figura 9.11.1

LECTURAS ADICIONALES

Clough, R. W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993, capítulos 9 y 10.

Craig, R. R., Jr. y Kurdila, A. J., *Fundamentals of Structural Dynamics*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2006, capítulo 8.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, 2a. ed., A. A. Balkema Publishers, Lisse, Países Bajos, 2002, capítulo 3.

PROBLEMAS

9.1 Una barra rígida uniforme de masa total m se apoya sobre dos resortes de k_1 y k_2 en sus dos extremos, y se somete a las fuerzas dinámicas que se muestran en la figura P9.1. La barra está restringida de modo que sólo puede moverse verticalmente en el plano. (*Nota*: éste es el sistema del ejemplo 9.2). Formule las ecuaciones de movimiento con respecto a los dos grados de libertad definidos en el extremo izquierdo de la barra.

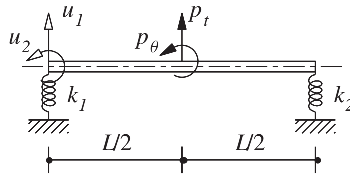


Figura P9.1

***9.2** Una viga uniforme simplemente apoyada, de longitud L, con rigidez a la flexión EI y masa m por unidad de longitud, se ha idealizado como el sistema de masas concentradas que se muestra en la figura P9.2. También se muestran las fuerzas aplicadas.

(a) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades elásticas y determinar la matriz de rigidez. Desprecie las deformaciones axiales de la viga.

(b) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades inerciales y determinar la matriz de masa.

(c) Formule las ecuaciones que controlan el movimiento de traslación de la viga.

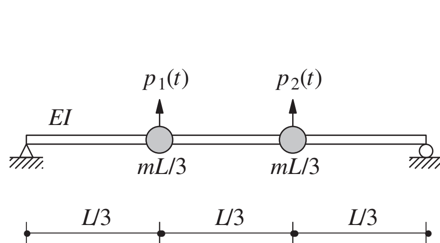


Figura P9.2

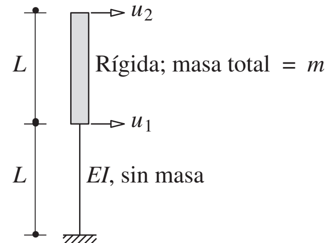


Figura P9.4

9.3 Para la viga de la figura P9.2 deduzca las ecuaciones de movimiento que controlan los desplazamientos traslacionales u_1 y u_2, iniciando directamente sólo con estos dos grados de libertad.

9.4 Una barra rígida está soportada por una columna sin peso como se muestra en la figura P9.4. Evalúe las matrices de masa, flexibilidad y rigidez del sistema definidas por los dos grados de libertad mostrados. No utilice una aproximación de masas concentradas.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

9.5 Use la definición de los coeficientes de influencia de rigidez y de masa y formule las ecuaciones de movimiento para el marco de cortante de dos niveles, con masas concentradas, que se muestra en la figura P9.5. Las vigas son rígidas y la rigidez a la flexión de las columnas es *EI*. Desprecie las deformaciones axiales en todos los elementos.

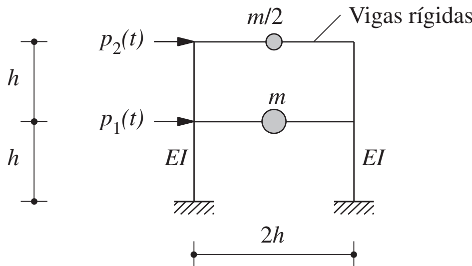


Figura P9.5

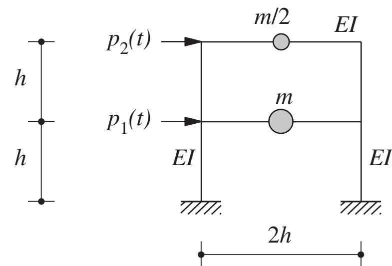


Figura P9.6

***9.6** En la figura P9.6 se muestra un marco de dos niveles con masas concentradas, que está sometido a fuerzas laterales, junto con algunas de sus propiedades. Por otro lado, la rigidez a la flexión es *EI* para todas las columnas y vigas.

(a) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades elásticas y determinar la matriz de rigidez. Desprecie las deformaciones axiales en todos los elementos.

(b) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades inerciales y determinar la matriz de masa. Suponga que los elementos no tienen masa y desprecie su inercia rotacional.

(c) Formule las ecuaciones que controlan el movimiento del marco en los grados de libertad del inciso (b).

9.7-9.8 Utilice la definición de los coeficientes de influencia de rigidez y masa, y formule las ecuaciones de movimiento para los marcos de cortante de tres niveles, con masas concentradas, que se muestran en las figuras P9.7 y P9.8. Las vigas son rígidas en flexión y la rigidez a la flexión de las columnas son como se muestra. Desprecie las deformaciones axiales en todos los elementos.

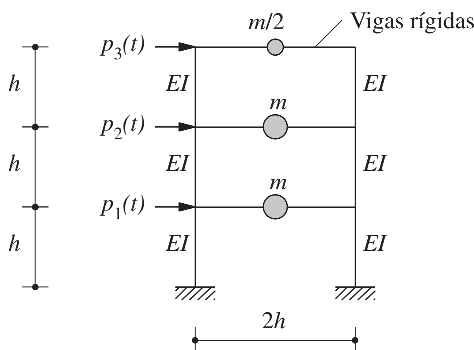


Figura P9.7

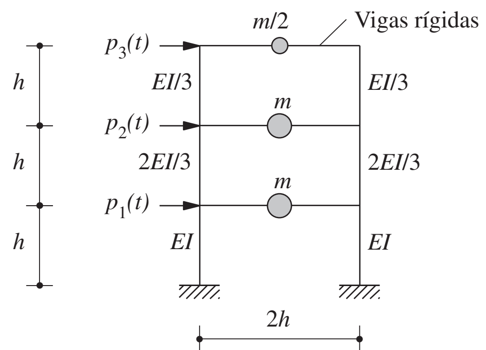


Figura P9.8

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

***9.9-9.12** Las figuras de P9.9 a P9.12 muestran marcos de tres niveles con masas concentradas y sometidos a fuerzas laterales, junto con la rigidez a la flexión de sus columnas y vigas.

(a) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades elásticas y determinar la matriz de rigidez. Desprecie la deformación axial de los elementos.

(b) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades inerciales y determinar la matriz de masa. Suponga que los elementos no tienen masa y desprecie su inercia rotacional.

(c) Formule las ecuaciones que controlan el movimiento del marco en los grados de libertad del inciso (b).

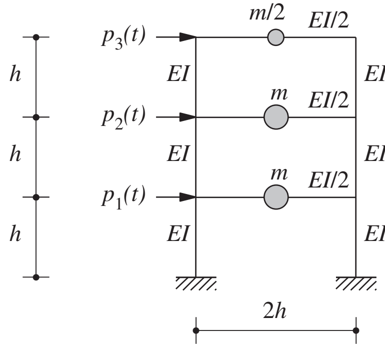


Figura P9.9

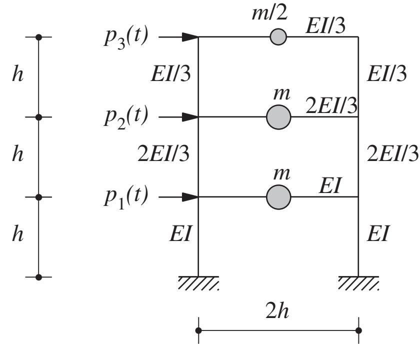


Figura P9.10

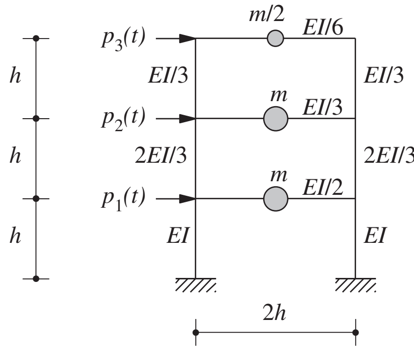


Figura P9.11

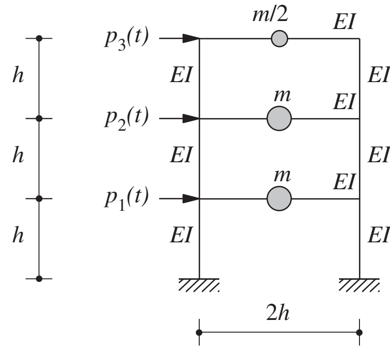


Figura P9.12

***9.13** Una estructura en forma de paraguas se idealizó como un ensamble de tres elementos en flexión con masas concentradas en los nodos, como se muestra en la figura P9.13.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(a) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades elásticas y determinar la matriz de rigidez. Desprecie las deformaciones axiales en todos los elementos.

(b) Identifique los grados de libertad para representar las propiedades inerciales y determinar la matriz de masa.

(c) Formule las ecuaciones de movimiento que controlan los grados de libertad del inciso (b) cuando la excitación es (i) un movimiento horizontal del terreno, (ii) un movimiento vertical del terreno, (iii) un movimiento del terreno en la dirección *b-d*, (iv) un movimiento de terreno en la dirección *b-c* y (v) un movimiento de cabeceo del terreno en el plano de la estructura.

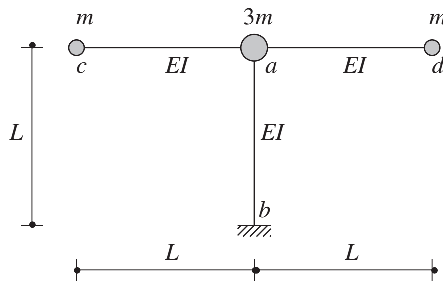


Figura P9.13

9.14 En la figura P9.14 se muestra una losa uniforme apoyada sobre cuatro columnas unidas rígidamente a la losa y empotradas en su base. La losa tiene una masa total m y es rígida en el plano y fuera del plano. Cada columna tiene una sección transversal circular y su segundo momento de área transversal alrededor de cualquier eje diametral es como se indica. Con los grados de libertad seleccionados como u_x, u_y y u_θ en el centro de la losa y usando coeficientes de influencia:

(a) Formule las matrices de masa y rigidez en términos de m y de la rigidez lateral $k = 12EI/h^3$ de la columna más pequeña; h es la altura.

(b) Formule las ecuaciones de movimiento para un movimiento del terreno en (i) la dirección x, (ii) la dirección y, y (iii) la dirección *b–d*.

9.15 Repita el problema 9.14 utilizando el segundo conjunto de grados de libertad mostrados en la figura P9.15.

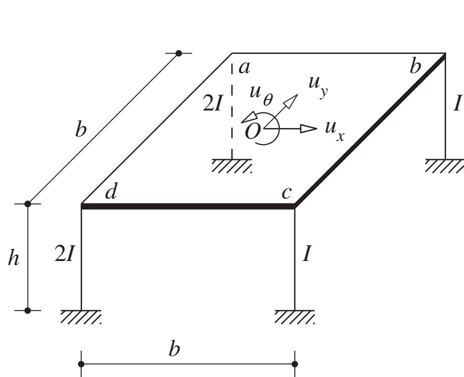


Figura P9.14

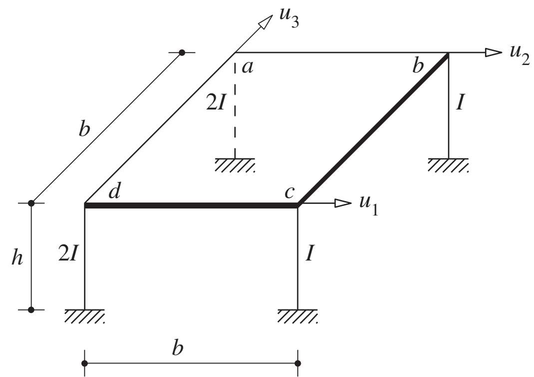


Figura P9.15

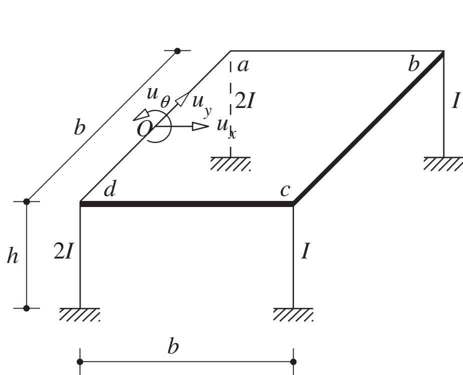


Figura P9.16

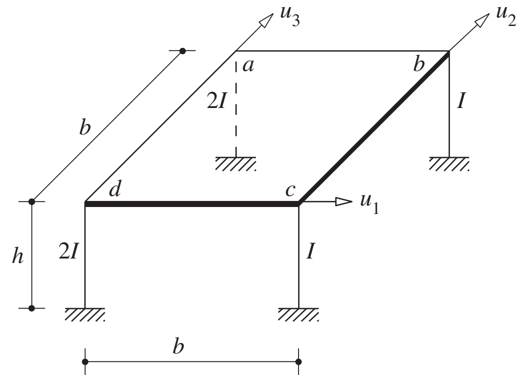


Figura P9.17

9.16 Repita el problema 9.14 utilizando los grados de libertad mostrados en la figura P9.16.

9.17 Repita el problema 9.14 utilizando los grados de libertad mostrados en la figura P9.17.

9.18 En la figura P9.18 se muestra un tubo tridimensional *abcd* empotrado en *a* con masa *m* en *d*. Todos los elementos están hechos del mismo material y tienen las mismas secciones transversales. Formule las ecuaciones de movimiento que controlan los grados de libertad u_x, u_y y u_z cuando la excitación es un movimiento del terreno en (i) la dirección *x*, (ii) la dirección *y*, (iii) la dirección *z*, y (iv) la dirección *a*-*d*. En primer lugar, exprese la matriz de flexibilidad en términos de *E*, *I*, *G*, *J* y *L*; después, especifíquela para $GJ = \frac{4}{5} EI$. Considere las deformaciones de flexión y torsión, pero desprecie las deformaciones axiales.

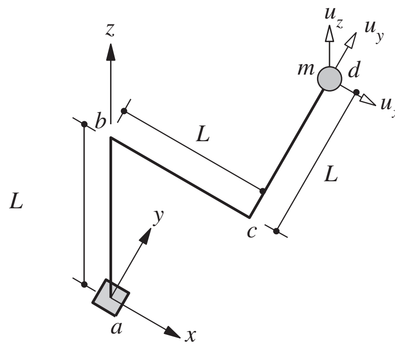


Figura P9.18

9.19 Formule las ecuaciones de movimiento para el sistema que se muestra en la figura P9.19, sometido a los desplazamientos en los soportes $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$. Estas ecuaciones que controlan los

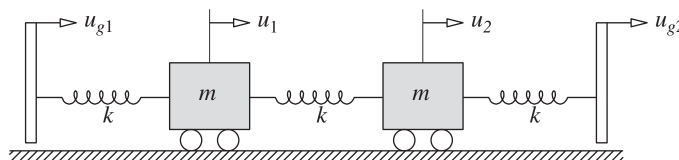


Figura P9.19

componentes dinámicos de los desplazamientos u_1 y u_2 (los desplazamientos totales menos los desplazamientos cuasi-estáticos) deben expresarse en términos de m, k, $\ddot{u}_{g1}(t)$ y $\ddot{u}_{g2}(t)$.

9.20 En la figura P9.20 se muestra una viga simplemente apoyada y sin masa, con una masa concentrada en el centro y sometida a los movimientos $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$ en los dos soportes. Formule la ecuación de movimiento que controle el componente dinámico del desplazamiento u (= desplazamiento total − desplazamiento cuasi-estático) de la masa concentrada. Exprese esta ecuación en términos de m, EI, L, $\ddot{u}_{g1}(t)$ y $\ddot{u}_{g2}(t)$.

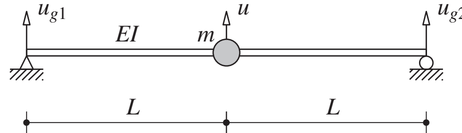


Figura P9.20

***9.21** En la figura P9.21 se muestra un tubo de una planta industrial. El tubo está empotrado en los soportes a y b, y tiene un doblez de 90º en c. Sostiene dos válvulas pesadas de masa m en la forma mostrada. Despreciando las deformaciones axiales y la masa del tubo, formule las ecuaciones de movimiento para este sistema sometido a desplazamientos en los soportes $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$. Estas ecuaciones que controlan el componente dinámico (= desplazamiento total – componente cuasi-estático) de los desplazamientos u_1 y u_2 deben expresarse en términos de m, EI y L. ¿En qué se diferencian estas ecuaciones de las que controlan el caso de un movimiento idéntico en ambos soportes?

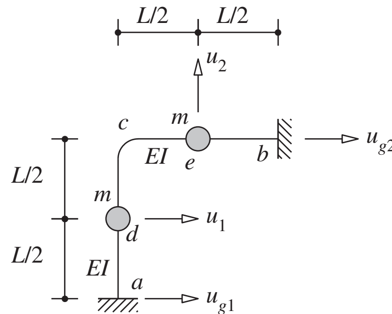


Figura P9.21

***9.22** En la figura P9.22 se muestra un puente con un solo claro. Despreciando las deformaciones axiales, formule las ecuaciones de movimiento para este sistema sometido a desplazamientos en los soportes $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$. Estas ecuaciones que controlan el componente dinámico

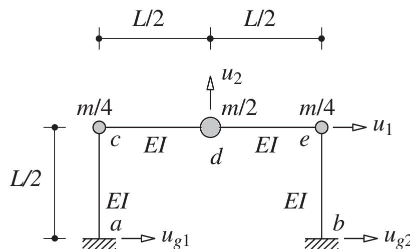


Figura P9.22

*Indica que la solución del problema requiere una de computadora.

(= desplazamiento total − componente cuasi-estático) de los desplazamientos u_1 y u_2 deben expresarse en términos de *m*, *EI* y *L*. ¿En qué se diferencian estas ecuaciones de las que controlan el caso de un movimiento idéntico en ambos soportes?

***9.23** En la figura P9.23 se muestra una losa uniforme apoyada sobre cuatro columnas idénticas, unidas rígidamente a la losa y empotradas en su base. La losa tiene una masa total *m* y es rígida en el plano y fuera de éste. Cada columna tiene una sección transversal circular y su rigidez alrededor de cualquier eje diametral es como se indica. Con los grados de libertad seleccionados como u_x, u_y y u_θ, formule las ecuaciones de movimiento del sistema sometido a los desplazamientos del terreno $u_{ga}(t)$, $u_{gb}(t)$, $u_{gc}(t)$ y $u_{gd}(t)$ en la dirección *x* de los soportes de las columnas *a*, *b*, *c* y *d*, respectivamente. Estas ecuaciones que controlan el componente dinámico (= desplazamiento total − componente cuasi-estático) de los desplazamientos u_x, u_y y u_θ deben expresarse en términos de *m*, *b* y $k = 12EI/h^3$ de las columnas. ¿En qué se diferencian estas ecuaciones de las que controlan el caso de un movimiento idéntico del terreno $u_g(t)$ en todos los soportes de columna?

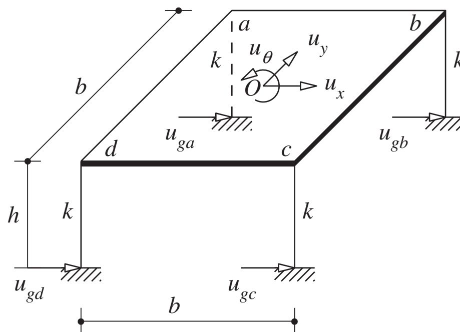


Figura P9.23

***9.24** Formule las ecuaciones de movimiento para el sistema del problema 9.14, sometido a los desplazamientos del terreno $u_{ga}(t)$, $u_{gb}(t)$, $u_{gc}(t)$ y $u_{gd}(t)$ en la dirección *x* de los soportes de las columnas *a*, *b*, *c* y *d*, respectivamente. Estas ecuaciones que controlan el componente dinámico (= desplazamiento total − componente cuasi-estático) de los desplazamientos u_x, u_y y u_θ deben expresarse en términos de *m*, *b*, *h* y la rigidez lateral $k = 12EI/h^3$ de la columna más pequeña. ¿En qué se diferencian estas ecuaciones de las que controlan el caso de un movimiento idéntico del suelo $u_g(t)$ en todos los soportes de columna?

***9.25** Una torre para toma y entrega de agua está empotrada en la base y parcialmente sumergida, además tiene un acceso desde el borde del depósito mediante un puente peatonal que es axialmente rígido y está conectado a la torre por medio de una articulación (figura P9.25). (En la práctica, el deslizamiento en la conexión suele estar permitido. La conexión de pasador se ha utilizado aquí sólo como parte de un problema hipotético). La torre uniforme de 200 pies de altura tiene una sección transversal hueca hecha de concreto reforzado con un diámetro exterior = 25 pies y un espesor de pared = 1 pie 3 pulg. Es posible calcular un valor aproximado de la rigidez a la flexión *EI*, a partir de las propiedades generales de la sección de concreto sin refuerzo; el módulo de elasticidad del concreto es $E = 3.6 \times 10^3$ ksi. Para los propósitos de un análisis preliminar la masa de la torre se concentra en la forma mostrada en dos ubicaciones igualmente espaciadas, donde *m* es la masa por unidad de longitud y *L* es la longitud total de la torre, el peso unitario del concreto es de 150 lb/pie^3. (La masa añadida del agua circundante puede despreciarse aquí, pero debe considerarse en el análisis práctico).

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

Se desea analizar la respuesta de esta estructura a los movimientos en los soportes $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$. Formule las ecuaciones de movimiento que controlan los componentes dinámicos de los desplazamientos u_1 y u_2 (componente dinámico = desplazamiento total – componente cuasi-estático).

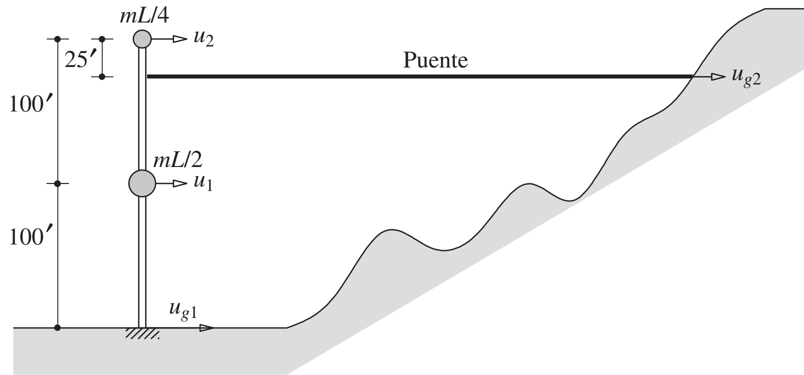


Figura P9.25

10

Vibración libre

AVANCE

Por *vibración libre* se entiende el movimiento de una estructura sin ninguna excitación dinámica (fuerzas externas o movimientos en los soportes). La vibración libre inicia al perturbar la estructura desde su posición de equilibrio mediante algunos desplazamientos iniciales y/o al impartir algunas velocidades iniciales.

Este capítulo sobre las vibraciones libres de sistemas con VGDL se divide en tres partes. En la parte A se desarrolla la noción de las frecuencias y los modos naturales de vibración de una estructura; estos conceptos desempeñan un papel central en el análisis dinámico y sísmico de los sistemas lineales (capítulos 12 y 13).

En la parte B se describe el uso de estas propiedades de vibración para determinar la respuesta de los sistemas a la vibración libre. Primero se analizan los sistemas sin amortiguamiento. Después, se definen los sistemas con amortiguamientos clásico y no clásico. El procedimiento del análisis se extiende a los sistemas con amortiguamiento clásico, reconociendo que tales sistemas tienen los mismos modos naturales que los sistemas no amortiguados.

La parte C se refiere a la solución numérica del problema de valor propio para determinar las frecuencias y los naturales modos de vibración. Los métodos vectoriales de iteración resultan eficaces en las aplicaciones de ingeniería estructural, por lo que esta presentación se limita a dichos métodos. Se incluyen sólo las ideas básicas de la iteración vectorial, sin entrar en la iteración del subespacio o en el método de Lanczos. Aunque este tratamiento limitado sería suficiente para muchos problemas prácticos y aplicaciones de investigación, el lector debe reconocer que existe una gran cantidad de información sobre el tema.

PARTE A: FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN NATURALES

10.1 SISTEMAS SIN AMORTIGUAMIENTO

La vibración libre de los sistemas lineales de VGDL está regida por la ecuación (9.2.12) con $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$, que en los sistemas sin amortiguamiento es

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = 0 \tag{10.1.1}$$

La ecuación (10.1.1) representa N ecuaciones diferenciales homogéneas que se acoplan a través de la matriz de masa, la matriz de rigidez o ambas matrices; N es el número de grados de libertad. Se desea encontrar la solución $\mathbf{u}(t)$ de la ecuación (10.1.1) que satisfaga las condiciones iniciales

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) \qquad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0) \tag{10.1.2}$$

en $t = 0$. En la sección 10.8 se desarrolla un procedimiento general a fin de obtener la solución deseada para cualquier sistema de VGDL. En esta sección la solución se presenta en forma gráfica, lo que permite comprender la vibración libre de un sistema de VGDL en términos cualitativos.

En la figura 10.1.1 se muestra la vibración libre de un marco de cortante de dos niveles. Se indican las rigideces de entrepiso y las masas concentradas en cada nivel; la vibración libre inicia debido a las deflexiones mostradas por la curva a en la figura 10.1.1b. El movimiento resultante u_j de las dos masas se grafica en la figura 10.1.1d como una función del tiempo; T_1 se definirá más adelante.

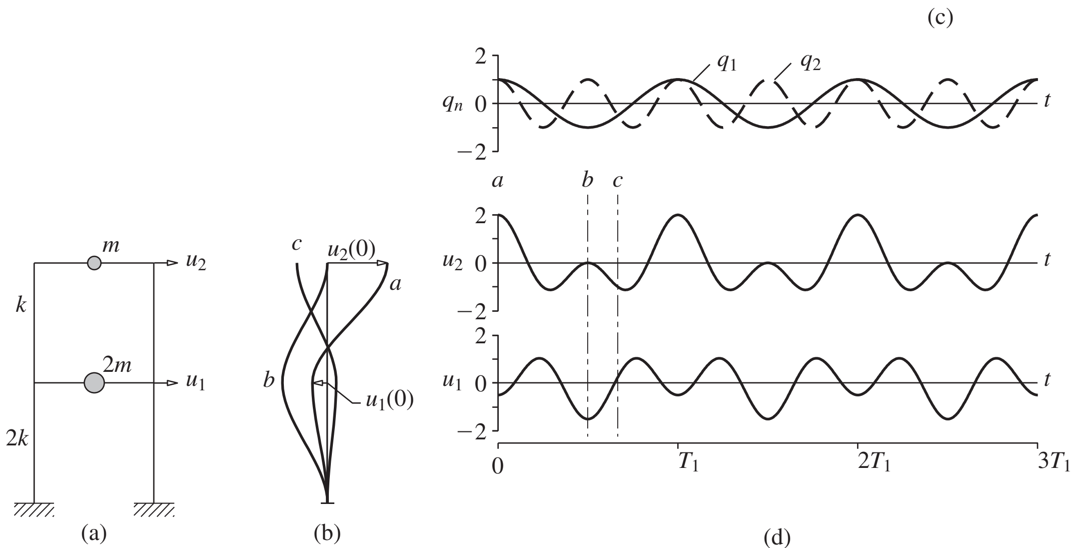


Figura 10.1.1 Vibración libre de un sistema no amortiguado debida a un desplazamiento inicial arbitrario: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo a, b y c; (c) coordenadas modales $q_n(t)$; (d) historia del desplazamiento.

También se muestran las formas modificadas de la estructura en los instantes de tiempo seleccionados *a*, *b* y *c*; el $q_n(t)$ graficado en la figura 10.1.1c se analiza en el ejemplo 10.11. La gráfica del desplazamiento en el tiempo para el *j*-ésimo nivel comienza con las condiciones iniciales $u_j(0)$ y $\dot{u}_j(0)$; los $u_j(0)$ se identifican en la figura 10.1.1b y $\dot{u}_j(0) = 0$ para ambos niveles. Contrario a lo observado en la figura 2.1.1 para los sistemas de 1GDL, el movimiento de cada masa (o del nivel), no es un movimiento armónico simple y no es posible definir la frecuencia del movimiento. Además, la forma modificada (es decir, la relación u_1/u_2) varía con el tiempo, como es evidente por las formas modificadas diferentes *b* y *c*, que a su vez son distintas de la forma modificada inicial *a*.

Sin embargo, una estructura no amortiguada se sometería a un movimiento armónico simple, sin cambiar de forma modificada, si la vibración libre iniciase por las distribuciones de desplazamiento adecuadas en los diversos grados de libertad. Como se muestra en las figuras 10.1.2 y 10.1.3, existen dos formas características modificadas para este sistema de dos grados de libertad, de manera que si se desplaza en una de estas formas y se libera, vibrará en un movimiento armónico simple, manteniendo la forma inicial modificada. Los dos niveles vibran en la misma fase, es decir, pasan a través de sus posiciones máxima, mínima o de equilibrio en el mismo instante de tiempo. Cada forma modificada característica se denomina *modo natural de vibración* del sistema de VGDL.

Observe que los desplazamientos de ambos niveles tienen la misma dirección en el primer modo, pero direcciones opuestas en el segundo. El punto de desplazamiento cero, llamado *nodo*,† no se mueve en absoluto (figura 10.1.3); a medida que el número de modo *n* aumenta, el número de nodos se incrementa en consecuencia (vea la figura 12.8.2.).

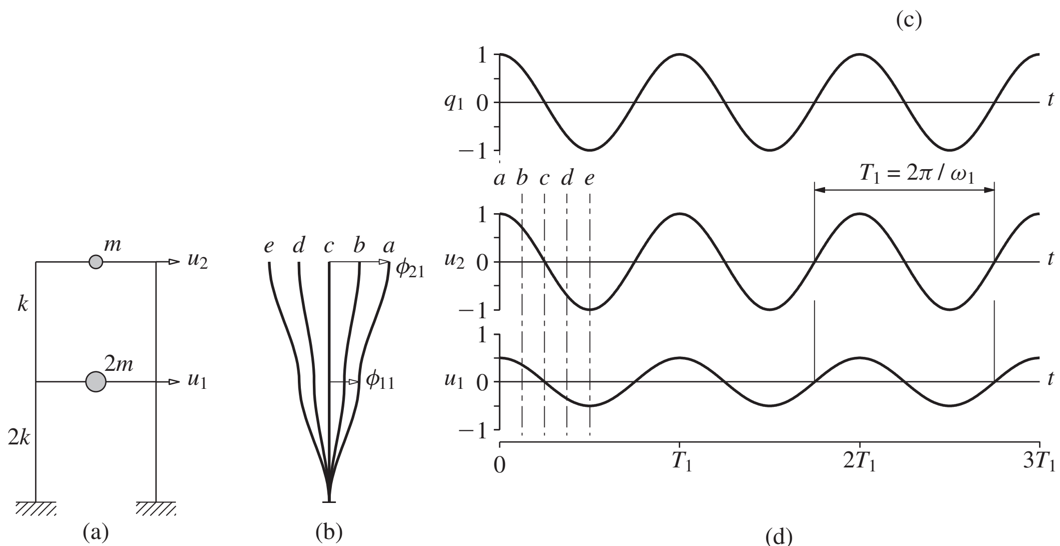


Figura 10.1.2 Vibración libre de un sistema no amortiguado en su primer modo de vibración natural: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo *a*, *b*, *c*, *d* y *e*; (c) coordenadas modales $q_1(t)$; (d) historia del desplazamiento.

† Recuerde que el término *nodo* se ha utilizado para los puntos nodales en la idealización estructural; los dos usos diferentes de *nodo* deben resultar claros según el contexto.

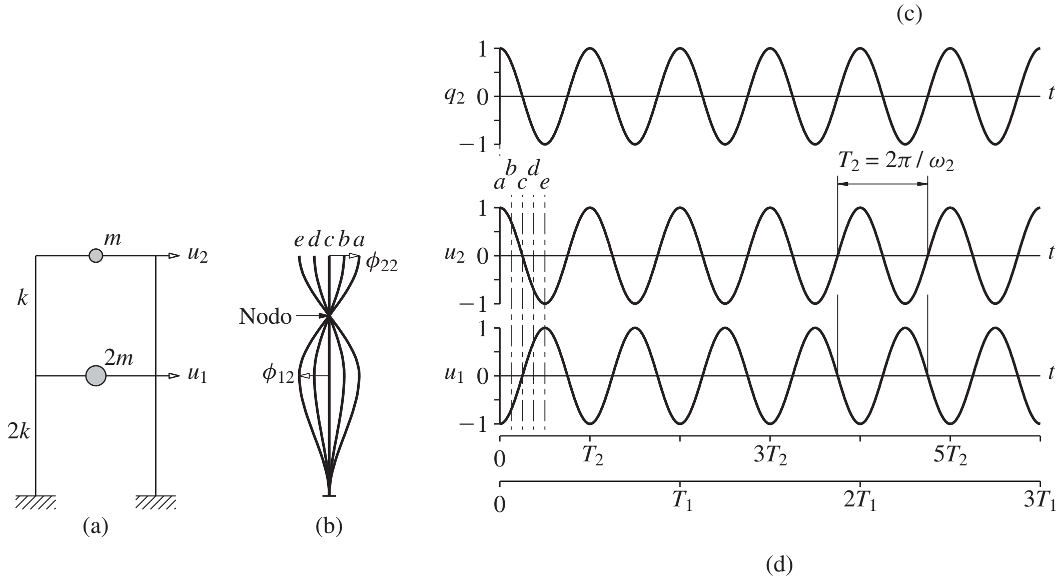


Figura 10.1.3 Vibración libre de un sistema no amortiguado en su segundo modo de vibración natural: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo *a*, *b*, *c*, *d* y *e*; (c) coordenadas modales $q_2(t)$; (d) historia del desplazamiento.

Un *periodo de vibración natural* T_n de un sistema de VGDL es el tiempo requerido para un ciclo del movimiento armónico simple en uno de esos modos naturales. La correspondiente *frecuencia circular natural de vibración* es ω_n y la *frecuencia cíclica natural de vibración* es f_n, donde

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \tag{10.1.3}$$

Las figuras 10.1.2 y 10.1.3 muestran los dos periodos naturales T_n y las frecuencias naturales ω_n ($n = 1, 2$) del edificio de dos niveles que vibra en sus modos naturales $\phi_n = \langle \phi_{1n} \quad \phi_{2n} \rangle^T$. La más pequeña de las dos frecuencias de vibración natural se indica por ω_1 y la más grande por ω_2. En la misma medida, el más largo de los dos periodos de vibración natural se indica por T_1 y el más corto por T_2.

10.2 FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN NATURALES

En esta sección se presenta el problema de valor propio cuya solución proporciona las frecuencias y modos naturales de un sistema. En las figuras 10.1.2 y 10.1.3 se muestra gráficamente la vibración libre de un sistema no amortiguado en una de sus modalidades de vibración natural; para un sistema de dos grados de libertad ésta puede describirse en forma matemática como

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\phi_n \tag{10.2.1}$$

donde la forma modificada ϕ_n no varía con el tiempo. La variación de los desplazamientos se describe mediante la función armónica simple

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{10.2.2}$$

donde A_n y B_n son constantes que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales que inician el movimiento. Si se combinan las ecuaciones (10.2.1) y (10.2.2), resulta

$$\mathbf{u}(t) = \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \tag{10.2.3}$$

donde ω_n y ϕ_n son incógnitas.

Al sustituir esta forma de $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación (10.1.1) se obtiene

$$\left[-\omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n + \mathbf{k} \phi_n\right] q_n(t) = \mathbf{0}$$

Esta ecuación puede satisfacerse de dos maneras. Ya sea que $q_n(t) = 0$, lo que implica que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ y que el sistema no tiene movimiento (ésta es la solución conocida como trivial), o que las frecuencias ω_n y los modos ϕ_n naturales satisfagan la siguiente ecuación algebraica:

$$\mathbf{k} \varphi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n \tag{10.2.4}$$

la cual proporciona una condición útil. Esta ecuación algebraica se denomina *problema matricial de valor característico o eigenvalor*. Cuando es necesario se llama problema de valor característico real para distinguirlo del problema de valor característico complejo mencionado en el capítulo 14 para los sistemas con amortiguamiento. Las matrices de rigidez **k** y masa **m** son conocidas, por lo que el problema consiste en determinar el escalar ω_n^2 y el vector ϕ_n.

Para indicar la solución formal de la ecuación (10.2.4) se reescribe como

$$\left[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}\right] \phi_n = \mathbf{0} \tag{10.2.5}$$

que puede interpretarse como un conjunto de N ecuaciones algebraicas homogéneas para los N elementos ϕ_{jn} ($j = 1, 2, \ldots, N$). Este conjunto siempre tiene la solución trivial $\phi_n = \mathbf{0}$, que no es útil porque implica que no existe movimiento. Se tienen soluciones no triviales si

$$\det\left[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}\right] = 0 \tag{10.2.6}$$

Al expandir el determinante se obtiene un polinomio de orden N en ω_n^2. La ecuación (10.2.6) se conoce como *ecuación característica* o *ecuación de frecuencia*. Esta ecuación tiene N raíces reales y positivas para ω_n^2 porque **m** y **k**, las matrices de masa y rigidez estructurales, son simétricas y positivas definidas. La propiedad de matriz positiva definida de **k** está asegurada para todas las estructuras soportadas de una manera que impida el movimiento del cuerpo rígido. Tal es el caso de las estructuras de ingeniería civil que interesan a este texto, pero no para las estructuras sin restricciones como las aeronaves en vuelo (éstas se encuentran fuera del alcance de este libro). La propiedad de matriz positiva definida de **m** también está asegurada, porque las masas agrupadas son distintas de cero en todos los grados de libertad retenidos en el análisis después de que los grados de libertad con masa concentrada cero se han eliminado mediante la condensación estática (sección 9.3).

La N raíces, ω_n^2, de la ecuación (10.2.6) determinan las N frecuencias naturales de vibración ω_n ($n = 1, 2, \ldots, N$), dispuestas por convención en secuencia de menor a mayor ($\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N$). Estas raíces de la ecuación característica se conocen también como *valores propios*, *valores característicos* o *valores normales*. Cuando una frecuencia natural ω_n es conocida, la ecuación (10.2.5) puede resolverse para el correspondiente vector ϕ_n. El problema de valor característico no fija la amplitud absoluta de los vectores ϕ_n, sino

sólo la forma del vector dada por los valores relativos de los N desplazamientos ϕ_{jn} ($j = 1, 2, \ldots, N$). En correspondencia a las N frecuencias de vibración natural ω_n de un sistema de VGDL, existen N vectores independientes ϕ_n, que son conocidos como los *modos naturales de vibración*, o las *formas naturales de los modos de vibración*. Estos vectores también se denominan *vectores propios*, *vectores característicos* o *modos normales*. El término *natural* se utiliza para calificar cada una de estas propiedades de vibración, a fin de enfatizar el hecho de que éstas son propiedades naturales de la estructura en vibración libre, y que sólo dependen de sus propiedades de masa y rigidez. El subíndice n indica el número del modo, y el primer modo ($n = 1$) también se conoce como el modo fundamental.

Como ya se mencionó, durante la vibración libre en cada modo natural, un sistema no amortiguado oscila en su frecuencia natural con todos los grados de libertad del sistema que vibra en la misma fase, pasando por sus posiciones máxima, mínima o de equilibrio en el mismo instante de tiempo. Como este tipo de modos naturales fueron el tema del tratado clásico de mecánica de Lagrange (1811), se hará referencia a ellos como los *modos naturales clásicos*. En los sistemas amortiguados esta propiedad suele violarse y los modos naturales clásicos no existen, como se verá más adelante.

10.3 MATRICES MODAL Y ESPECTRAL

Los N valores propios y los N modos naturales pueden ensamblarse de manera compacta en matrices. Si el modo natural ϕ_n correspondiente a la frecuencia natural ω_n tiene los elementos ϕ_{jn}, donde j indica los grados de libertad, entonces los N vectores propios pueden mostrarse en una sola matriz cuadrada, en la que cada una de sus columnas es un modo natural:

$$\Phi = \left[\phi_{jn}\right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

La matriz Φ se llama la *matriz modal* para el problema de valor característico, ecuación (10.2.4). Los N valores característicos ω_n^2 pueden ensamblarse en una matriz diagonal Ω^2, que se conoce como la *matriz espectral* del problema de valor característico, ecuación (10.2.4):

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Cada valor y vector característico satisface la ecuación (10.2.4), que puede reescribirse como la relación

$$\mathbf{k}\phi_n = \mathbf{m}\phi_n\omega_n^2 \tag{10.3.1}$$

Mediante el uso de las matrices modal y espectral es posible reunir todas estas relaciones ($n = 1, 2, \ldots, N$) en una sola ecuación matricial:

$$\mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Omega^2 \tag{10.3.2}$$

La ecuación (10.3.2) ofrece una presentación compacta de las ecuaciones que relacionan a todos los valores y vectores característicos.

10.4 ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS

Es posible demostrar que los modos naturales correspondientes a las diferentes frecuencias naturales satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad. Cuando $\omega_n \neq \omega_r$,

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \qquad \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0 \tag{10.4.1}$$

Estas propiedades importantes pueden demostrarse de la manera siguiente: la frecuencia natural y el modo natural n-ésimos satisfacen la ecuación (10.2.4); si la transpuesta de ϕ_r se multiplica antes por ϕ_r^T, resulta

$$\phi_r^T \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \phi_r^T \mathbf{m} \phi_n \tag{10.4.2}$$

De manera similar, la frecuencia natural y el modo natural r-ésimos satisfacen la ecuación (10.2.4), por lo que $\mathbf{k}\phi_r = \omega_r^2 \mathbf{m}\phi_r$. Al multiplicar antes por ϕ_n^T, resulta

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_r^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \tag{10.4.3}$$

La transpuesta de la matriz en el lado izquierdo de la ecuación (10.4.2) será igual a la transpuesta de la matriz en el lado derecho de dicha ecuación, por lo tanto

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r \tag{10.4.4}$$

donde se ha utilizado la propiedad de simetría de las matrices de masa y rigidez. Al restar la ecuación (10.4.3) de la ecuación (10.4.4), se obtiene

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

Entonces la ecuación (10.4.1b) es verdadera cuando $\omega_n^2 \neq \omega_r^2$, que para los sistemas con frecuencias naturales positivas implica que $\omega_n \neq \omega_r$. Si se sustituye la ecuación (10.4.1b) en (10.4.3), resulta que la ecuación (10.4.1a) es verdadera cuando $\omega_n \neq \omega_r$. Lo anterior completa una demostración para las relaciones de ortogonalidad de la ecuación (10.4.1).

Se han establecido las relaciones de ortogonalidad entre modos con frecuencias distintas (es decir, $\omega_n \neq \omega_r$). Si la ecuación de frecuencia (10.2.4) tiene una raíz múltiple en j (es decir, el sistema tiene una frecuencia repetida j veces), siempre es posible encontrar j modos asociados con esta frecuencia que satisfagan la ecuación (10.4.1). Si estos j modos se incluyen con los modos correspondientes a las otras frecuencias, se obtiene un conjunto de N modos que satisfacen la ecuación (10.4.1) para $n \neq r$.

La ortogonalidad de los modos naturales implica que las siguientes matrices cuadradas son diagonales:

$$\mathbf{K} \equiv \Phi^T \mathbf{k} \Phi \qquad \mathbf{M} \equiv \Phi^T \mathbf{m} \Phi \tag{10.4.5}$$

donde los elementos de la diagonal son

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n \qquad M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \tag{10.4.6}$$

Como $\mathbf{m}$ y $\mathbf{k}$ son matrices positivas definidas, los elementos diagonales de $\mathbf{K}$ y $\mathbf{M}$ son positivos y se relacionan mediante

$$K_n = \omega_n^2 M_n \tag{10.4.7}$$

Lo anterior puede demostrarse si K_n y M_n se definen de la manera siguiente: al sustituir la ecuación (10.2.4) en (10.4.6a), resulta

$$K_n = \phi_n^T(\omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n) = \omega_n^2(\phi_n^T \mathbf{m}\phi_n) = \omega_n^2 M_n$$

10.5 INTERPRETACIÓN DE LA ORTOGONALIDAD MODAL

En esta sección se desarrollan interpretaciones motivadas físicamente de las propiedades de ortogonalidad de los modos naturales. Una consecuencia de la ortogonalidad modal es que el trabajo realizado por las fuerzas inerciales del n-ésimo modo al pasar a través de los desplazamientos del r-ésimo modo es igual a cero. Para demostrar este resultado considere una estructura vibrando en el n-ésimo modo con los desplazamientos

$$\mathbf{u}_n(t) = q_n(t)\phi_n \tag{10.5.1}$$

Las aceleraciones correspondientes son $\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\phi_n$ y las fuerzas inerciales asociadas son

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m}\phi_n\ddot{q}_n(t) \tag{10.5.2}$$

Enseguida, considere los desplazamientos de la estructura en su r-ésimo modo natural:

$$\mathbf{u}_r(t) = q_r(t)\phi_r \tag{10.5.3}$$

El trabajo realizado por las fuerzas inerciales de la ecuación (10.5.2) al pasar por los desplazamientos de la ecuación (10.5.3) es

$$(\mathbf{f}_I)_n^T\mathbf{u}_r = -\left(\phi_n^T\mathbf{m}\phi_r\right)\ddot{q}_n(t)q_r(t) \tag{10.5.4}$$

que es igual a cero, debido a la relación de ortogonalidad modal de la ecuación (10.4.1b). Lo anterior completa la demostración.

Otra implicación de las propiedades de ortogonalidad modal es que el trabajo realizado por las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con los desplazamientos en el n-ésimo modo, al pasar por los desplazamientos del r-ésimo modo, es igual a cero. Estas fuerzas son

$$(\mathbf{f}_S)_n = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\phi_n q_n(t)$$

y el trabajo que realizan al pasar por los desplazamientos de la ecuación (10.5.3) es

$$(\mathbf{f}_S)_n^T\mathbf{u}_r = \left(\phi_n^T\mathbf{k}\phi_r\right)q_n(t)q_r(t)$$

que es igual a cero, debido a la relación de ortogonalidad modal de la ecuación (10.4.1a). Lo anterior completa la demostración.

10.6 NORMALIZACIÓN DE LOS MODOS

Como se mencionó anteriormente, el problema de valor característico, ecuación (10.2.4), determina los modos naturales sólo en forma de valores relativos. Si el vector ϕ_n es un modo natural, cualquier vector proporcional a ϕ_n es en esencia el mismo modo natural, puesto que también satisface la ecuación (10.2.4). En ocasiones, se aplican factores de escala a los modos naturales para estandarizar sus elementos asociados con varios grados de libertad. Este proceso se llama *normalización*. A veces resulta conveniente normalizar cada modo de forma que su elemento más grande sea la unidad. Otras veces, puede ser ventajoso normalizar cada modo de forma que el elemento que corresponde a un grado de libertad particular, por ejemplo, el piso superior de un edificio de varios niveles, sea la unidad. En los análisis teóricos y los programas de computación es común normalizar los modos de manera que M_n tenga valores unitarios. En este caso

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n = 1 \qquad \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \tag{10.5.5}$$

donde **I** es la matriz identidad, una matriz diagonal con valores unitarios a lo largo de la diagonal principal. La ecuación (10.5.5) establece que los modos naturales no sólo sean ortogonales sino que además estén normalizados con respecto a **m**, en ese caso se denominan *conjunto ortonormal* de masa. Cuando los modos se normalizan de esta manera, las ecuaciones (10.4.6a) y (10.4.5a) se convierten en

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 M_n = \omega_n^2 \qquad \mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Omega^2 \tag{10.5.6}$$

Ejemplo 10.1

(a) Determine las frecuencias y modos de vibración naturales del sistema de la figura E10.1a utilizando el primer grupo de grados de libertad mostrado.
(b) Repita el inciso (a) utilizando el segundo grupo de grados de libertad de la figura E10.1b.
(c) Demuestre que las frecuencias y modos naturales determinados para los dos grupos de grados de libertad son iguales.

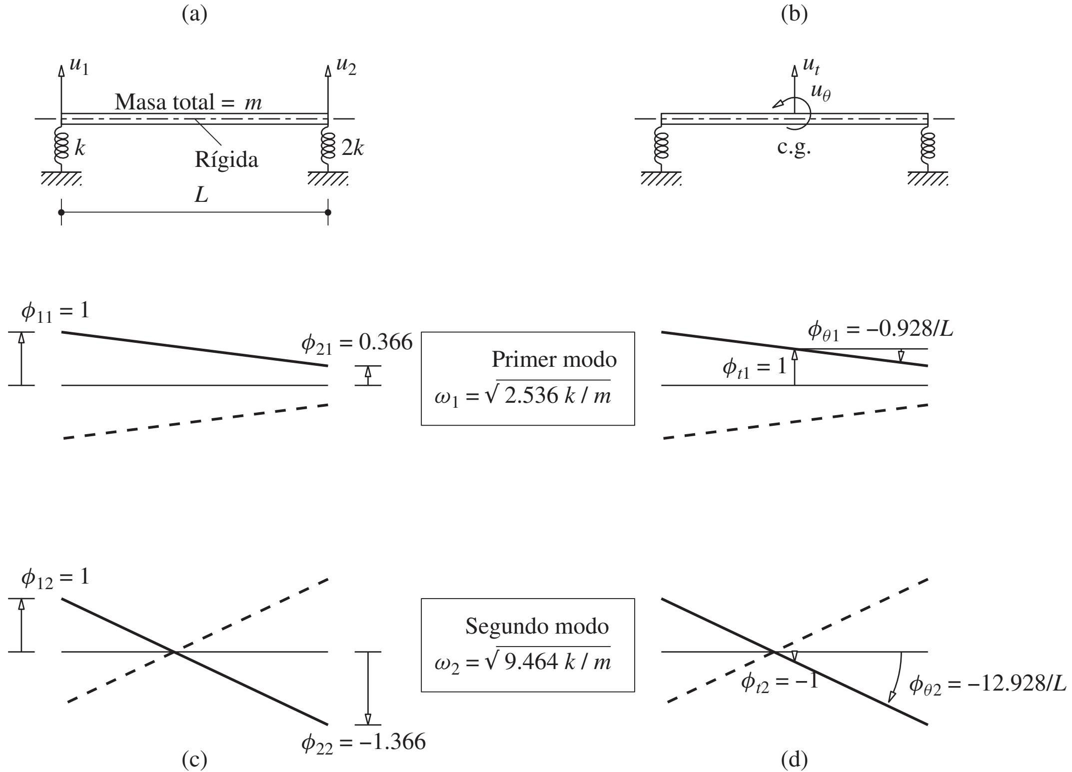


Figura E10.1

Solución (a) Las matrices de masa y rigidez del sistema con el primer grupo de grados de libertad se determinaron en el ejemplo 9.2:

$$\mathbf{m} = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m} = \begin{bmatrix} k - m\omega_n^2/3 & -m\omega_n^2/6 \\ -m\omega_n^2/6 & 2k - m\omega_n^2/3 \end{bmatrix} \tag{a}$$

se sustituye en la ecuación (10.2.6) para obtener la ecuación de frecuencia:

$$m^2\omega_n^4 - 12km\omega_n^2 + 24k^2 = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática en ω_n^2 que tiene las soluciones

$$\omega_1^2 = \left(6 - 2\sqrt{3}\right)\frac{k}{m} = 2.536\frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \left(6 + 2\sqrt{3}\right)\frac{k}{m} = 9.464\frac{k}{m} \tag{b}$$

Si se obtiene la raíz cuadrada de la ecuación (b), resultan las frecuencias naturales ω_1 y ω_2.

Los modos naturales se determinan al sustituir $\omega_n^2 = \omega_1^2$ en la ecuación (a), con lo que la ecuación (10.2.5) da

$$k\begin{bmatrix} 0.155 & -0.423 \\ -0.423 & 1.155 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Ahora se selecciona algún valor para una incógnita, por ejemplo $\phi_{11} = 1$. Entonces, la primera o segunda de las dos ecuaciones da $\phi_{21} = 0.366$. Al sustituir $\omega_n^2 = \omega_2^2$ en la ecuación (10.2.5) se obtiene

$$k\begin{bmatrix} -2.155 & -1.577 \\ -1.577 & -1.155 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

Si se selecciona $\phi_{12} = 1$, cualquiera de estas ecuaciones da $\phi_{22} = -1.366$. En resumen, los dos modos representados en la figura E10.1c son

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.366 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.366 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

(b) Las matrices de masa y rigidez del sistema descrito por el segundo conjunto de grados de libertad se desarrollaron en el ejemplo 9.3:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & kL/2 \\ kL/2 & 3kL^2/4 \end{bmatrix} \tag{f}$$

Entonces

$$\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3k - m\omega_n^2 & kL/2 \\ kL/2 & (9k - m\omega_n^2)L^2/12 \end{bmatrix} \tag{g}$$

se sustituye en la ecuación (10.2.6) para obtener

$$m^2\omega_n^4 - 12km\omega_n^2 + 24k^2 = 0$$

Esta ecuación de frecuencia es igual a la obtenida en el inciso (a); obviamente, da las ω_1 y ω_2 de la ecuación (b).

Para determinar el n-ésimo modo se retoma cualquiera de las dos expresiones de la ecuación (10.2.5) con $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]$ dada por la ecuación (g). La primera ecuación da

$$\left(3k - m\omega_n^2\right)\phi_{tn} + \frac{kL}{2}\phi_{\theta n} = 0 \quad \text{o} \quad \phi_{\theta n} = -\frac{3k - m\omega_n^2}{kL/2}\phi_{tn} \tag{h}$$

Al sustituir para $\omega_1^2 = 2.536k/m$ y $\omega_2^2 = 9.464k/m$ en la ecuación (h) se obtiene

$$\frac{L}{2}\phi_{\theta 1} = -0.464\phi_{t1} \qquad \frac{L}{2}\phi_{\theta 2} = 6.464\phi_{t2}$$

Si $\phi_{t1} = 1$, entonces $\phi_{\theta 1} = -0.928/L$, y si $\phi_{t2} = -1$, entonces $\phi_{\theta 2} = -12.928/L$. En resumen, los dos modos graficados en la figura E10.1d son

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.928/L \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ -12.928/L \end{Bmatrix} \tag{i}$$

(c) Se obtuvieron las mismas frecuencias naturales utilizando los dos grupos de grados de libertad. Las formas de los modos están dadas por las ecuaciones (e) e (i) para los dos grupos de grados de libertad. Estas dos series de resultados se representan en las figuras E10.1c y d, y es posible demostrar que son equivalentes sobre una base gráfica. De manera alternativa, la equivalencia puede demostrarse usando la transformación de coordenadas de un grupo de grados de libertad al otro. Los desplazamientos $\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \rangle^T$ están relacionados con el segundo grupo de grados de libertad, $\bar{\mathbf{u}} = \langle u_t \quad u_\theta \rangle^T$ mediante

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L/2 \\ 1 & L/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{u}} \tag{j}$$

Los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}$ en los dos primeros modos están dados por la ecuación (i). Al sustituir el primer modo en la ecuación (j) se llega a $\mathbf{u} = \langle 1.464 \quad 0.536 \rangle^T$. La normalización del vector genera $\mathbf{u} = \langle 1 \quad 0.366 \rangle^T$, que es idéntico al ϕ_1 de la ecuación (e). De manera similar, si se sustituye el segundo modo de la ecuación (i) en la ecuación (j), resulta $\mathbf{u} = \langle 1 \quad -1.366 \rangle$, que es idéntico al ϕ_2 de la ecuación (e).

Ejemplo 10.2

Determine las frecuencias y modos de vibración naturales del sistema mostrado en la figura E10.2a y definido en el ejemplo 9.5. Demuestre que los modos satisfacen las propiedades de ortogonalidad.

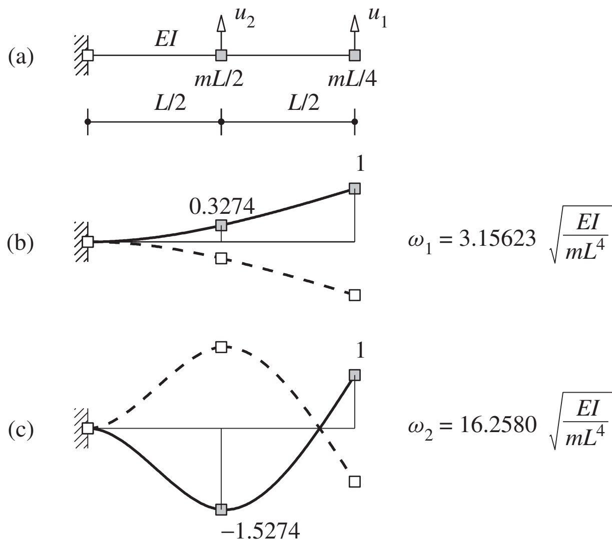


Figura E10.2

Solución Las matrices de rigidez y masa se determinaron en el ejemplo 9.5, con referencia a los grados de libertad traslacionales u_1 y u_2:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} mL/4 & \\ & mL/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{bmatrix} \tag{a}$$

donde

$$\lambda = \frac{7mL^4}{192EI}\omega^2 \tag{b}$$

Al sustituir la ecuación (a) en (10.2.6) se obtiene la ecuación de frecuencia

$$2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$

que tiene dos soluciones: $\lambda_1 = 0.36319$ y $\lambda_2 = 9.6368$. Las frecuencias naturales que corresponden a los dos valores de λ se obtienen de la ecuación (b):†

$$\omega_1 = 3.15623\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \qquad \omega_2 = 16.2580\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \tag{c}$$

Los modos naturales se determinan a partir de la ecuación (10.2.5) siguiendo el procedimiento indicado en el ejemplo 10.1 para obtener

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.3274 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

Estos modos naturales están representados en las figuras E10.2b y c.

Con los modos conocidos se calcula el lado izquierdo de la ecuación (10.4.1):

$$\phi_1^T\mathbf{m}\phi_2 = \frac{mL}{4}\langle 1 \quad 0.3274\rangle\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\phi_1^T\mathbf{k}\phi_2 = \frac{48EI}{7L^3}\langle 1 \quad 0.3274\rangle\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix} = 0$$

Con esto se verifica que los modos naturales calculados para el sistema son ortogonales.

Ejemplo 10.3

Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema mostrado en la figura E10.3a y definido en el ejemplo 9.6. Normalice los modos de manera que tengan una deflexión vertical unitaria en el extremo libre.

Solución Las matrices de rigidez y masa se determinaron en el ejemplo 9.6 con referencia a los grados de libertad u_1 y u_2:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

† Se incluyen seis dígitos significativos a fin de comparar con el modelo continuo de una viga en el capítulo 16.

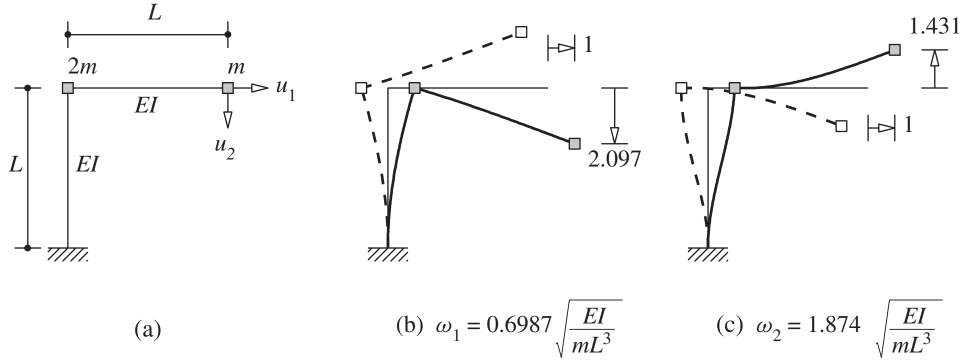


Figura E10.3

La ecuación de frecuencia es la ecuación (10.2.6), que después de sustituir para **m** y **k**, evaluar el determinante y definir

$$\lambda = \frac{7mL^3}{6EI}\omega^2 \tag{a}$$

puede escribirse como

$$3\lambda^2 - 14\lambda + 7 = 0$$

Las dos raíces son $\lambda_1 = 0.5695$ y $\lambda_2 = 4.0972$. Las frecuencias naturales correspondientes a los dos valores de λ se obtienen de la ecuación (a):

$$\omega_1 = 0.6987\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad \omega_2 = 1.874\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{b}$$

Los modos naturales se determinan a partir de la ecuación (10.2.5), siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 10.1, para obtener

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Estos modos se representan en las figuras E10.3b y c.

Al calcular los modos naturales el valor de la forma modal para el primer grado de libertad se fijó de manera arbitraria como la unidad. El modo resultante se normalizó a un valor unitario en el grado de libertad u_2 dividiendo el ϕ_1 de la ecuación (c) entre 2.097. De manera similar, el segundo modo se normalizó dividiendo el ϕ_2 de la ecuación (c) entre -1.431. Así, los modos normalizados son

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.4769 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.6988 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

Ejemplo 10.4

Determine las frecuencias y modos naturales del sistema mostrado en la figura E10.4a y definido en el ejemplo E9.1, un marco de dos niveles idealizado como un edificio de cortante. Normalice los modos de manera que $M_n = 1$.

Solución Las matrices de masa y rigidez del sistema, determinadas en el ejemplo 9.1, son

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{a}$$

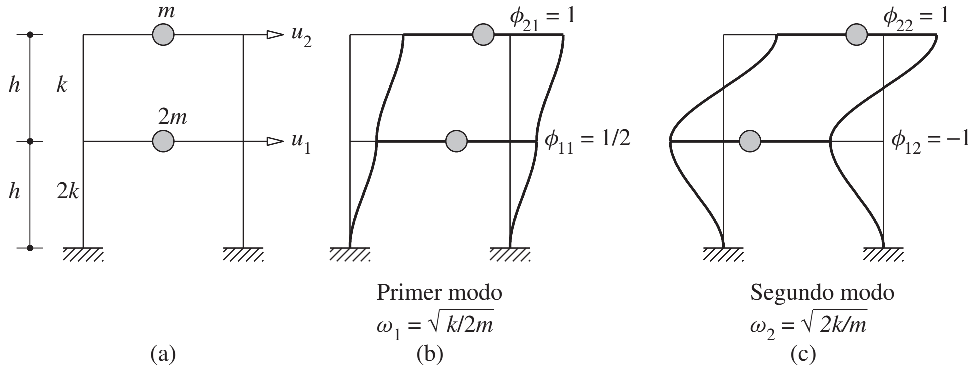


Figura E10.4

donde $k = 24EI_c/h^3$. La ecuación de frecuencia es la ecuación (10.2.6), que después de sustituir para **m** y **k** y evaluar el determinante, puede escribirse como

$$(2m^2)\omega^4 + (-5km)\omega^2 + 2k^2 = 0 \tag{b}$$

Las dos raíces son $\omega_1^2 = k/2m$ y $\omega_2^2 = 2k/m$, y las dos frecuencias naturales son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{c}$$

Si se sustituye por k resulta

$$\omega_1 = 3.464\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}} \qquad \omega_2 = 6.928\sqrt{\frac{EI_c}{mh^3}} \tag{d}$$

Los modos naturales se determinan a partir de la ecuación (10.2.5), siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 10.1, para obtener

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

Estos modos naturales se muestran en las figuras E10.4b y c.

Para normalizar el primer modo se calcula M_1 usando la ecuación (10.4.6), con el ϕ_1 dado por la ecuación (e):

$$M_1 = \phi_1^T \mathbf{m} \phi_1 = m \left\langle \tfrac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{3}{2}m$$

Para hacer que $M_1 = 1$, se divide el ϕ_1 de la ecuación (e) entre $\sqrt{3m/2}$ a fin de obtener el modo normalizado,

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Para esta ϕ_1 puede verificarse que $M_1 = 1$. El segundo modo se puede normalizar de manera similar.

Ejemplo 10.5

Determine las frecuencias y los modos naturales del sistema mostrado en la figura E10.5a y definido con anterioridad en el ejemplo 9.9. La altura de piso $h = 10$ pies.

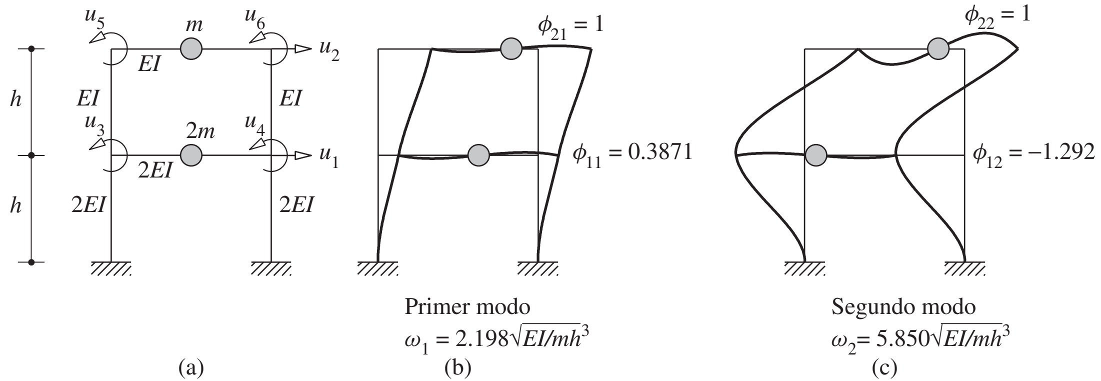


Figura E10.5

Solución Con referencia a los desplazamientos laterales u_1 y u_2 de los dos niveles como los dos grados de libertad, las matrices condensadas de masa y rigidez se determinaron en el ejemplo 9.9:

$$\mathbf{m}_{tt} = m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix} \tag{a}$$

La ecuación de frecuencia es

$$\det(\hat{\mathbf{k}}_{tt} - \omega^2 \mathbf{m}_{tt}) = 0 \tag{b}$$

Si se sustituye para $\mathbf{m}_{tt}$ y $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$, se evalúa el determinante y se obtienen las dos raíces como en el ejemplo 10.4, resulta

$$\omega_1 = 2.198\sqrt{\frac{EI}{mh^3}} \qquad \omega_2 = 5.850\sqrt{\frac{EI}{mh^3}} \tag{c}$$

Es interesante comparar estas frecuencias para un marco con vigas flexibles con las de un marco con vigas rígidas a la flexión, que se determinaron en el ejemplo 10.4. Es evidente que la flexibilidad de la viga tiene el efecto de reducir las frecuencias, de acuerdo con la intuición.

Los modos naturales se determinan resolviendo

$$(\hat{\mathbf{k}}_{tt} - \omega_n^2 \mathbf{m}_{tt})\phi_n = \mathbf{0} \tag{d}$$

con ω_1 y ω_2 sustituidas sucesivamente a partir de la ecuación (c) para obtener

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.292 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

Estos vectores definen los desplazamientos laterales de cada nivel. Se muestran en la figura E10.5b y c junto con la rotación de las juntas. Las rotaciones de las juntas asociadas con el primer modo se determinan al sustituir $\mathbf{u}_t = \phi_1$ a partir de la ecuación (e) en la ecuación (d) del ejemplo 9.9:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -0.4426 & -0.2459 \\ -0.4426 & -0.2459 \\ 0.9836 & -0.7869 \\ 0.9836 & -0.7869 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{Bmatrix} -0.4172 \\ -0.4172 \\ -0.4061 \\ -0.4061 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

De manera similar, las rotaciones de las juntas asociadas con el segundo modo se obtienen sustituyendo $\mathbf{u}_t = \phi_2$ a partir de la ecuación (e) en la ecuación (d) del ejemplo 9.9:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} 0.3258 \\ 0.3258 \\ -2.0573 \\ -2.0573 \end{Bmatrix} \tag{g}$$

Ejemplo 10.6

En la figura 9.5.1 se muestra la vista en planta de un edificio de un solo nivel. La estructura consiste en un techo, idealizado como un diafragma rígido, apoyado en tres marcos, *A*, *B* y *C*. El peso del techo se distribuye de manera uniforme y tiene una magnitud de 100 lb/pie^2. Las rigideces laterales de los marcos son $k_y = 75$ kips/pie para el marco *A*, y $k_x = 40$ kips/pie para los marcos *B* y *C*. Las dimensiones en planta son $b = 30$ pies y $d = 20$ pies, la excentricidad es $e = 1.5$ pies, y la altura del edificio es de 12 pies. Determine los periodos y modos de vibración naturales de la estructura.

Solución

$$\text{Peso de la losa del techo: } w = 30 \times 20 \times 100 \text{ lb} = 60 \text{ kips}$$

$$\text{Masa: } m = w/g = 1.863 \text{ kips-s}^2/\text{pie}$$

$$\text{Momento de inercia: } I_O = \frac{m(b^2 + d^2)}{12} = 201.863 \text{ kips-pie-s}^2$$

El movimiento lateral del diafragma del techo en la dirección x está regido por la ecuación (9.5.18):

$$m\ddot{u}_x + 2k_x u_x = 0 \tag{a}$$

Así, la frecuencia natural de la vibración lateral x es

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k_x}{m}} = \sqrt{\frac{2(40)}{1.863}} = 6.553 \text{ rad/s}$$

El modo natural correspondiente se muestra en la figura E10.6c.

El movimiento acoplado lateral (u_y)-torsional (u_θ) del diafragma de techo se rige por la ecuación (9.5.19). Al sustituir m e I_O se obtiene

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1.863 & \\ & 201.863 \end{bmatrix}$$

A partir de las ecuaciones (9.5.16) y (9.5.19) la matriz de rigidez tiene cuatro elementos:

$$k_{yy} = k_y = 75 \text{ kips/pie}$$

$$k_{y\theta} = k_{\theta y} = ek_y = 1.5 \times 75 = 112.5 \text{ kips}$$

$$k_{\theta\theta} = e^2 k_y + \frac{d^2}{2} k_x = 8168.75 \text{ kips-pie}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 75.00 & 112.50 \\ 112.50 & 8168.75 \end{bmatrix}$$

Con **k** y **m** conocidas, el problema de valor característico para este sistema de dos grados de libertad se resuelve mediante los procedimientos estándar y se obtiene:

$$\text{Frecuencias naturales (rad/s): } \omega_1 = 5.878;\ \omega_2 = 6.794$$

$$\text{Modos naturales: } \phi_1 = \begin{Bmatrix} -0.5228 \\ 0.0493 \end{Bmatrix};\ \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.5131 \\ -0.0502 \end{Bmatrix}$$

Estas formas de los modos se grafican en las figuras E10.6a y b. El movimiento de la estructura en cada modo consiste en la traslación del diafragma rígido acoplado con la torsión alrededor del eje vertical a través del centro de masa.

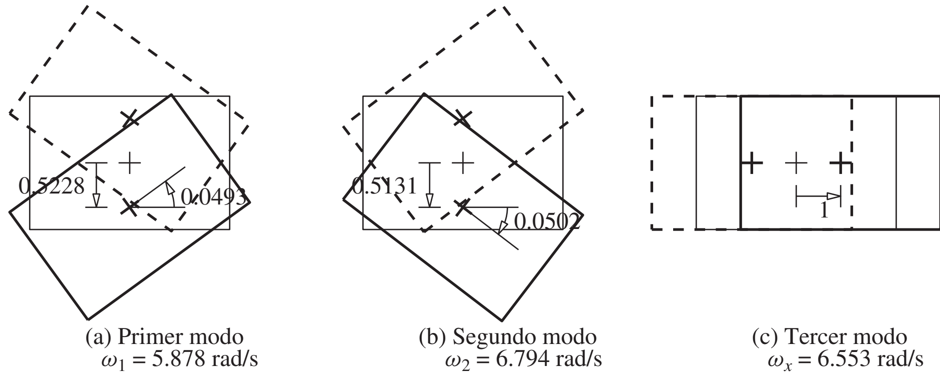


Figura E10.6

Ejemplo 10.7

Considere un caso especial del sistema del ejemplo 10.6 en el que el marco A está situado en el centro de masa (es decir, $e = 0$). Determine las frecuencias y modos naturales de este sistema.

Solución La ecuación (9.5.20) especificada para la vibración libre de este sistema proporciona tres ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{u}_x + 2k_x u_x = 0 \qquad m\ddot{u}_y + k_y u_y = 0 \qquad I_O \ddot{u}_\theta + \frac{d^2}{2} k_x u_\theta = 0 \tag{a}$$

La primera ecuación de movimiento indica que el movimiento traslacional en la dirección x se produciría en la frecuencia natural

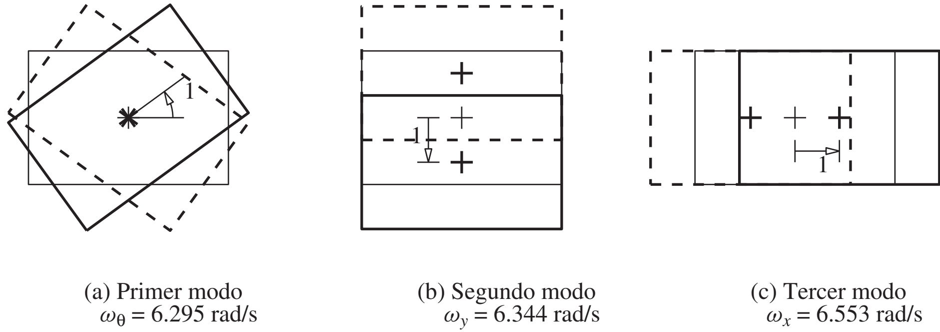
$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k_x}{m}} = \sqrt{\frac{2(40)}{1.863}} = 6.553 \text{ rad/s}$$

Este movimiento es independiente del movimiento lateral u_y o del movimiento torsional u_θ (figura E10.7c). La segunda ecuación de movimiento indica que el movimiento traslacional en la dirección y tendría lugar en la frecuencia natural

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} = \sqrt{\frac{75}{1.863}} = 6.344 \text{ rad/s}$$

Este movimiento es independiente del movimiento lateral u_x o del movimiento torsional u_θ (figura E10.7b). La tercera ecuación de movimiento indica que el movimiento torsional ocurriría en la frecuencia natural

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{d^2 k_x}{2I_O}} = \sqrt{\frac{(20)^2 40}{2(201.863)}} = 6.295 \text{ rad/s}$$



(a) Primer modo $\omega_\theta = 6.295$ rad/s (b) Segundo modo $\omega_y = 6.344$ rad/s (c) Tercer modo $\omega_x = 6.553$ rad/s

Figura E10.7

El diafragma del techo giraría alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa sin ninguna traslación de este punto en las direcciones x o y (figura E10.7a).

Observe que las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 del sistema con planta asimétrica (ejemplo 10.6) son diferentes y más separadas que las frecuencias naturales ω_y y ω_θ del sistema con planta simétrica (ejemplo 10.7).

10.7 EXPANSIÓN MODAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Cualquier conjunto de N vectores independientes puede utilizarse como una base para representar cualquier otro vector de orden N. En las secciones siguientes, los modos naturales se utilizan como dicha base. Por lo tanto, una expansión modal de cualquier vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ tiene la forma

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r = \mathbf{\Phi q} \tag{10.7.1}$$

donde q_r son los multiplicadores escalares llamados *coordenadas modales* o *coordenadas normales* y $\mathbf{q} = \langle q_1 \quad q_2 \quad \ldots \quad q_n{}^T \rangle$. Cuando se conocen los ϕ_r, es posible evaluar el q_r para un $\mathbf{u}$ dado al multiplicar ambos lados de la ecuación (10.7.1) por $\phi_n^T \mathbf{m}$:

$$\phi_n^T \mathbf{mu} = \sum_{r=1}^{N} (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_r) q_r$$

Debido a la relación de ortogonalidad de la ecuación (10.4.1b), todos los términos de la sumatoria anterior desaparecen excepto el término $r = n$; por lo que

$$\phi_n^T \mathbf{mu} = (\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n) q_n$$

Los productos matriciales a ambos lados de esta ecuación son escalares. Por lo tanto,

$$q_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{mu}}{\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n} = \frac{\phi_n^T \mathbf{mu}}{M_n} \tag{10.7.2}$$

La expansión modal del vector de desplazamientos **u**, ecuación (10.7.1), se emplea en la sección 10.8 a fin de obtener soluciones para la respuesta a la vibración de los sistemas no amortiguados. También juega un papel central en el análisis de la respuesta a la vibración forzada y de la respuesta sísmica de los sistemas con VGDL (capítulos 12 y 13).

Ejemplo 10.8

En el marco de cortante de dos niveles del ejemplo 10.4 determine la expansión modal del vector de desplazamientos $\mathbf{u} = \langle 1 \quad 1 \rangle^T$.

Solución El desplazamiento **u** se sustituye en la ecuación (10.7.2) junto con $\phi_1 = \langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$ y $\phi_2 = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$, del ejemplo 10.4, para obtener

$$q_1 = \frac{\left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{2m}{3m/2} = \frac{4}{3}$$

$$q_2 = \frac{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\langle -1 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = -\frac{1}{3}$$

Al sustituir q_n en la ecuación (10.7.1) se obtiene la expansión modal deseada, la cual se muestra en la figura E10.8.

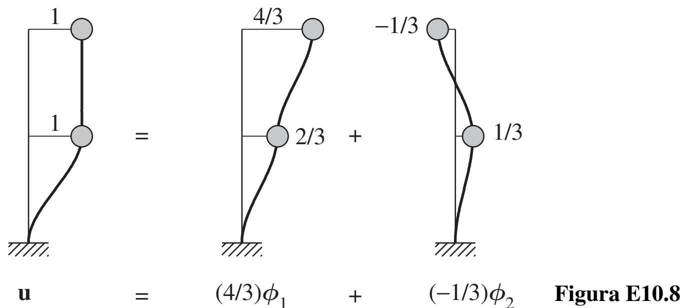


Figura E10.8

PARTE B: RESPUESTA DE VIBRACIÓN LIBRE

10.8 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE VIBRACIÓN LIBRE: SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

De regreso al problema planteado por las ecuaciones (10.1.1) y (10.1.2) se pretende encontrar su solución. Para el ejemplo del marco de la figura 10.1.1a tal solución se mostró en la figura 10.1.1d. La ecuación diferencial (10.1.1) que debía resolverse condujo al problema matricial de valor característico de la ecuación (10.2.4). Suponiendo que el problema de valor característico se resuelve para las frecuencias y modos naturales, la solución general de la ecuación (10.1.1) está dada por una superposición de las respuestas en los modos

individuales que se obtienen mediante la ecuación (10.2.3). Así

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t) \tag{10.8.1}$$

donde A_n y B_n son $2N$ constantes de integración. Para determinar estas constantes también se necesitará la ecuación para el vector de velocidad, que es

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \omega_n (-A_n \operatorname{sen} \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \tag{10.8.2}$$

Si se establece $t = 0$ en las ecuaciones (10.8.1) y (10.8.2), resulta

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n A_n \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \omega_n B_n \tag{10.8.3}$$

Con los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0)$ y las velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0)$ conocidos, cada uno de estos dos conjuntos de ecuaciones representa N ecuaciones algebraicas en las incógnitas A_n y B_n, respectivamente. No es necesaria la solución simultánea de estas ecuaciones, puesto que pueden interpretarse como una expansión modal de los vectores $\mathbf{u}(0)$ y $\dot{\mathbf{u}}(0)$. Después de la ecuación (10.7.1) puede escribirse

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(0) \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \dot{q}_n(0) \tag{10.8.4}$$

donde, en forma análoga a la ecuación (10.7.2), $q_n(0)$ y $\dot{q}_n(0)$ están dados por

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_n} \qquad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n} \tag{10.8.5}$$

Las ecuaciones (10.8.3) y (10.8.4) son equivalentes, lo que implica que $A_n = q_n = (0)$ y $B_n = \dot{q}_n(0)/\omega_n$. Si se sustituye esto en la ecuación (10.8.1), resulta

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \left[q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \right] \tag{10.8.6}$$

o, de manera alternativa,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(t) \tag{10.8.7}$$

donde

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{10.8.8}$$

es la variación en el tiempo de las coordenadas modales, que es análoga a la respuesta a la vibración libre de los sistemas 1GDL (ecuación 2.1.3). La ecuación (10.8.6) proporciona el desplazamiento $\mathbf{u}$ como una función del tiempo, debido al desplazamiento $\mathbf{u}(0)$ y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}(0)$ iniciales; el $\mathbf{u}(t)$ es independiente de la forma en que se normalizan los modos, aunque $q_n(t)$ no lo es. Suponiendo que las frecuencias ω_n y los modos ϕ_n naturales están disponibles, el lado derecho de la ecuación (10.8.6) se conoce con $q_n(0)$ y $\dot{q}_n(0)$ definidos por la ecuación (10.8.5).

Ejemplo 10.9

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del ejemplo 10.4, debida al desplazamiento inicial $\mathbf{u}(0) = \langle \tfrac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$.

Solución Los vectores de desplazamiento y velocidad iniciales son

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para el $\mathbf{u}(0)$ dado, los $q_n(0)$ se calculan siguiendo el procedimiento del ejemplo 10.8 y utilizando el ϕ_n de la ecuación (e) del ejemplo 10.4; los resultados son $q_1(0) = 1$ y $q_2(0) = 0$. Como la velocidad inicial $\dot{\mathbf{u}}(0)$ es cero, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Al insertar $q_n(0)$ y $\dot{q}_n(0)$ en la ecuación (10.8.8) se obtiene la solución para las coordenadas modales

$$q_1(t) = 1 \cos \omega_1 t \qquad q_2(t) = 0$$

Si se sustituye $q_n(t)$ y $f\phi_n$ en la ecuación (10.8.7), resulta

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t$$

donde $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ a partir del ejemplo 10.4. Estas soluciones para $q_1(t)$, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se graficaron en la figura 10.1.2c y d. Tenga en cuenta que $q_2(t) = 0$ implica que el segundo modo no tiene ninguna contribución a la respuesta, la cual se debe toda al primer modo. Esto es así porque el desplazamiento inicial es proporcional al primer modo y, por lo tanto, es ortogonal al segundo.

Ejemplo 10.10

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del ejemplo 10.4, debida al desplazamiento inicial $\mathbf{u}(0) = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$.

Solución Los cálculos se realizan como en el ejemplo 10.9, lo que conduce a $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 1$ y $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Al insertar esto en la ecuación (10.8.8), se obtienen las soluciones para las coordenadas modales:

$$q_1(t) = 0 \qquad q_2(t) = 1 \cos \omega_2 t$$

Si se sustituyen q_n(t) y ϕ_n en la ecuación (10.8.7), resulta

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

donde $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ a partir del ejemplo 10.4. Estas soluciones para $q_2(t)$, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se graficaron en las figuras 10.1.3c y d. Tenga en cuenta que $q_1(t) = 0$ implica que el primer modo no tiene ninguna contribución a la respuesta y que ésta se debe por completo al segundo modo. Esto es así porque el desplazamiento inicial es proporcional al segundo modo y, por lo tanto, es ortogonal al primero.

Ejemplo 10.11

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del ejemplo 10.4, debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \langle -\tfrac{1}{2} \quad 2 \rangle^T$.

Solución Siguiendo el ejemplo 10.8, se evalúan $q_n(0)$ y $\dot{q}_n(0)$: $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 1$ y $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Al sustituir esto en la ecuación (10.8.8) se obtiene la solución para las coordenadas modales

$$q_1(t) = 1 \cos \omega_1 t \qquad q_2(t) = 1 \cos \omega_2 t$$

Si se sustituyen $q_n(t)$ y ϕ_n en la ecuación (10.8.7), resulta

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t$$

Estas soluciones para $q_n(t)$ y $u_j(t)$ se graficaron en la figura 10.1.1c y d. Observe que ambos modos naturales contribuyen a la respuesta debida a estos desplazamientos iniciales.

10.9 SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO

Cuando se incluye el amortiguamiento, la respuesta del sistema a la vibración libre está regida por la ecuación (9.2.12) con $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{m\ddot{u}} + \mathbf{c\dot{u}} + \mathbf{ku} = \mathbf{0} \tag{10.9.1}$$

Se desea encontrar la solución $\mathbf{u}(t)$ de la ecuación (10.9.1) que satisfaga las condiciones iniciales

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) \qquad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0) \tag{10.9.2}$$

en $t = 0$. Los procedimientos para obtener la solución deseada varían en función del tipo de amortiguamiento: clásico o no clásico, estos términos se definen a continuación.

Si la matriz de amortiguamiento de un sistema lineal satisface la identidad

$$\mathbf{cm}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{km}^{-1}\mathbf{c} \tag{10.9.3}$$

todos los modos de vibración natural tienen un valor real y son idénticos a los del sistema no amortiguado asociado; se determinaron resolviendo el problema de valor característico real, ecuación (10.2.4). Se dice que tales sistemas poseen un *amortiguamiento clásico* porque tienen los modos naturales clásicos, definidos en la sección 10.2.

Para establecer una propiedad importante de los sistemas clásicamente amortiguados, el desplazamiento $\mathbf{u}$ se expresa en términos de los modos naturales del sistema no amortiguado asociado, por lo que la ecuación (10.7.1) se sustituye en la ecuación (10.9.1):

$$\mathbf{m\Phi\ddot{q}} + \mathbf{c\Phi\dot{q}} + \mathbf{k\Phi q} = \mathbf{0}$$

Si se multiplica previamente por $\mathbf{\Phi}^T$, resulta

$$\mathbf{M\ddot{q}} + \mathbf{C\dot{q}} + \mathbf{Kq} = \mathbf{0} \tag{10.9.4}$$

donde las matrices diagonales $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ se definieron en la ecuación (10.4.5) y

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{c\Phi} \tag{10.9.5}$$

Para los sistemas clásicamente amortiguados, la matriz cuadrada $\mathbf{C}$ es diagonal. Entonces, la ecuación (10.9.4) representa N ecuaciones diferenciales no acopladas en las coordenadas modales q_n, y a tales sistemas se les puede aplicar el análisis modal clásico. Este procedimiento para resolver la ecuación (10.9.1) se presenta en la sección 10.10.

Se dice que un sistema lineal posee un *amortiguamiento no clásico* si su matriz de amortiguamiento no satisface la ecuación (10.9.3). Para tales sistemas, los modos de vibración natural no tienen valores reales y la matriz cuadrada $\mathbf{C}$ de la ecuación (10.9.5) ya no es diagonal, por lo que no son susceptibles al análisis modal clásico. Las soluciones analíticas de la ecuación (10.9.1) para los sistemas que no están clásicamente amortiguados se presentan en el capítulo 14, y los métodos de solución numérica en el capítulo 16.

10.10 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE VIBRACIÓN LIBRE: SISTEMAS CLÁSICAMENTE AMORTIGUADOS

Para los sistemas clásicamente amortiguados cada una de las N ecuaciones diferenciales desacopladas de la ecuación (10.9.4) tiene la forma

$$M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_n q_n = 0 \tag{10.10.1}$$

donde M_n y K_n se definieron en la ecuación (10.4.6) y

$$C_n = \phi_n^T \mathbf{c}\phi_n \tag{10.10.2}$$

La ecuación (10.10.1) tiene la misma forma que la ecuación (2.2.1a) para un sistema de 1GDL con amortiguamiento. Así, la razón de amortiguamiento puede definirse para cada modo de una manera análoga a la ecuación (2.2.2) para un sistema de 1GDL:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} \tag{10.10.3}$$

Si se divide la ecuación (10.10.1) (t) entre M_n, resulta

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \tag{10.10.4}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (2.2.1b) que rige la vibración libre de un sistema de 1GDL con amortiguamiento, y cuya solución es la ecuación (2.2.4). Si se adapta este resultado, la solución para la ecuación (10.10.4) es

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\operatorname{sen}\omega_{nD}t\right] \tag{10.10.5}$$

donde la n-ésima frecuencia natural del sistema con amortiguamiento

$$\omega_{nD} = \omega_n\sqrt{1-\zeta_n^2} \tag{10.10.6}$$

y ω_n es la n-ésima frecuencia natural del sistema no amortiguado asociado. Entonces, la respuesta del sistema al desplazamiento se obtiene al sustituir la ecuación (10.10.5) por $q_n(t)$ en la ecuación (10.8.7):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N}\phi_n e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\operatorname{sen}\omega_{nD}t\right] \tag{10.10.7}$$

Ésta es la solución del problema de la vibración libre para los sistemas de VGDL clásicamente amortiguados. Se proporciona el desplazamiento $\mathbf{u}$ como una función del tiempo debido al desplazamiento $\mathbf{u}(0)$ y la velocidad $\dot{\mathbf{u}}(0)$ iniciales. Si se supone que las frecuencias ω_n y los modos ϕ_n naturales del sistema sin amortiguamiento están disponibles, junto con las razones de amortiguamiento modales ζ_n, el lado derecho de la ecuación (10.10.7) se conoce con $q_n(0)$ y $\dot{q}_n(0)$ definidos por la ecuación (10.8.5).

El amortiguamiento influye en las frecuencias y en los periodos de vibración naturales de un sistema de VGDL de acuerdo con la ecuación (10.10.6), que tiene la misma forma que la ecuación (2.2.5) para un sistema de 1GDL. Por lo tanto, el efecto del amortiguamiento en las frecuencias y en los periodos naturales de un sistema de VGDL es pequeño para las razones de amortiguamiento ζ_n inferiores al 20% (figura 2.2.3), un intervalo que incluye a la mayoría de las estructuras prácticas.

En un sistema de VGDL clásicamente amortiguado, sometido a una vibración libre en su modo natural n, la amplitud de desplazamiento en cualquier grado de libertad disminuye

con cada ciclo de vibración. La tasa de decaimiento depende de la fracción de amortiguamiento ζ_n en ese modo, de una manera similar a los sistemas de 1GDL. Esta similitud es evidente al comparar la ecuación (10.10.5) con la ecuación (2.2.4). Así, la relación de dos picos de respuesta separados por j ciclos de vibración se asocia con la fracción de amortiguamiento mediante la ecuación (2.2.12) con el cambio apropiado en la notación.

En consecuencia, la fracción de amortiguamiento en un modo natural de un sistema de VGDL puede determinarse, en principio, a partir de una prueba de vibración libre siguiendo el procedimiento que se presenta en la sección 2.2.4 para los sistemas de 1GDL. En dicha prueba, la estructura se deforma jalando de ella mediante un cable que luego se libera de manera repentina, causando así que la estructura se someta a una vibración libre alrededor de su posición de equilibrio estático. Una dificultad en estos ensayos es la aplicación y la liberación de la fuerza de manera que la estructura vibre sólo en uno de sus modos naturales. Por esta razón, este procedimiento de prueba no es un medio eficaz para determinar el amortiguamiento excepto, quizá, para el modo fundamental. Después de que las contribuciones a la respuesta de los modos más altos se han amortiguado, la vibración libre está en el modo fundamental, y la fracción de amortiguamiento para este modo puede calcularse a partir de la tasa de decaimiento de las amplitudes de vibración.

Ejemplo 10.12

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles de la figura E10.12.1a, con $c = \sqrt{km/200}$, debida a dos grupos de desplazamientos iniciales (1) $\mathbf{u}(0) = \langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$ y (2) $\mathbf{u}(0) = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$.

Solución

Parte 1 Los $q_n(0)$ correspondientes a este $\mathbf{u}(0)$ se determinaron en el ejemplo 10.9: $q_1(0) = 1$ y $q_2(0) = 0$; $\dot{q}_n(0) = 0$. Las ecuaciones diferenciales que rigen a $q_n(t)$ están dadas por

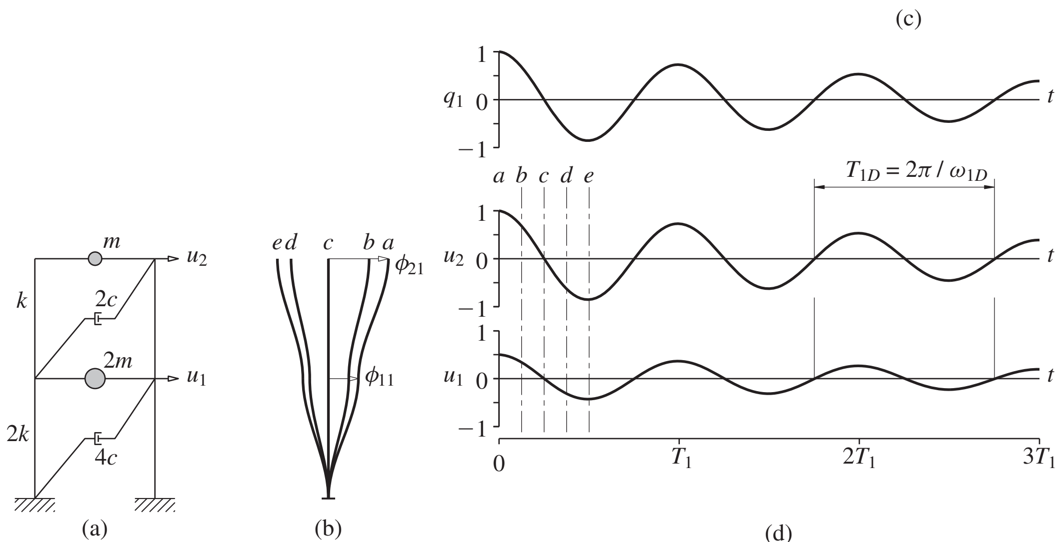


Figura E10.12.1 Vibración libre de un sistema clásicamente amortiguado en el primer modo de vibración natural: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo a, b, c, d y e; (c) coordenada modal $q_1(t)$; (d) historia del desplazamiento.

la ecuación (10.10.4). Como $q_2(0)$ y $\dot{q}_2(0)$ son ambos iguales a cero, $q_2(t) = 0$ para cualquier instante de tiempo. La respuesta está dada por el término $n = 1$ en la ecuación (10.10.7). Si se sustituyen los valores antes mencionados para $q_1(0)$, $\dot{q}_1(0)$ y $\phi_1 = \langle \frac{1}{2} \quad 1 \rangle^T$, resulta

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left(\cos \omega_{1D} t + \frac{\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \operatorname{sen} \omega_{1D} t \right)$$

donde $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ a partir del ejemplo 10.4 y $\zeta_1 = 0.05$ a partir de la ecuación (10.10.3).

Parte 2 Los $q_n(0)$ correspondientes a este $\mathbf{u}(0)$ se determinaron en el ejemplo 10.10: $q_1(0) = 0$ y $q_2(0) = 1$; $\dot{q}_n(0) = 0$. Las ecuaciones diferenciales que rigen a $q_n(t)$ están dadas por la ecuación (10.10.4). Como $q_1(0)$ y $\dot{q}_1(0)$ son ambos iguales a cero, $q_1(t) = 0$ en todo momento. La respuesta está dada por el término $n = 2$ de la ecuación (10.10.7). Si se sustituyen $q_2(0)$, $\dot{q}_2(0)$ y $\phi_2 = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$, resulta

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \left(\cos \omega_{2D} t + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \operatorname{sen} \omega_{2D} t \right)$$

donde $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ a partir del ejemplo 10.4 y $\zeta_2 = 0.10$ a partir de la ecuación (10.10.3).

Observaciones Los resultados para la vibración libre debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \phi_1$ se presentan en la figura E10.12.1, y a $\mathbf{u}(0) = \phi_2$ en la figura E10.12.2, respectivamente. Las soluciones para $q_n(t)$ se muestran en el inciso (c) de estas figuras, los desplazamientos en planta $u_j(t)$ en el inciso (d), y las formas modificadas en los instantes de tiempo seleccionados se grafican en el inciso (b) de las figuras.

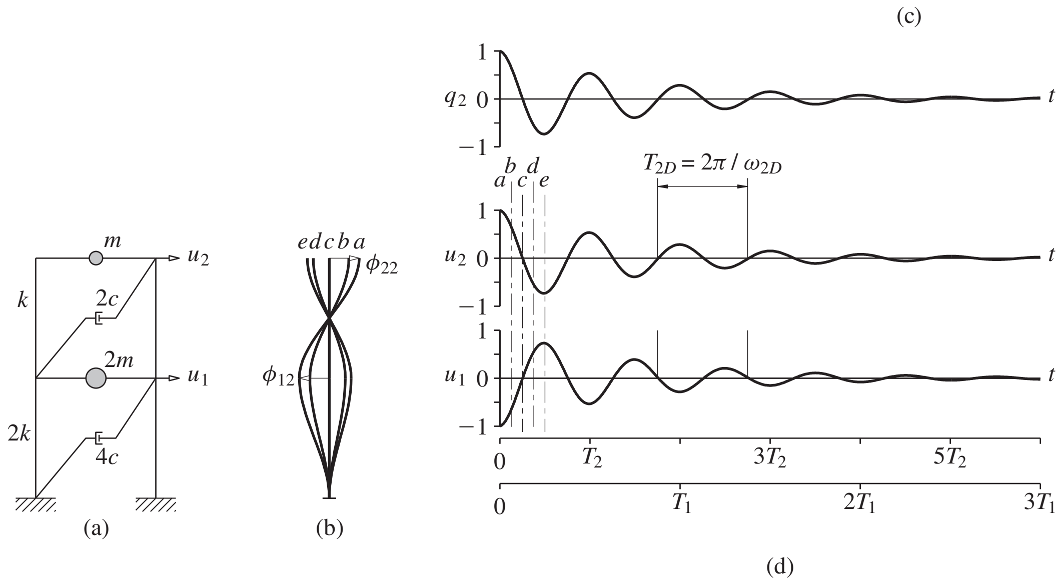


Figura E10.12.2 Vibración libre de un sistema clásicamente amortiguado en el segundo modo de vibración natural: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo *a*, *b*, *c*, *d* y *e*; (c) coordenada modal $q_2(t)$, (*d*) historia del desplazamiento.

Estos resultados permiten las siguientes observaciones: primera, si el desplazamiento inicial es proporcional al n-ésimo modo, la respuesta se debe por completo a ese modo; el otro modo no tiene ninguna contribución. Segunda, la forma modificada inicial se mantiene durante la vibración libre, como en el caso de los sistemas no amortiguados (figuras 10.1.2 y 10.1.3). Tercera, el sistema oscila en la frecuencia ω_{nD} con todos los niveles (o grados de libertad) vibrando en la misma fase, pasando a través de sus posiciones máxima, mínima o de equilibrio, en el mismo instante de tiempo. Así, el sistema posee modos naturales de vibración clásicos, definidos primero en la sección 10.2, como se esperaba de los sistemas clásicamente amortiguados. Aunque basadas en los resultados para un sistema con dos grados de libertad, estas observaciones son válidas para los sistemas clásicamente amortiguados con cualquier número de grados de libertad.

Ejemplo 10.13

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del ejemplo 10.12, debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \langle -\frac{1}{2} \quad 2 \rangle^T$.

Solución Los $q_n(0)$ correspondientes a este $\mathbf{u}(0)$ se determinaron en el ejemplo 10.11: $q_n(0) = 1$ y $q_n(0) = 1$; $\dot{q}_n(0) = 0$. Si se sustituyen en la ecuación (10.10.5), se obtiene la solución para las coordenadas modales:

$$q_1(t) = e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left[\cos \omega_{1D} t + \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \operatorname{sen} \omega_{1D} t \right] \tag{a}$$

$$q_2(t) = e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \left[\cos \omega_{2D} t + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \operatorname{sen} \omega_{2D} t \right] \tag{b}$$

donde, según lo determinado con anterioridad, $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ y $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$; las ω_{nD} están dadas por la ecuación (10.10.6) y $\zeta_1 = 0.05$ y $\zeta_2 = 0.10$ a partir de la ecuación (10.10.3).

Al sustituir $q_n(t)$ y ϕ_n en la ecuación (10.8.7) se llega a

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left[\cos \omega_{1D} t + \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \operatorname{sen} \omega_{1D} t \right] + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-\zeta_2 \omega_2 t} \left[\cos \omega_{2D} t + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \operatorname{sen} \omega_{2D} t \right] \tag{c}$$

PARTE C: CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DE VIBRACIÓN

10.11 MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE VALOR CARACTERÍSTICO

Para encontrar las propiedades de vibración (frecuencias y modos naturales) de una estructura se requiere resolver el problema matricial de valor característico de la ecuación (10.2.4), que se repite aquí por conveniencia:

$$\mathbf{k}\phi = \lambda \mathbf{m}\phi \tag{10.11.1}$$

Como se mencionó anteriormente, los valores característicos $\lambda_n \equiv \omega_n^2$ son las raíces de la ecuación característica (10.2.6):

$$p(\lambda) = \det[\mathbf{k} - \lambda\mathbf{m}] = 0 \tag{10.11.2}$$

donde $p(\lambda)$ es un polinomio de orden N, el número de grados de libertad del sistema. Éste no es un método práctico, sobre todo para los sistemas de gran tamaño (es decir, con un gran número de grados de libertad), porque la evaluación de los N coeficientes del polinomio requiere mucho esfuerzo de cálculo y las raíces de $p(\lambda)$ son sensibles a los errores numéricos de redondeo en los coeficientes.

Encontrar métodos seguros y eficaces para resolver el problema de valor característico ha sido objeto de mucha investigación, en especial desde el desarrollo de la computadora digital. La mayoría de los métodos disponibles pueden clasificarse en tres grandes categorías, dependiendo de la propiedad básica utilizada como la base del algoritmo de solución: (1) los métodos de iteración vectorial trabajan directamente con la propiedad de la ecuación (10.11.1). (2) Los métodos de transformación utilizan la propiedad de ortogonalidad de los modos, ecuaciones (10.4.1). (3) Las técnicas de iteración polinomial trabajan sobre el hecho de que $p(\lambda_n) = 0$. Se ha desarrollado cierta cantidad de algoritmos de solución en cada una de las tres categorías anteriores. También se han desarrollado combinaciones de dos o más métodos que pertenecen a la misma o a diferentes categorías para hacer frente a los grandes sistemas. Dos ejemplos de tales procedimientos combinados son el método de búsqueda del determinante y el método de iteración del subespacio.

Todos los métodos de solución para los problemas de valor propio deben tener una naturaleza iterativa, ya que, básicamente, la solución del problema de valor característico es equivalente a encontrar las raíces del polinomio $p(\lambda)$. No existen fórmulas explícitas para encontrar estas raíces cuando N es mayor que 4, por lo que se requiere una solución iterativa. Para encontrar un par característico (λ_n, ϕ_n), sólo uno de ellos se calcula por iteración, y el otro puede conseguirse sin ninguna iteración adicional. Por ejemplo, si λ_n se obtiene por iteración, entonces ϕ_n puede evaluarse resolviendo las ecuaciones algebraicas $(\mathbf{k} - \lambda_n\mathbf{m})\phi_n = 0$. Por otro lado, si ϕ_n se determina por iteración, λ_n puede encontrarse al evaluar el cociente de Rayleigh (sección 10.12). ¿Es más económico resolver primero para λ_n y después calcular ϕ_n (o viceversa), o es mejor resolver ambos a la vez? La respuesta a esta pregunta y, por lo tanto, la elección entre las tres categorías de procedimientos mencionados con anterioridad depende de las propiedades de las matrices de masa y rigidez (el tamaño N, el ancho de banda de $\mathbf{k}$ y si $\mathbf{m}$ es diagonal o en banda) y del número de pares característicos requerido.

En la ingeniería estructural suelen analizarse sistemas con matriz $\mathbf{k}$ en banda y $\mathbf{m}$ diagonal o en banda, sometidos a excitaciones que perturban primordialmente los pocos modos de vibración natural más bajos (con respecto a N). Los métodos de iteración vectorial inversa suelen ser eficaces (es decir, confiables en la obtención de soluciones exactas y eficientes computacionalmente) para este tipo de situaciones, por lo que esta presentación se limita a esos métodos. Se incluyen sólo las ideas básicas de la iteración vectorial, sin entrar en el método de iteración del subespacio o el método de Lanczos. De igual modo, se excluyen los métodos de transformación y las técnicas polinómicas de iteración. En resumen, se presenta un tratamiento limitado de los métodos de solución para el problema de valor característico que surge en la dinámica estructural. Esto es suficiente para los propósitos de este libro, pero existen tratamientos más completos en otros libros.

10.12 COCIENTE DE RAYLEIGH

En esta sección se presenta el cociente de Rayleigh, porque es necesario para los métodos de iteración vectorial; también se habla sobre sus propiedades. Si la ecuación (10.11.1) se multiplica antes por ϕ^T, se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$$\phi^T \mathbf{k} \phi = \lambda \phi^T \mathbf{m} \phi$$

La matriz definida positiva $\mathbf{m}$ garantiza que $\phi^T \mathbf{m} \phi$ es distinto de cero, por lo que es aceptable resolver para el escalar λ:

$$\lambda = \frac{\phi^T \mathbf{k} \phi}{\phi^T \mathbf{m} \phi} \tag{10.12.1}$$

que obviamente depende del vector ϕ. Esta expresión se denomina *cociente de Rayleigh*. También puede obtenerse al igualar el valor máximo de la energía cinética con el valor máximo de la energía potencial, en el supuesto de que el sistema de vibración esté ejecutando un movimiento armónico simple en la frecuencia ω con la forma modificada dada por ϕ (sección 8.5.3).

El cociente de Rayleigh tiene las siguientes propiedades, que se presentan sin demostración:

1. Cuando ϕ es un vector característico ϕ_n de la ecuación (10.11.1), el cociente de Rayleigh es igual al correspondiente valor característico λ_n.

2. Si ϕ es una aproximación a ϕ_n con un error que es infinitesimal de primer orden, el cociente de Rayleigh es una aproximación a λ_n con un error que es infinitesimal de segundo orden; es decir, el cociente de Rayleigh es *estacionario* en las cercanías de los vectores característicos verdaderos. El valor estacionario es en realidad un mínimo en la vecindad del primer vector característico y un máximo en las proximidades del N-ésimo vector característico.

3. El cociente de Rayleigh se acota entre $\lambda_1 \equiv \omega_1^2$ y $\lambda_N \equiv \omega_N^2$, los valores característicos menor y mayor; es decir, proporciona una cota superior para ω_1^2 y una cota inferior para ω_N^2.

Una aplicación común del cociente de Rayleigh a la ingeniería implica sólo la evaluación de la ecuación (10.12.1) para un vector de prueba ϕ que se selecciona sobre la base del conocimiento físico (capítulo 8). Si los elementos de un vector característico aproximado cuyo elemento más grande es la unidad son correctos hasta $2s$ posiciones decimales, se puede esperar que el cociente de Rayleigh sea correcto hasta aproximadamente $2s$ decimales. Varios procedimientos numéricos para la resolución de problemas de valor característico hacen uso de la propiedad estacionaria del cociente de Rayleigh.

10.13 MÉTODO DE ITERACIÓN VECTORIAL INVERSO

10.13.1 Conceptos básicos y procedimientos

Esta presentación se limita a los sistemas con una matriz de rigidez $\mathbf{k}$ que es positiva definida, mientras que la matriz de masa $\mathbf{m}$ puede ser una matriz en banda o una matriz diagonal, con o sin elementos diagonales iguales a cero. El hecho de que los métodos de iteración vectoriales puedan manejar elementos diagonales iguales a cero en la matriz de masa implica que estos métodos pueden aplicarse sin necesidad de realizar la condensación estática de la matriz de rigidez (sección 9.3).

El objetivo es satisfacer la ecuación (10.11.1) operando directamente sobre ella. Se supone un vector de prueba para ϕ, por ejemplo $\mathbf{x}_1$, y se evalúa el lado derecho de la ecuación (10.11.1). Esto puede hacerse, excepto para el valor característico λ, que es desconocido. Por lo tanto se descarta λ, que es equivalente a decir que se establece $\lambda = 1$. Como los vectores propios sólo pueden determinarse dentro de un factor de escala, la elección de λ no afectará el resultado final. Con $\lambda = 1$ es posible calcular el lado derecho de la ecuación (10.11.1):

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{m}\mathbf{x}_1 \tag{10.13.1}$$

Como $\mathbf{x}_1$ fue una elección arbitraria, en general $\mathbf{k}\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{R}_1$. (Si por coincidencia ocurre que $\mathbf{k}\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_1$, la $\mathbf{x}_1$ elegida es un vector característico). Ahora se establece una ecuación de equilibrio

$$\mathbf{k}\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_1 \tag{10.13.2}$$

donde $\mathbf{x}_2$ es el vector de desplazamiento correspondiente a las fuerzas $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1$. Puesto que se está utilizando la iteración para encontrar un vector característico, la intuición puede sugerir que la solución de $\mathbf{x}_2$ de la ecuación (10.13.2), obtenida después de un ciclo de iteración, puede ser una mejor aproximación a ϕ de lo que era $\mathbf{x}_1$. De hecho, esto es cierto, como se demostrará más adelante; al repetir el ciclo de iteración, se obtiene una aproximación cada vez mejor para el vector característico. Un valor correspondiente para el valor característico puede calcularse utilizando el cociente de Rayleigh y la iteración puede terminar cuando dos estimaciones sucesivas del valor característico estén suficientemente cerca. A medida que aumenta el número de iteraciones, $\mathbf{x}_{i+1}$ se aproxima a ϕ_1 y el valor característico se aproxima λ_1.

Así, el procedimiento inicia con el supuesto de un vector de iteración inicial $\mathbf{x}_1$ y consiste en los siguientes pasos que deben repetirse para $j = 1, 2, 3,\ldots$ hasta la convergencia:

1. Determine $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$ resolviendo las ecuaciones algebraicas:

$$\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{m}\mathbf{x}_j \tag{10.13.3}$$

2. Obtenga una estimación del valor propio al evaluar el cociente de Rayleigh:

$$\lambda^{(j+1)} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}_{j+1}}{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{j+1}} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\mathbf{x}_j}{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{j+1}} \tag{10.13.4}$$

3. Compruebe la convergencia comparando dos valores sucesivos de λ:

$$\frac{|\,\lambda^{(j+1)} - \lambda^{(j)}\,|}{\lambda^{(j+1)}} \leq \text{tolerancia} \tag{10.13.5}$$

4. Si el criterio de convergencia no se cumple, normalice $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{j+1})^{1/2}} \tag{10.13.6}$$

y regrese al primer paso para realizar otra iteración utilizando la j siguiente.

5. Sea l la última iteración (es decir, la iteración que satisface la ecuación 10.13.5). Entonces

$$\lambda_1 \doteq \lambda^{(l+1)} \qquad \phi_1 \doteq \frac{\bar{\mathbf{x}}_{l+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{l+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{l+1})^{1/2}} \tag{10.13.7}$$

El paso básico en la iteración es la solución de la ecuación (10.13.3) (un sistema de N ecuaciones algebraicas) que da una mejor aproximación a ϕ_1. El cálculo de la ecuación

(10.13.4) da una aproximación al valor característico λ_1 según el cociente de Rayleigh. Esta aproximación a λ_1 se utiliza para determinar la convergencia de la iteración. La ecuación (10.13.6) tan sólo asegura que el nuevo vector satisfaga la relación de ortonormalidad de la masa

$$\mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{m} \mathbf{x}_{j+1} = 1 \tag{10.13.8}$$

Aunque la normalización del nuevo vector no afecta a la convergencia, es numéricamente útil. Si no se incluye tal normalización, los elementos de los vectores de iteración crecen (o disminuyen) en cada paso, y esto puede causar problemas numéricos. La normalización mantiene los valores de los elementos similares de una iteración a la siguiente. La tolerancia se selecciona dependiendo de la precisión deseada. Debe ser de 10^{-2s} o menor cuando se requiere que λ_1 tenga una precisión de $2s$ dígitos. Entonces, el vector característico tendrá una precisión de alrededor de s o más dígitos.

El algoritmo de iteración vectorial inversa puede organizarse de forma diferente por conveniencia de la aplicación en computadora, pero tales problemas de cálculo no se incluyen aquí.

Ejemplo 10.14

En la figura E10.14 se muestran las masas y las rigideces de entrepiso de un marco con tres niveles, idealizado como un marco de cortante, donde $m = 100$ kips/g y $k = 168$ kips/pulg. Determine la frecuencia fundamental ω_1 y la forma del modo ϕ_1 mediante la iteración vectorial inversa.

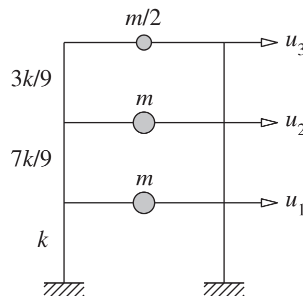


Figura E10.14

Solución Las matrices de masa y rigidez del sistema son

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{k}{9}\begin{bmatrix} 16 & -7 & 0 \\ -7 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

donde $m = 0.259$ kip-s^2/pulg y $k = 168$ kips/pulg.

El algoritmo de iteración inversa de las ecuaciones (10.13.3) a (10.13.7) se realiza a partir de un vector inicial $\mathbf{x}_1 = \langle 1 \quad 1 \quad 1\rangle^T$, lo cual conduce a la tabla E10.14. El resultado final es $\omega_1 \doteq \sqrt{144.14} = 12.006$ y $\phi_1 \doteq \langle 0.6377 \quad 1.2752 \quad 1.9122\rangle^T$.

10.13.2 Convergencia de la iteración

En la sección anterior sólo se presentó el esquema de la iteración inversa y se declaró que converge al primer vector característico asociado con el valor característico más pequeño.

TABLA E10.14 ITERACIÓN VECTORIAL INVERSA PARA EL PRIMER PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	$\lambda^{(j+1)}$	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0039\\0.0068\\0.0091\end{bmatrix}$	147.73	$\begin{bmatrix}0.7454\\1.3203\\1.7676\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}0.7454\\1.3203\\1.7676\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0045\\0.0089\\0.0130\end{bmatrix}$	144.29	$\begin{bmatrix}0.6574\\1.2890\\1.8800\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}0.6574\\1.2890\\1.8800\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0044\\0.0089\\0.0132\end{bmatrix}$	144.15	$\begin{bmatrix}0.6415\\1.2785\\1.9052\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}0.6415\\1.2785\\1.9052\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0044\\0.0089\\0.0133\end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix}0.6384\\1.2758\\1.9109\end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix}0.6384\\1.2758\\1.9109\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0044\\0.0088\\0.0133\end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix}0.6377\\1.2752\\1.9122\end{bmatrix}$

Ahora se demostrará esta convergencia porque la comprobación resulta instructiva, en especial al sugerir cómo debe modificarse el procedimiento para lograr la convergencia a un vector característico más alto.

La expansión modal del vector **x** es (a partir de las ecuaciones 10.7.1 y 10.7.2)

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \frac{\phi_n^T \mathbf{m}\mathbf{x}}{\phi_n^T \mathbf{m}\phi_n} \tag{10.13.9}$$

El n-ésimo término en esta sumatoria representa el n-ésimo componente modal en **x**.

El primer ciclo de iteración implica resolver las ecuaciones de equilibrio (10.13.3) con $j = 1$: $\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{m}\mathbf{x}_1$, donde $\mathbf{x}_1$ es un vector de prueba. Esta solución puede expresarse como $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\mathbf{x}_1$. Si se sustituye la expansión modal de la ecuación (10.13.9) para $\mathbf{x}_1$, resulta

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\phi_n q_n \tag{10.13.10}$$

Al reescribir la ecuación (10.11.1) para el n-ésimo par característico como $\mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\phi_n = (1/\lambda_n)\,\phi_n$ y al sustituirla en la ecuación (10.13.10), se obtiene

$$\bar{\mathbf{x}}_2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n}\phi_n q_n = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_1}{\lambda_n}\phi_n q_n \tag{10.13.11}$$

El segundo ciclo de iteración implica resolver la ecuación (10.13.3) con $j = 2$: $\bar{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_2$, en el que se ha utilizado el vector no normalizado $\bar{\mathbf{x}}_2$ en vez del vector normalizado $\mathbf{x}_2$. Esto es aceptable para el propósito actual porque la convergencia no se ve afectada por la normalización y los vectores característicos son arbitrarios dentro de un factor multiplicativo. Después de deducir las ecuaciones (10.13.10) y (10.13.11), es

posible demostrar que

$$\bar{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\lambda_1^2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 \phi_n q_n \tag{10.13.12}$$

Del mismo modo, el vector $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$ después de j ciclos de iteración puede expresarse como

$$\bar{\mathbf{x}}_{j+1} = \frac{1}{\lambda_1^j}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^j \phi_n q_n \tag{10.13.13}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_n$ para $n > 1$, $(\lambda_1/\lambda_n)^j \to 0$ cuando $j \to \infty$, y sólo el término $n = 1$ de la ecuación (10.13.13) sigue siendo significativo, lo que indica que

$$\bar{\mathbf{x}}_{j+1} \to \frac{1}{\lambda_1^j}\phi_1 q_1 \quad \text{cuando} \quad j \to \infty \tag{10.13.14}$$

Así, $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$ converge a un vector proporcional a ϕ_1. Además, el vector normalizado $\mathbf{x}_{j+1}$ de la ecuación (10.13.6) converge a f_1, que es la masa ortonormal.

La tasa de convergencia depende de λ_1/λ_2, la relación que aparece en el segundo término de la sumatoria en la ecuación (10.13.13). Cuanto menor sea esta relación, más rápida será la convergencia, lo que implica que la convergencia es muy lenta cuando λ_2 es casi igual a λ_1. Para tales situaciones, la tasa de convergencia puede mejorarse mediante los procedimientos de la sección 10.14.

Si sólo se requieren el primer modo natural ϕ_1 y la frecuencia natural asociada ω_1, no hay necesidad de seguir adelante. Esto es una ventaja del método de iteración. No es necesario resolver el problema de valor característico completo para obtener uno o dos de los modos.

10.13.3 Evaluación de los modos más altos

Para continuar con la solución después de que se han determinado ϕ_1 y λ_1, el vector de inicio se modifica para hacer que el procedimiento de iteración converja al segundo vector característico. La modificación necesaria está sugerida por la comprobación que se presentó en la sección 10.13.2 para demostrar que el proceso de iteración converge al primer vector característico. Observe que después de cada ciclo de iteración los otros componentes modales se reducen en relación con el primer componente modal debido a que su valor característico λ_1 es más pequeño que todos los otros valores característicos λ_n. El proceso de iteración converge al primer modo por la misma razón, porque $(\lambda_1/\lambda_n)^j \to 0$ cuando $j \to \infty$. En general, el procedimiento de iteración converge al modo con el valor característico más bajo contenido en un vector $\mathbf{x}$ de prueba.

Por lo tanto, para hacer que el procedimiento de iteración converja al segundo modo, debe elegirse un vector de prueba $\mathbf{x}$ que no contenga ningún componente del primer modo (es decir, q_1 debe ser cero en la ecuación 10.13.9) y se dice que $\mathbf{x}$ es ortogonal a ϕ_1. Sin embargo, no es posible comenzar *a priori* con tal $\mathbf{x}$. Por lo tanto, se inicia con una $\mathbf{x}$ arbitraria y se hace ortogonal a ϕ_1 mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Este proceso también puede usarse para ortogonalizar un vector de prueba con respecto a los primeros n vectores característicos que ya han sido determinados, de modo que la iteración en los vectores de prueba purificados converja al $(n+1)$-ésimo modo, que es el modo con el siguiente valor característico en secuencia ascendente.

En principio, el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, en combinación con el procedimiento de iteración inversa, proporciona una herramienta para calcular el segundo

y mayores valores y vectores característicos. Sin embargo, esta herramienta no resulta eficaz como un método general de cálculo por dos razones. Primero, si $\mathbf{x}_1$ se hiciera ortogonal a ϕ_1 (es decir, $q_1 = 0$ en la ecuación 10.13.9), teóricamente la iteración no convergería a ϕ_1 sino a ϕ_2 (o a algún otro vector característico: aquél con el siguiente valor característico superior que esté contenido en la expansión modal de $\mathbf{x}_1$). Sin embargo, en la práctica esto nunca ocurre ya que los inevitables errores de redondeo en la aritmética de precisión finita reintroducen continuamente pequeños componentes de ϕ_1 que aumentan por el proceso de iteración. La segunda razón es que la convergencia del proceso de iteración se vuelve más lenta poco a poco en los modos más altos. Es por tales razones que este método no se desarrolla en este libro.

10.14 ITERACIÓN VECTORIAL CON DESPLAZAMIENTO: PROCEDIMIENTO PREFERENTE

El procedimiento de iteración vectorial inversa de la sección 10.13, combinado con el concepto de "desplazamiento" del espectro del valor característico (o escala), proporciona un medio efectivo para mejorar la tasa de convergencia del proceso de iteración y para hacerlo converger a un par característico distinto de (λ_1, ϕ_1). Entonces, éste es el método preferido, puesto que proporciona una herramienta práctica para calcular tantos pares de frecuencias de vibración y modos naturales de una estructura como se desee.

10.14.1 Concepto básico y procedimiento

Las soluciones de la ecuación (10.11.1) son los valores característicos λ_n y los vectores característicos ϕ_n; el número de tales pares es igual a N, el orden de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{k}$. En la figura 10.14.1a se muestra el espectro de valores característicos (es decir, una gráfica de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a lo largo del eje de los valores característicos). Al introducir un desplazamiento μ en el origen del eje de valores característicos (figura 10.14.1b) y al definir $\check{\lambda}$ como el valor característico λ medido desde el origen desplazado, resulta $\lambda = \check{\lambda} + \mu$. Si se sustituye esto en la ecuación (10.11.1), se obtiene

$$\check{\mathbf{k}}\phi = \check{\lambda}\mathbf{m}\phi \tag{10.14.1}$$

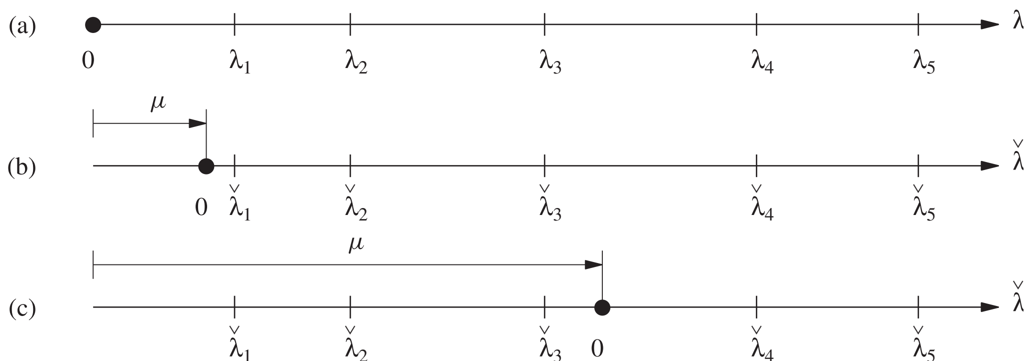


Figura 10.14.1 (a) Espectro de los valores característicos; (b) valor característico medido desde el origen desplazado; (c) ubicación de un punto desplazado para la convergencia a λ_3

donde

$$\check{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mu\mathbf{m} \qquad \check{\lambda} = \lambda - \mu \tag{10.14.2}$$

Los vectores característicos de los dos problemas de valor característico (ecuación original 10.11.1 y ecuación desplazada 10.14.1) son iguales. Esto es evidente porque si un f satisface una ecuación, también satisfará la otra. Sin embargo, los valores característicos $\check{\lambda}$ del problema desplazado difieren de los valores característicos λ del problema original debido al desplazamiento μ (ecuación 10.14.2). El espectro de los valores característicos $\check{\lambda}$ desplazados se muestra también en la figura 10.14.1b con el origen en μ. Si se aplica el método de iteración vectorial inversa de la sección 10.13.1 al problema de valor característico de la ecuación (10.14.1), es evidente que converge al vector característico que tenga la menor magnitud en el valor característico desplazado $|\check{\lambda}_n|$ (es decir, el vector característico con el valor característico λ_n original más cercano al valor del desplazamiento μ).

Si μ se elige como en la figura 10.14.1b, la iteración converge al primer vector característico. La tasa de convergencia depende de la relación $\check{\lambda}_1/\check{\lambda}_2 = (\lambda_1 - \mu)/(\lambda_2 - \mu)$. La tasa de convergencia ha mejorado porque esta relación es más pequeña que la relación de λ_1/λ_2 para el problema de valor característico original. Si μ se elige entre λ_n y λ_{n+1}, y μ está más cercana de λ_n que de λ_{n+1}, la iteración converge a λ_n. Por otra parte, si μ está más cerca de λ_{n+1} que de λ_n, la iteración converge a λ_{n+1}. Así, el concepto de "desplazamiento" permite calcular cualquier par (λ_n, ϕ_n). En particular, si μ se elige como en la figura 10.14.1c, la iteración converge al tercer vector característico.

Ejemplo 10.15

Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema del ejemplo 10.14 mediante la iteración vectorial inversa con desplazamiento.

Solución La ecuación (10.14.1) con un desplazamiento μ seleccionado se resuelve mediante la iteración vectorial inversa. Si se selecciona el desplazamiento $\mu_1 = 100$, $\check{\mathbf{k}}$ se calcula a partir de la ecuación (10.14.2) y el algoritmo de iteración vectorial inversa de las ecuaciones (10.13.3) a

TABLA E10.15a ITERACIÓN VECTORIAL CON DESPLAZAMIENTO: PRIMER PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	$\lambda^{(j+1)}$	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 0.0114 \\ 0.0218 \\ 0.0313 \end{bmatrix}$	144.60	$\begin{bmatrix} 0.6759 \\ 1.2933 \\ 1.8610 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.6759 \\ 1.2933 \\ 1.8610 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 0.0145 \\ 0.0289 \\ 0.0432 \end{bmatrix}$	144.15	$\begin{bmatrix} 0.6401 \\ 1.2769 \\ 1.9083 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0.6401 \\ 1.2769 \\ 1.9083 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 0.0144 \\ 0.0289 \\ 0.0433 \end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix} 0.6377 \\ 1.2752 \\ 1.9122 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0.6377 \\ 1.2752 \\ 1.9122 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 0.0144 \\ 0.0289 \\ 0.0433 \end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix} 0.6375 \\ 1.2750 \\ 1.9125 \end{bmatrix}$

TABLA E10.15b ITERACIÓN VECTORIAL CON DESPLAZAMIENTO: SEGUNDO PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	$\lambda^{(j+1)}$	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	600	$\begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0028 \\ -0.0133 \end{bmatrix}$	605.11	$\begin{bmatrix} 0.8030 \\ 0.5189 \\ -2.4277 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.8030 \\ 0.5189 \\ -2.4277 \end{bmatrix}$	600	$\begin{bmatrix} 0.0197 \\ 0.0201 \\ -0.0373 \end{bmatrix}$	648.10	$\begin{bmatrix} 1.0062 \\ 1.0221 \\ -1.8994 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1.0062 \\ 1.0221 \\ -1.8994 \end{bmatrix}$	600	$\begin{bmatrix} 0.0201 \\ 0.0201 \\ -0.0405 \end{bmatrix}$	648.64	$\begin{bmatrix} 0.9804 \\ 0.9778 \\ -1.9717 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0.9804 \\ 0.9778 \\ -1.9717 \end{bmatrix}$	600	$\begin{bmatrix} 0.0202 \\ 0.0202 \\ -0.0404 \end{bmatrix}$	648.65	$\begin{bmatrix} 0.9827 \\ 0.9829 \\ -1.9642 \end{bmatrix}$

(10.13.7) se realiza a partir de un vector inicial $\mathbf{x}_1 = \langle 1 \quad 1 \quad 1\rangle^T$, lo cual conduce a la tabla E10.15a. El resultado final es $\omega_1 = \sqrt{144.14} = 12.006$ y $\phi_1 = \langle 0.6375 \quad 1.2750 \quad 1.9125\rangle^T$. Lo anterior se obtiene en un ciclo de iteración menos que en la iteración sin desplazamiento del ejemplo 10.14.

Si se inicia con el desplazamiento $\mu_1 = 600$ y el mismo $\mathbf{x}_1$, el algoritmo de iteración inversa conduce a la tabla E10.15b. El resultado final es $\omega_2 = \sqrt{648.65} = 25.468$ y $\phi_2 = \langle 0.9827 \quad 0.9829 \quad -1.9642\rangle^T$. La convergencia se alcanza en cuatro ciclos de iteración.

Si se inicia con el desplazamiento $\mu_1 = 1500$ y el mismo $\mathbf{x}_1$, el algoritmo de iteración inversa conduce a la tabla E10.15c. El resultado final es $\omega_3 = \sqrt{1513.5} = 38.904$ y $\phi_3 = \langle 1.5778 \quad -1.1270 \quad 0.4508\rangle^T$. La convergencia se alcanza en tres ciclos.

TABLA E10.15c ITERACIÓN VECTORIAL CON DESPLAZAMIENTO: TERCER PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	$\lambda^{(j+1)}$	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	1500	$\begin{bmatrix} 0.0198 \\ -0.0156 \\ 0.0054 \end{bmatrix}$	1510.6	$\begin{bmatrix} 1.5264 \\ -1.2022 \\ 0.4148 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1.5264 \\ -1.2022 \\ 0.4148 \end{bmatrix}$	1500	$\begin{bmatrix} 0.1167 \\ -0.0832 \\ 0.0333 \end{bmatrix}$	1513.5	$\begin{bmatrix} 1.5784 \\ -1.1261 \\ 0.4509 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1.5784 \\ -1.1261 \\ 0.4509 \end{bmatrix}$	1500	$\begin{bmatrix} 0.1168 \\ -0.0834 \\ 0.0334 \end{bmatrix}$	1513.5	$\begin{bmatrix} 1.5778 \\ -1.1270 \\ 0.4508 \end{bmatrix}$

10.14.2 Iteración del cociente de Rayleigh

El método de iteración inversa con desplazamientos converge rápido si el desplazamiento se elige lo suficientemente cerca del valor característico de interés. Sin embargo, la selección de un desplazamiento adecuado es difícil si no se conoce el valor característico.

Se han desarrollado muchas técnicas para superar esta dificultad, una de ellas se presenta en esta sección.

El cociente de Rayleigh, que se calcula mediante la ecuación (10.13.4) para estimar el valor característico, proporciona un valor adecuado del desplazamiento, pero no es necesario calcular e introducir un nuevo desplazamiento en cada ciclo de iteración. Sin embargo, si se hace esto, el procedimiento resultante se denomina *iteración del cociente de Rayleigh*.

Este procedimiento comienza con el supuesto de un vector de iteración $\mathbf{x}_1$ y un desplazamiento $\lambda^{(1)}$ iniciales, y consta de los siguientes pasos que deben repetirse para $j = 1, 2, 3, \ldots$ hasta la convergencia:

1. Determine $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$ resolviendo las ecuaciones algebraicas:

$$[\mathbf{k} - \lambda^{(j)}\mathbf{m}]\bar{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{m}\mathbf{x}_j \tag{10.14.3}$$

2. Obtenga una estimación del valor característico y del desplazamiento para la siguiente iteración a partir de

$$\lambda^{(j+1)} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\mathbf{x}_j}{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{j+1}} + \lambda^{(j)} \tag{10.14.4}$$

3. Normalice $\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{j+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}^T \mathbf{m}\bar{\mathbf{x}}_{j+1})^{1/2}} \tag{10.14.5}$$

Esta iteración converge a un determinado par característico (λ_n, ϕ_n) dependiendo del vector inicial $\mathbf{x}_1$ y el desplazamiento de inicio $\lambda^{(1)}$. Si $\mathbf{x}_1$ incluye una fuerte contribución del vector característico ϕ_n y $\lambda^{(1)}$ está suficientemente cerca de λ_n, la iteración converge al par característico (λ_n, ϕ_n). La tasa de convergencia es más rápida que para la iteración vectorial estándar con desplazamiento descrita en la sección 10.14.1, pero a expensas de cálculos adicionales porque en cada iteración es necesario factorizar un nuevo $[\mathbf{k} - \lambda^{(j)}\mathbf{m}]$.

Ejemplo 10.16

Determine las tres frecuencias y modos naturales del sistema del ejemplo 10.14 mediante la iteración vectorial inversa con un desplazamiento en cada ciclo de iteración igual al cociente de Rayleigh del ciclo anterior.

Solución El procedimiento de iteración de las ecuaciones (10.14.3) a (10.14.5) se implementa con los desplazamientos iniciales $\mu_1 = 100$, $\mu_2 = 600$ y $\mu_3 = 1500$, lo que conduce a las tablas E10.16a, E10.16b y E10.16c, respectivamente, donde los resultados finales son $\omega_1 = \sqrt{144.14} = 12.006$ y $\phi_1 = \langle 0.6375 \quad 1.2750 \quad 1.9125 \rangle^T$, $\omega_2 = \sqrt{648.65} = 25.468$ y $\phi_2 = \langle 0.9825 \quad 0.9825 \quad -1.9649 \rangle^T$, y $\omega_3 = \sqrt{1513.5} = 38.904$ y $\phi_3 = \langle 1.5778 \quad -1.1270 \quad 0.4508 \rangle^T$.

Observe que la convergencia es más rápida cuando se utiliza un nuevo desplazamiento en cada ciclo de iteración. Para el primer modo, se requieren sólo dos ciclos en lugar de cuatro (ejemplo 10.15) y para el segundo modo se necesitan tres ciclos en vez de cuatro.

TABLA E10.16a ITERACIÓN DEL COCIENTE DE RAYLEIGH: PRIMER PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	$\lambda^{(j+1)}$	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 0.0114 \\ 0.0218 \\ 0.0313 \end{bmatrix}$	144.60	$\begin{bmatrix} 0.6759 \\ 1.2933 \\ 1.8610 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.6759 \\ 1.2933 \\ 1.8610 \end{bmatrix}$	144.60	$\begin{bmatrix} -1.3947 \\ -2.7895 \\ -4.1845 \end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix} -0.6375 \\ -1.2750 \\ -1.9126 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -0.6375 \\ -1.2750 \\ -1.9126 \end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix} 1.9738 \times 10^6 \\ 3.9476 \times 10^6 \\ 5.9214 \times 10^6 \end{bmatrix}$	144.14	$\begin{bmatrix} 0.6375 \\ 1.2750 \\ 1.9125 \end{bmatrix}$

TABLA E10.16b ITERACIÓN DEL COCIENTE DE RAYLEIGH: SEGUNDO PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	λ^{j+1}	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	600	$\begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0028 \\ -0.0133 \end{bmatrix}$	605.11	$\begin{bmatrix} 0.8030 \\ 0.5189 \\ -2.4277 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.8030 \\ 0.5189 \\ -2.4277 \end{bmatrix}$	605.11	$\begin{bmatrix} 0.0220 \\ 0.0223 \\ -0.0418 \end{bmatrix}$	648.21	$\begin{bmatrix} 1.0036 \\ 1.0176 \\ -1.9070 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1.0036 \\ 1.0176 \\ -1.9070 \end{bmatrix}$	648.21	$\begin{bmatrix} 2.2624 \\ 2.2623 \\ -4.5249 \end{bmatrix}$	648.65	$\begin{bmatrix} 0.9825 \\ 0.9824 \\ -1.9650 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0.9825 \\ 0.9824 \\ -1.9650 \end{bmatrix}$	648.65	$\begin{bmatrix} 3.0372 \times 10^6 \\ 3.0372 \times 10^6 \\ -6.0745 \times 10^6 \end{bmatrix}$	648.65	$\begin{bmatrix} 0.9825 \\ 0.9825 \\ -1.9649 \end{bmatrix}$

TABLA E10.16c ITERACIÓN DEL COCIENTE DE RAYLEIGH: TERCER PAR CARACTERÍSTICO

Iteración	$\mathbf{x}_j$	μ	$\bar{\mathbf{x}}_{j+1}$	λ^{j+1}	$\mathbf{x}_{j+1}$
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	1500	$\begin{bmatrix} 0.0198 \\ -0.0156 \\ 0.0054 \end{bmatrix}$	1510.6	$\begin{bmatrix} 1.5264 \\ -1.2022 \\ 0.4148 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1.5264 \\ -1.2022 \\ 0.4148 \end{bmatrix}$	1510.6	$\begin{bmatrix} 0.5431 \\ -0.3879 \\ 0.1552 \end{bmatrix}$	1513.5	$\begin{bmatrix} 1.5779 \\ -1.1268 \\ 0.4508 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1.5779 \\ -1.1268 \\ 0.4508 \end{bmatrix}$	1513.5	$\begin{bmatrix} 9.7061 \times 10^4 \\ -6.9329 \times 10^4 \\ 2.7732 \times 10^4 \end{bmatrix}$	1513.5	$\begin{bmatrix} 1.5778 \\ -1.1270 \\ 0.4508 \end{bmatrix}$

Aplicación a la dinámica estructural. En el análisis modal de la respuesta dinámica de las estructuras, se tiene interés en las J frecuencias y modos naturales más bajos (capítulos 12 y 13); por lo regular, J es mucho menor que N, el número de grados de libertad. Aunque la iteración del cociente de Rayleigh puede parecer una herramienta eficaz para el cálculo necesario, no siempre funciona. Por ejemplo, con el vector de inicio $\mathbf{x}_1$ y el desplazamiento inicial $\lambda^{(1)} = 0$, la ecuación (10.14.4) puede proporcionar un valor para el cociente de Rayleigh (que, de acuerdo con la sección 10.12, siempre es mayor que el primer valor característico), que también es el siguiente desplazamiento, más cerca del segundo valor característico que del primero, lo que resulta en la iteración convergente para el segundo modo. Por lo tanto, es necesario completar la iteración del cociente de Rayleigh mediante otra técnica para asegurar la convergencia al par característico más bajo (λ_1, ϕ_1). Una posibilidad es utilizar primero la iteración inversa sin desplazamiento, ecuaciones (10.13.3) a (10.13.7), durante unos cuantos ciclos para obtener un vector de iteración que sea una buena aproximación (aunque no converja) a ϕ_1 y después comenzar con la iteración del cociente de Rayleigh.

La implementación en computadora de la iteración vectorial inversa con desplazamiento debe ser confiable y eficaz. Por confiabilidad se entiende que debe proporcionar el par característico deseado. La eficacia implica que con el menor número de iteraciones y cálculos, el método debería proporcionar resultados con el grado de precisión deseado. Estos dos requisitos son esenciales, de lo contrario, el programa de computadora puede omitir un par característico deseado, o los cálculos pueden tomar un tiempo innecesariamente largo. Los temas relacionados con la confiabilidad y la eficacia de los métodos de computadora para la solución del problema de valor característico se analizan con mayor detalle en otros libros.

10.15 TRANSFORMACIÓN DE $\mathbf{k}\phi = \omega^2\mathbf{m}\phi$ A LA FORMA ESTÁNDAR

El problema estándar de valor característico $\mathbf{Ay} = \lambda\mathbf{y}$ surge en muchas situaciones en las matemáticas y en sus aplicaciones a problemas de las ciencias físicas y la ingeniería. Por consiguiente, ha captado mucha la atención y se han desarrollado muchos algoritmos de solución que están disponibles en las bibliotecas de software de computadora. Estos procedimientos computacionales podrían utilizarse para resolver el problema de valor característico de la dinámica estructural, $\mathbf{k}\phi = \omega^2\mathbf{m}\phi$, siempre que pueda transformarse a la forma estándar. En esta sección se presenta tal transformación.

Se supone que $\mathbf{m}$ es una matriz positiva definida, es decir, o bien es una matriz diagonal con masas diferentes de cero o una matriz en banda como en una formulación de masa consistente (capítulo 17). Si $\mathbf{m}$ es una matriz diagonal con masa cero en algunos grados de libertad, éstos son los primeros en eliminarse por condensación estática (sección 9.3). Una matriz positiva definida $\mathbf{m}$ implica que es posible calcular $\mathbf{m}^{-1}$. Si se multiplica antes el problema de valor característico de dinámica estructural

$$\mathbf{k}\phi = \omega^2\mathbf{m}\phi \tag{10.15.1}$$

por $\mathbf{m}^{-1}$, se obtiene el problema de valor característico estándar:

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi \tag{10.15.2}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \qquad \lambda = \omega^2 \tag{10.15.3}$$

En general, $\mathbf{A}$ no es simétrica, aunque tanto $\mathbf{m}$ como $\mathbf{k}$ son matrices simétricas.

Como el esfuerzo computacional podría reducirse en gran medida si **A** fuera simétrica, se buscan métodos que produzcan una **A** simétrica. Tenga en cuenta que $\mathbf{m} = \text{diag}(m_j)$, una matriz diagonal con elementos $m_{jj} = m_j$, y defina $\mathbf{m}^{1/2} = \text{diag}(m^{1/2}j)$ y $\mathbf{m}^{-1/2} = \text{diag}(m^{-1/2}{}_j)$. Entonces **m** y la matriz identidad **I** pueden expresarse como

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{1/2}\mathbf{m}^{1/2} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{m}^{1/2} \tag{10.15.4}$$

Si se usa la ecuación (10.15.4), la ecuación (10.15.1) puede reescribirse como

$$\mathbf{k}\mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{m}^{1/2}\phi = \omega^2\mathbf{m}^{1/2}\mathbf{m}^{1/2}\phi$$

Al multiplicar previamente ambos lados por $\mathbf{m}^{-1/2}$ se obtiene

$$\mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{k}\mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{m}^{1/2}\phi = \omega^2\mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{m}^{1/2}\mathbf{m}^{1/2}\phi$$

Si se emplea la ecuación (10.15.4b) para simplificar el lado derecho de la ecuación anterior, resulta

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \tag{10.15.5}$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{k}\mathbf{m}^{-1/2} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{m}^{1/2}\phi \qquad \lambda = \omega^2 \tag{10.15.6}$$

La ecuación (10.15.5) es el problema de valor característico estándar y **A** ahora es simétrica.

Así, si se tuviera un programa de computadora para resolver $\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, éste podría utilizarse para determinar las frecuencias ω_n y los modos ϕ_n naturales de un sistema para el que **m** y **k** son conocidos; el procedimiento sería el siguiente:

1. Calcular **A** a partir de la ecuación (10.15.6a).

2. Determinar los valores característicos λ_n y los vectores característicos $\mathbf{y}_n$ de **A** resolviendo la ecuación (10.15.5).

3. Determinar las frecuencias y modos naturales mediante

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \qquad \phi_n = \mathbf{m}^{-1/2}\mathbf{y}_n \tag{10.15.7}$$

La transformación de la ecuación (10.15.6) puede generalizarse para situaciones en las que la matriz de masa no es diagonal, pero es una matriz en banda como la matriz de rigidez; tales matrices son típicas de las formulaciones en elementos finitos. Entonces, **A** es una matriz completa, aunque **k** y **m** sean matrices en banda. Esto es una desventaja computacional importante para los sistemas grandes. En tales situaciones, la transformación de $\mathbf{k}\phi = \omega^2\mathbf{m}\phi$ en $\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ puede no ser un enfoque eficaz, y es posible que el método de iteración inversa, que trabaja directamente con $\mathbf{k}\phi = \omega^2\mathbf{m}\phi$, sea más eficiente.

LECTURAS ADICIONALES

Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996, capítulos 10 y 11.

Crandall, S. H. y McCalley, R. B., Jr., "Matrix Methods of Analysis", capítulo 28 de *Shock and Vibration Handbook* (ed. C. M. Harris), McGraw-Hill, Nueva York, 1988.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, 2a. ed., A. A. Balkema Publishers, Lisse, Países Bajos, 2002, capítulo 11.

Parlett, B. N., *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.

PROBLEMAS

Partes A y B

10.1 Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema de la figura P9.1 con $k_1 = k$ y $k_2 = 2k$, en términos de los grados de libertad de la figura. Demuestre que estos resultados son equivalentes a los presentados en la figura E10.1.

10.2 Para el sistema definido en el problema 9.2:

(a) Determine las frecuencias y modos de vibración naturales; exprese las frecuencias en función de m, EI y L. Trace los modos e identifique las frecuencias naturales asociadas.
(b) Verifique que los modos satisfagan las propiedades de ortogonalidad.
(c) Normalice cada modo para que la masa modal M_n tenga un valor unitario. Trace estos modos normalizados. Compare estos modos con los obtenidos en el inciso (a) y comente las diferencias.

10.3 Determine la respuesta a la vibración libre del sistema del problema 9.2 (y del problema 10.2) para cada uno de los tres grupos de desplazamientos iniciales: **(a)** $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, **(b)** $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$, **(c)** $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = -1$. Comente sobre la contribución relativa de los modos a la respuesta en los tres casos. Desprecie el amortiguamiento en el sistema.

10.4 Repita el problema 10.3(a) considerando el amortiguamiento del sistema. Para cada modo, la fracción de amortiguamiento es $\zeta_n = 5\%$.

10.5 Para el sistema definido en el problema 9.4:

(a) Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales. Exprese las frecuencias en función de m, EI y L, y trace los modos.
(b) Determine la respuesta de desplazamiento debida a una velocidad inicial $\dot{u}_2(0)$ impartida a la parte superior del sistema.

10.6 Para el edificio de cortante de dos niveles que se muestra en el problema 9.5:

(a) Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales; exprese las frecuencias en función de m, EI y h.
(b) Verifique que los modos satisfagan las propiedades de ortogonalidad.
(c) Normalice cada modo de forma que el desplazamiento del techo sea unitario. Trace los modos y determine las frecuencias naturales asociadas.
(d) Normalice cada modo para que la masa modal M_n tenga un valor unitario. Compare estos modos con los obtenidos en el inciso (c) y comente las diferencias.

10.7 La estructura del problema 9.5 se modifica de manera que las columnas estén articuladas en la base. Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema modificado, y compárelos con las propiedades de vibración de la estructura inicial determinadas en el problema 10.6. Comente sobre el efecto de la condición de soporte de la columna en las propiedades de vibración.

10.8 Determine la respuesta a la vibración libre de la estructura del problema 10.6 (y del problema 9.5) si ésta se desplaza como se muestra en la figura P10.8a y b, y después se libera. Comente sobre las contribuciones relativas de los dos modos de vibración a la respuesta que se produce por los dos desplazamientos iniciales. Desprecie el amortiguamiento.

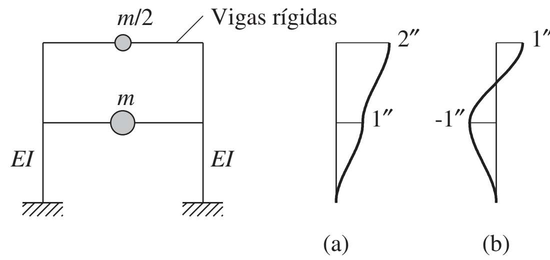


Figura P10.8

10.9 Repita el problema 10.8 para el desplazamiento inicial de la figura P10.8a, suponiendo que la fracción de amortiguamiento para cada modo es del 5%.

***10.10** Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema definido en el problema 9.6. Exprese las frecuencias en función de *m*, *EI* y *h*, y las rotaciones de las juntas en términos de *h*. Normalice cada modo de desplazamiento unitario en el techo y grafíquelo, identificando todos los grados de libertad.

10.11-10.12 Para los edificios de cortantes de tres niveles mostrados en las figuras P9.7 y P9.8:
(a) Determine las frecuencias y modos de vibración naturales, y exprese las frecuencias en función de *m*, *EI* y *h*. Trace los modos y determine las frecuencias naturales asociadas.
(b) Verifique que los modos satisfagan las propiedades de ortogonalidad.
(c) Normalice cada modo para que la masa modal M_n tenga un valor unitario. Trace estos modos normalizados. Compare los modos con los obtenidos en el inciso (a) y comente las diferencias.

10.13-10.14 Las estructuras de las figuras P9.7 y P9.8 se modifican de manera que las columnas estén articuladas en la base. Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema modificado, y compárelos con las propiedades de vibración de las estructuras originales determinadas en los problemas 10.11 y 10.12. Comente sobre el efecto de las condiciones de soporte de la columna en las propiedades de vibración.

10.15-10.16 Determine la respuesta a la vibración libre de las estructuras de los problemas 10.11 y 10.12 (y los problemas 9.7 y 9.8) si se desplazan como en las figuras P10.15-P10.16a, b, y c, y después se liberan. Grafique los desplazamientos de cada nivel contra t/T_1 y comente sobre las contribuciones relativas de los tres modos de vibración a la respuesta que se produce por cada uno de los tres desplazamientos iniciales. Desprecie el amortiguamiento.

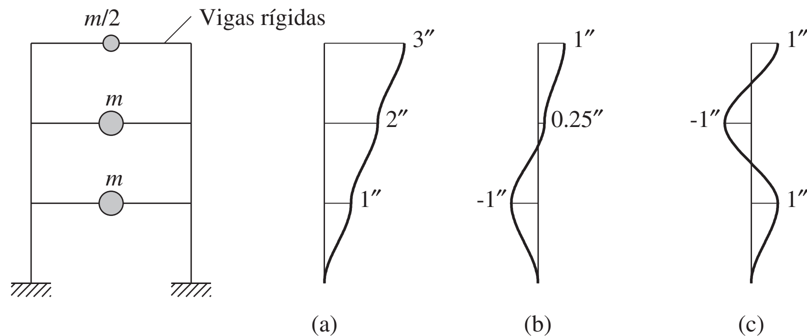


Figura P10.15-P10.16

*Indica que la solución del problema requiere una computadora.

10.17- 10.18 Repita los problemas 10.15 y 10.16 para el desplazamiento inicial de la figura P10.15a, suponiendo que la fracción de amortiguamiento para cada modo es del 5%.

***10.19- 10.22** Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales de los sistemas definidos en los problemas 9.9 a 9.12. Exprese las frecuencias en función de m, EI y h, y las rotaciones de las juntas en términos de h. Normalice cada modo de desplazamiento unitario en el techo y trácelo, incluyendo todos los grados de libertad.

10.23 **(a)** Para el sistema del problema 9.13, determine las frecuencias y los modos de vibración naturales. Exprese las frecuencias en función de m, EI y L, y trace los modos.

(b) La estructura se jala en un desplazamiento lateral $u_1(0)$ y después se libera. Determine la respuesta a la vibración libre.

10.24 Para el sistema definido en el problema 9.14, $m = 90$ kips/g, $k = 1.5$ kips/pulg y $b = 25$ pies.

(a) Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales.

(b) Normalice cada modo para que la masa modal M_n tenga un valor unitario. Trace estos modos.

10.25 Repita el problema 10.24 usando un grupo diferente de grados de libertad (los definidos en el problema 9.15). Demuestre que las frecuencias y los modos de vibración naturales determinados utilizando los dos grupos de grados de libertad son iguales.

10.26 Repita el problema 10.24 usando un conjunto diferente de grados de libertad (los definidos en el problema 9.16). Demuestre que las frecuencias y los modos de vibración naturales determinados utilizando los dos grupos de grados de libertad son iguales.

10.27 Repita el problema 10.24 usando un grupo diferente de grados de libertad (los definidos en el problema 9.17). Demuestre que las frecuencias y los modos de vibración naturales determinados utilizando los dos grupos de grados de libertad son iguales.

10.28 Para la estructura definida en el problema 9.18, determine las frecuencias y los modos naturales. Normalice cada modo de manera que $\phi_n^T \phi_n = 1$.

Parte C

***10.29** En la figura P10.29 se muestran los pesos y las rigideces de entrepiso para un marco de cortante de tres niveles, donde $\omega = 100$ kips y $k = 326.32$ kips/pulg. Determine la frecuencia ω_1 y el modo ϕ_1 de la vibración natural fundamental mediante la iteración vectorial inversa.

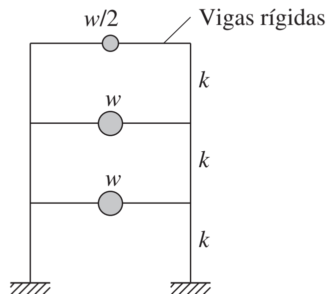


Figura P10.29

***10.30** Para el sistema definido en el problema 10.29 se tiene preocupación por las posibles vibraciones resonantes debidas a una maquinaria giratoria montada al nivel del segundo nivel. La

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

velocidad de funcionamiento del motor es de 430 rpm. Obtenga la frecuencia de vibración natural de la estructura que esté más cerca a la frecuencia de la máquina.

***10.31** Determine las tres frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema definido en el problema 10.29 mediante la iteración vectorial inversa con desplazamiento.

***10.32** Determine las tres frecuencias y los modos de vibración naturales del sistema definido en el problema 10.29; utilice la iteración vectorial inversa con un desplazamiento en cada ciclo de iteración igual al cociente de Rayleigh del ciclo anterior.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

11

Amortiguamiento en estructuras

AVANCE

En este capítulo se analizan varios problemas que surgen al definir las propiedades de amortiguamiento en las estructuras. No es práctico determinar los coeficientes de la matriz de amortiguamiento directamente a partir de las dimensiones estructurales, los tamaños de los elementos estructurales y las propiedades de amortiguamiento de los materiales estructurales utilizados. Por lo tanto, el amortiguamiento suele especificarse mediante los valores numéricos de las fracciones de amortiguamiento modal; estos valores son suficientes para analizar los sistemas lineales con amortiguamiento clásico. Los datos experimentales que proveen un fundamento para estimar estas fracciones de amortiguamiento se estudian en la parte A de este capítulo, que termina con los valores recomendados para las fracciones de amortiguamiento modal. Sin embargo, la matriz de amortiguamiento es necesaria para el análisis de los sistemas lineales con amortiguamiento no clásico y para el estudio de las estructuras no lineales. En la parte B se presentan dos procedimientos para construir la matriz de amortiguamiento de una estructura a partir de las relaciones de amortiguamiento modal; se consideran los sistemas con amortiguamiento clásico, así como los sistemas con amortiguamiento no clásico.

PARTE A: DATOS EXPERIMENTALES Y FRACCIONES DE AMORTIGUAMIENTO MODAL RECOMENDADAS

11.1 PROPIEDADES DE VIBRACIÓN DEL EDIFICIO DE LA BIBLIOTECA MILLIKAN

Elegida como un ejemplo para analizar el amortiguamiento, la Biblioteca Robert A. Millikan es un edificio de nueve pisos, hecho con concreto reforzado y construido en 1966-1967, en el campus del California Institute of Technology en Pasadena, California. En la



Figura 11.1.1 Biblioteca Millikan, California Institute of Technology, en Pasadena, California. (Cortesía de K. V. Steinbrugge Collection, Earthquake Engineering Research Center de la University of California en Berkeley).

figura 11.1.1 se muestra una fotografía de este edificio. Tiene una planta de 69 por 75 pies, y se extiende 144 pies por encima del nivel del terreno y 158 pies por encima del nivel del sótano. La altura incluye un techo cerrado que alberga equipos de aire acondicionado. Las fuerzas laterales en la dirección norte-sur son soportadas principalmente por los muros de cortante de 12 pulgadas de espesor de concreto reforzado situados en los extremos este y oeste del edificio. En la dirección este-oeste los muros de 12 pulgadas de concreto reforzado del núcleo central, que albergan el ascensor y la escalera de emergencia, proporcionan la mayor parte de la resistencia lateral. En los muros norte y sur hay muros prefabricados de concreto con ventanas, atornillados. Éstos se diseñaron para una función arquitectónica, pero proporcionan rigidez en la dirección este-oeste para las vibraciones de baja amplitud.

Las propiedades de vibración (periodos naturales, modos naturales y fracciones de amortiguamiento modal) de la Biblioteca Millikan se han determinado mediante pruebas de vibración forzada, utilizando el generador de vibraciones mostrado en la figura 3.3.1. Tal prueba conduce a una curva de respuesta en la frecuencia que muestra un pico de resonancia correspondiente a cada frecuencia natural de la estructura; por ejemplo, en la figura 11.1.2 se muestra una curva de respuesta en la frecuencia con valores cercanos a la frecuencia de vibración natural fundamental en la dirección este-oeste. A partir de estos datos fue posible determinar la frecuencia natural y la fracción de amortiguamiento para el modo de vibra-

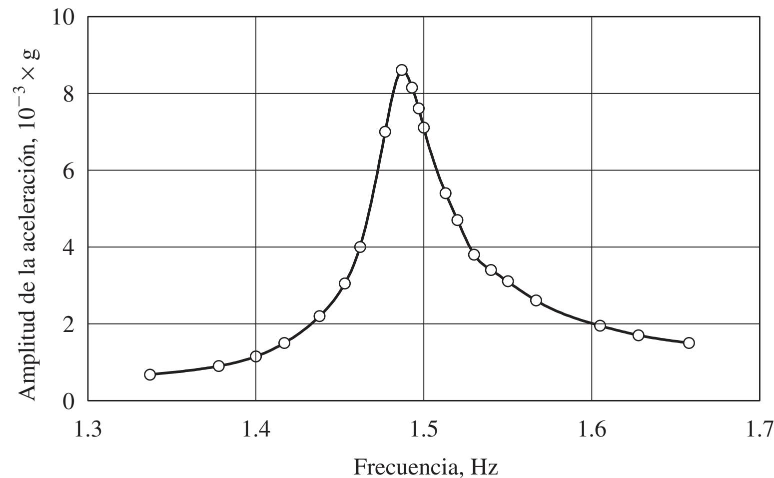


Figura 11.1.2 Curva de respuesta en la frecuencia para la Biblioteca Millikan cerca de su frecuencia fundamental de vibración en la dirección este-oeste; la aceleración se midió en el octavo nivel. (Adaptado de Jennings y Kuroiwa, 1968).

TABLA 11.1.1 PERIODOS NATURALES DE VIBRACIÓN Y FRACCIONES DE AMORTIGUAMIENTO MODAL DE LA BILIOTECA MILLIKAN

		Modo fundamental		Segundo modo	
Excitación	Aceleración del techo (g)	Periodo (s)	Amortiguamiento (%)	Periodo (s)	Amortiguamiento (%)
		Dirección norte-sur			
Generador de vibración	5×10^{-3} a 20×10^{-3}	0.51-0.53	1.2-1.8	[a]	[a]
Sismo de Lytle Creek	0.05	0.52	2.9	0.12	1.0
Sismo de San Fernando	0.312	0.62	6.4	0.13	4.7
		Dirección este-oeste			
Generador de vibración	3×10^{-3} a17×10^{-3}	066-0.68	0.7-1.5	[b]	[b]
Sismo de Lytle Creek	0.035	0.71	2.2	0.18	3.6
Sismo de San Fernando	0.348	0.98	7.0	0.20	5.9

[a]No se midió.

[b]Datos no confiables.

ción fundamental, mediante los métodos de la sección 3.4.2 y los resultados se presentan en la tabla 11.1.1. El periodo natural para este modo de vibración en la dirección este-oeste fue de 0.66 s (observe que $f_n = 1.49$ Hz en la figura 11.1.2). Este valor aumentó alrededor de 3% en el intervalo de resonancia de las pruebas: aceleración de 3×10^{-3} g a 17×10^{-3} g en el techo. La forma modal correspondiente a este modo se determinó con base en las mediciones tomadas en varios niveles de la estructura, pero no se presenta aquí. En la prueba de vibración la fracción de amortiguamiento en el modo fundamental este-oeste varió entre 0.7 y 1.5%, aumentando con la amplitud de respuesta. En la dirección norte-sur el periodo natural del modo fundamental fue de 0.51 s, aumentando aproximadamente 4% en el intervalo de resonancia de las pruebas: aceleración de 5×10^{-3} g a 20×10^{-3} g en el techo. La fracción de amortiguamiento en este modo varió entre 1.2 y 1.8%, aumentando de nuevo con la amplitud de respuesta.

La Biblioteca Millikan se encuentra aproximadamente a 19 millas del epicentro del sismo de magnitud 6.4 de San Fernando, California, ocurrido el 9 de febrero de 1971. Los acelerógrafos de movimiento fuerte instalados en el sótano y el techo del edificio registraron tres componentes de las aceleraciones (dos horizontales y una vertical). Las aceleraciones registradas en la dirección norte-sur, dadas en la figura 11.1.3, muestran que la aceleración máxima de 0.202g en el sótano se amplificó hasta 0.312 g en el techo. En la figura 11.1.4 se muestra que en la dirección este-oeste la aceleración máxima en el sótano y el techo fueron de 0.185g y 0.348g, respectivamente. Las aceleraciones en el techo representan el movimiento total del edificio, que se compone de los movimientos de la estructura respecto al terreno más el movimiento del terreno. El desplazamiento total en el techo del edificio y el desplazamiento del sótano se obtuvieron al integrar dos veces las aceleraciones registradas. Los componentes norte-sur y este-oeste del desplazamiento relativo del techo, determinados al restar el desplazamiento del terreno (sótano) del desplazamiento total en el techo, se presentan en la figura 11.1.5.

Se puede observar que las aceleraciones horizontales del techo del edificio son mayores y que su variación con el tiempo es diferente a la de las aceleraciones del terreno

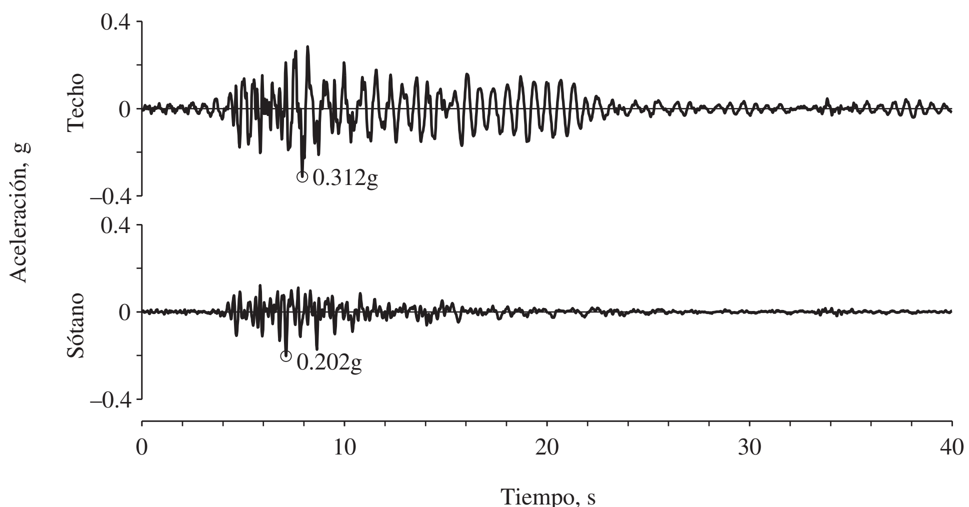


Figura 11.1.3 Aceleraciones en la dirección norte-sur registradas en la Biblioteca Millikan durante el sismo de San Fernando, California, en 1971.

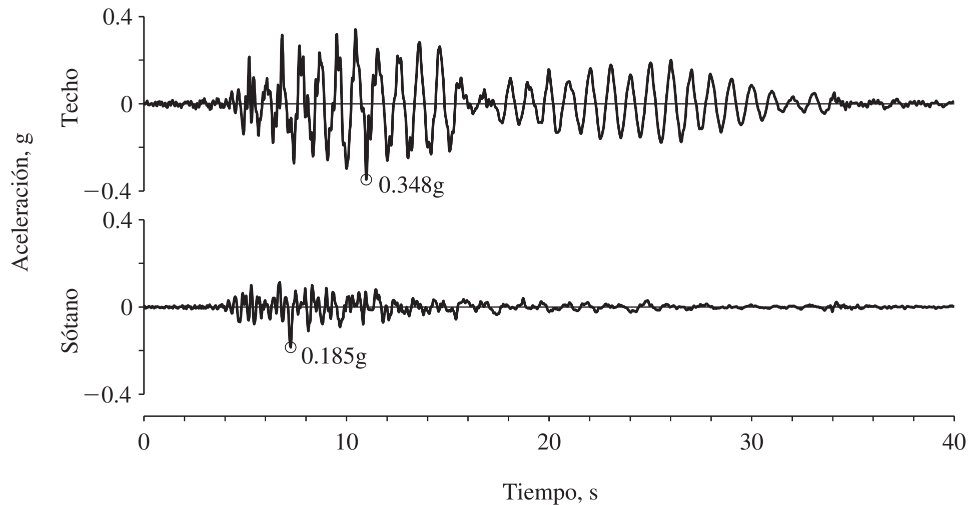


Figura 11.1.4 Aceleraciones en la dirección este-oeste registradas en la Biblioteca Millikan durante el sismo de San Fernando, California, en 1971.

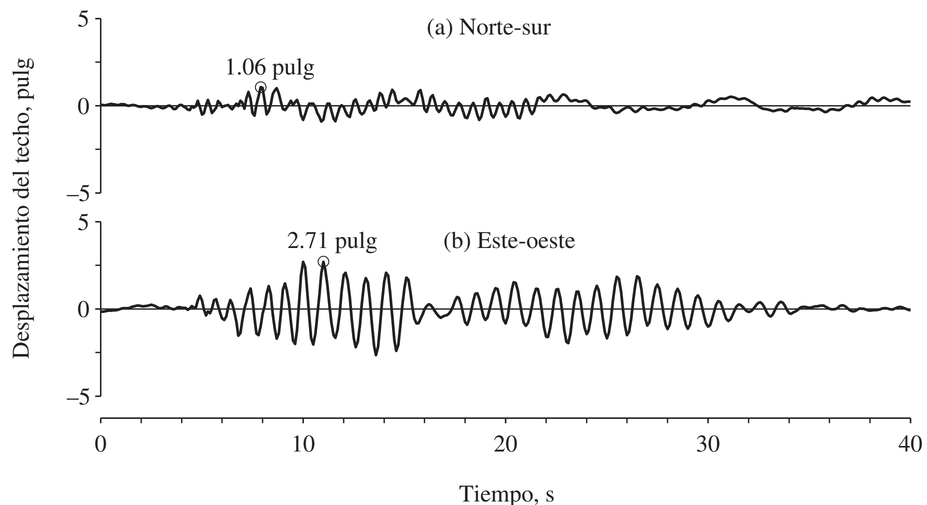


Figura 11.1.5 Desplazamiento relativo del techo en (a) la dirección norte-sur, (b) la dirección este-oeste. (Adaptado de Foutch, Housner y Jennings, 1975).

(sótano). Estas diferencias surgen porque el edificio es flexible, no rígido. En las gráficas de desplazamiento se observa que la amplitud de desplazamiento del techo con respecto al sótano fue de 1.06 pulg en la dirección norte-sur, y 2.71 pulg en la dirección este-oeste. El edificio vibró en la dirección norte-sur con un periodo del modo fundamental de aproximadamente seis décimas de segundo, mientras que en la dirección este-oeste dicho periodo fue de 1 s. Estos valores de periodos se estimaron como la duración de un ciclo de vibración en la figura 11.1.5. Es posible obtener valores más exactos para los primeros periodos naturales y las fracciones de amortiguamiento modal a partir de las aceleraciones registradas en el sótano y el techo usando procedimientos de identificación de sistemas (que no se presentan

en este libro). Los resultados de los primeros dos modos en las direcciones norte-sur y este-oeste se presentan en la tabla 11.1.1 para el edificio de la Biblioteca Millikan.

También se tienen registros de aceleración en el sótano y en el techo de este edificio para el sismo de Lytle Creek del 12 de septiembre de 1970. El sismo de Lytle Creek con magnitud de 5.4, cuyo epicentro se encuentra a 40 millas de la Biblioteca Millikan, produjo en el edificio una aceleración máxima del terreno de aproximadamente 0.02g y una aceleración en el techo de 0.05g, niveles bastante bajos para el movimiento sísmico medido. Un análisis de identificación de sistemas con estos registros llevó a los valores de los periodos naturales y las fracciones de amortiguamiento que se muestran en la tabla 11.1.1. Para las vibraciones de pequeña amplitud debidas al sismo de Lytle Creek, los periodos fundamentales de 0.52 y 0.71 s en la dirección norte-sur y este-oeste, respectivamente, fueron similares (sólo un poco más largos) a los determinados en las pruebas con el generador de vibraciones. De manera similar, las fracciones de amortiguamiento aumentaron un poco respecto a las pruebas con el generador de vibraciones.

Para los movimientos más grandes del edificio durante el sismo de San Fernando, los periodos naturales y las fracciones de amortiguamiento se incrementaron de manera significativa con respecto a los valores de las pruebas con el generador de vibraciones. El periodo fundamental en la dirección norte-sur aumentó de 0.51 a 0.62 s, y la fracción de amortiguamiento se incrementó considerablemente, hasta el 6.4%. En la dirección este-oeste el edificio vibró con un periodo fundamental de 0.98 s, que es un 50% mayor que el periodo de 0.66 s durante las pruebas con el generador de vibraciones; el amortiguamiento también aumentó mucho, hasta un 7.0%.

El incremento de los periodos naturales para las amplitudes más grandes del movimiento experimentado por el edificio durante el sismo de San Fernando implica una reducción en la rigidez de la estructura. La rigidez en la dirección este-oeste se redujo de manera considerable, aunque con excepción de la caída de estanterías y pequeñas grietas en el aplanado, el edificio no sufrió ningún daño observable. El daño aparente de la estructura debido al sismo es también la causa del aumento sustancial en el amortiguamiento. Tras el terremoto se produce una recuperación aparente de la rigidez estructural, como lo sugieren los periodos naturales medidos (no se presentan aquí) que son más cortos que en el sismo. El hecho de que la recuperación sea completa o parcial parece depender sólo de la intensidad con la que la estructura se excitó por el sismo. Todos éstos son indicadores de la complejidad del comportamiento de las estructuras reales durante los sismos. Este tema se retomará en el capítulo 13 (sección 13.6) después de haber presentado los procedimientos analíticos para calcular la respuesta de las estructuras elástico lineales a un movimiento del terreno especificado.

11.2 ESTIMACIÓN DE LAS FRACCIONES DE AMORTIGUAMIENTO MODAL

Por lo general, no es posible determinar las propiedades de amortiguamiento o los periodos naturales de vibración de una estructura si éstos se analizan en la forma en que se determinaron para la Biblioteca Millikan. Si va a evaluarse la seguridad sísmica de una estructura existente, lo ideal sería determinar de manera experimental las propiedades importantes de la estructura, incluyendo su amortiguamiento, pero esto se hace muy pocas veces por falta de presupuesto y tiempo. Para un edificio nuevo que se está diseñando es obvio que sus propiedades de amortiguamiento o de otro tipo no pueden medirse.

Por lo tanto, las fracciones de amortiguamiento modal de una estructura deben estimarse a partir de los datos medidos en estructuras similares. Aunque los investigadores han acumulado un volumen considerable de datos valiosos, éstos deben usarse con discreción, porque algunos de ellos *no* son directamente aplicables a los análisis y diseños sísmicos. Resulta claro, a partir de los datos de la Biblioteca Millikan, que las fracciones de amortiguamiento determinadas con base en las pruebas de vibración forzada de baja amplitud no deben utilizarse de manera directa para el análisis de la respuesta sísmica que causan movimientos más grandes en la estructura, por ejemplo, hasta llegar a la cedencia de los materiales estructurales. Las fracciones de amortiguamiento modal para tales análisis deberían basarse en los datos de los movimientos sísmicos registrados.

Los datos que son más útiles pero difíciles de conseguir provienen de las estructuras que han sido sometidas a movimientos del terreno en muchas ocasiones pero que no se han deformado en el intervalo inelástico. Las fracciones de amortiguamiento determinadas a partir de pequeñas deformaciones estructurales no son representativas de los amortiguamientos más grandes esperados a altos niveles de deformación estructurales. Por otra parte, los movimientos registrados en las estructuras que han experimentado una cedencia significativa durante un sismo proporcionarían fracciones de amortiguamiento que incluyen también la disipación de energía debida a la cedencia de los materiales estructurales. Estas fracciones de amortiguamiento no serían útiles en el análisis dinámico, porque la disipación de energía en la cedencia se explican por separado a través de las relaciones no lineales de fuerza-deformación (vea la sección 5.7).

Los datos útiles sobre el amortiguamiento tardan en acumularse debido a que existen muy pocas estructuras instaladas con acelerógrafos permanentes, listos para registrar los movimientos cuando se produce un sismo, y a que los sismos fuertes son poco frecuentes. La mayor parte de los registros de movimientos de las estructuras debidos a sismos en Estados Unidos son de edificios de varios niveles en California: más de 50 edificios en el área metropolitana de Los Ángeles durante el terremoto de San Fernando en 1971; más de 40 edificios en las áreas de la Bahía de Monterey y la Bahía de San Francisco durante el sismo de Loma Prieta en 1989; y más de 100 edificios en el área metropolitana de Los Ángeles durante el sismo de 1994 en Northridge. Por otra parte, sólo se han analizado los movimientos registrados de algunos de estos edificios para determinar sus periodos naturales y fracciones de amortiguamiento modal.

Lo ideal sería disponer de datos sobre el amortiguamiento determinados a partir de movimientos sísmicos registrados en muchas estructuras de diversos tipos (edificios, puentes, presas, etcétera) que utilicen diferentes materiales (acero, concreto reforzado, concreto preesforzado, mampostería, madera, etcétera). Tales datos servirían de base para estimar las fracciones de amortiguamiento para una estructura existente cuya seguridad sísmica deba evaluarse o para una nueva estructura que se esté diseñando. Hasta que se acumule una base de datos lo suficientemente grande, la selección de las fracciones de amortiguamiento se basa en los datos disponibles y en las opiniones de expertos. En la tabla 11.2.1 se proporcionan los valores recomendados de amortiguamiento para dos niveles de movimiento: los niveles de esfuerzo de servicio con amplitudes menores a la mitad del esfuerzo de cedencia, y los esfuerzos que están en el punto de cedencia, o justo por debajo de éste. Para cada nivel de esfuerzo se da un intervalo de valores de amortiguamiento; los valores superiores de amortiguamiento se utilizan para las estructuras normales y los valores más bajos se emplean para las estructuras especiales que deben diseñarse de manera más conservadora. Además de la tabla 11.2.1, los valores de amortiguamiento recomendados son del 3% para

TABLA 11.2.1 VALORES DE AMORTIGUAMIENTO RECOMENDADOS

Nivel de esfuerzo	Tipo y condición de la estructura	Fracción de amortiguamiento
Esfuerzo de trabajo, menor de aproximadamente la mitad del punto de cedencia	Acero con conexiones soldadas, concreto presforzado, concreto debidamente reforzado (sólo agrietamiento leve)	2-3
	Concreto reforzado con grietas considerables	3-5
	Acero con conexiones atornilladas o remachadas, estructuras de madera con uniones clavadas o atornilladas	5-7
En el punto de cedencia o justo debajo de éste	Acero con conexiones soldadas, concreto presforzado (sin pérdida completa en el presfuerzo)	5-7
	Concreto presforzado con pérdida total del presfuerzo	7-10
	Concreto reforzado	7-10
	Acero con conexiones atornilladas o remachadas, estructuras de madera con uniones atornilladas	
	Estructuras de madera con uniones clavadas	10-15
		15-20

Fuente: N. M. Newmark y W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982.

las estructuras de mampostería no reforzada y del 7% para las construcciones de mampostería reforzada. La mayoría de los códigos de construcción no reconocen la variación en el amortiguamiento respecto a los materiales estructurales y, por lo general, existe una fracción de amortiguamiento del 5% implícita en el espectro de diseño y en las fuerzas sísmicas especificadas en el código.

Las fracciones de amortiguamiento recomendadas pueden utilizarse directamente para el análisis elástico lineal de las estructuras con amortiguamiento clásico. Para tales sistemas las ecuaciones de movimiento se desacoplan al transformarlas a los modos naturales de vibración del sistema no amortiguado, y las fracciones de amortiguamiento modal estimadas se utilizan en forma directa en cada ecuación modal. Este concepto se presentó en la sección 10.10 y se seguirá desarrollando en los capítulos 12 y 13.

PARTE B: CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

11.3 MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

¿Cuándo se requiere la matriz de amortiguamiento? La matriz de amortiguamiento debe definirse por completo si el análisis modal clásico no es aplicable. Tal es el caso de las estructuras con amortiguamiento no clásico (vea los ejemplos de la sección 11.5), incluso si el interés se limita a su respuesta elástico lineal. El análisis modal clásico tampoco es aplicable al análisis de sistemas no lineales, aun cuando el amortiguamiento tenga una forma clásica. Uno de los problemas no lineales más importantes que interesan aquí es el cálculo de la respuesta de las estructuras más allá de su intervalo elástico lineal durante los sismos.

La matriz de amortiguamiento para estructuras prácticas no debe calcularse a partir de las dimensiones estructurales, de los tamaños de los elementos estructurales ni del amortiguamiento de los materiales estructurales utilizados. Podría pensarse que es posible determinar la matriz de amortiguamiento para la estructura a partir de las propiedades de amortiguamiento de los distintos elementos estructurales, tal como se determina la matriz de rigidez estructural. Sin embargo, la determinación de la matriz de amortiguamiento en esta forma no resulta práctica porque a diferencia del módulo de elasticidad, que entra en el cálculo de la rigidez, las propiedades de amortiguamiento de los materiales no están bien establecidas. Incluso si estas propiedades se conocieran, la matriz de amortiguamiento resultante no tomaría en cuenta una parte significativa de la energía disipada por la fricción entre las conexiones de acero, la apertura y cierre de microgrietas en el concreto, los esfuerzos en los elementos no estructurales (muros divisorios, equipo mecánico, elementos de protección contra incendio, etcétera), la fricción entre la propia estructura y los elementos no estructurales, y otros mecanismos similares, algunos de los cuales son incluso difíciles de identificar.

Así, la matriz de amortiguamiento para una estructura debe determinarse a partir de sus fracciones de amortiguamiento modal, que representan todos los mecanismos de disipación de energía. Como se analizó en la sección 11.2, las fracciones de amortiguamiento modal deben estimarse a partir de los datos disponibles sobre estructuras similares que han sufrido movimientos fuertes durante sismos pasados, pero que no se han deformado en el intervalo inelástico; a falta de estos datos se recomiendan los valores de la tabla 11.2.1.

11.4 MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO CLÁSICO

El amortiguamiento clásico es una idealización apropiada si los mecanismos de amortiguamiento que se distribuyen a lo largo de toda la estructura son similares (por ejemplo, un edificio de varios niveles con un sistema estructural y materiales estructurales semejantes en toda su altura). En esta sección se desarrollan dos procedimientos a fin de construir una matriz de amortiguamiento clásico para una estructura a partir de las fracciones de amortiguamiento modal, estimadas tal como se describe en la sección 11.2. Estos dos procedimientos se presentan en las siguientes subsecciones.

11.4.1 Amortiguamiento de Rayleigh

Considere primero un amortiguamiento proporcional a la masa y un amortiguamiento proporcional a la rigidez:

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = a_1\mathbf{k} \tag{11.4.1}$$

donde las constantes a_0 y a_1 tienen unidades de s^{-1} y s, respectivamente. Para estas dos matrices de amortiguamiento la matriz $\mathbf{C}$ de la ecuación (10.9.4) es diagonal en virtud de las propiedades de ortogonalidad modal de la ecuación (10.4.1); por lo tanto, se trata de matrices de amortiguamiento clásico. Físicamente, representan los modelos de amortiguamiento que se muestran en la figura 11.4.1 para un edificio de varios niveles. El amortiguamiento proporcional a la rigidez apela a la intuición, dado que puede interpretarse para modelar la disipación de energía derivada de las deformaciones de los entrepisos. En contraste, el amortiguamiento proporcional a la masa es difícil de justificar físicamente debido a que el amortiguamiento del aire que puede utilizarse en este modelo es demasiado pequeño para

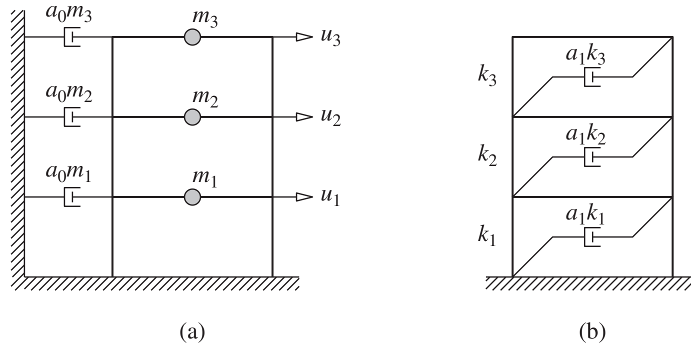


Figura 11.4.1 (a) Amortiguamiento proporcional a la masa; (b) amortiguamiento proporcional a la rigidez.

la mayoría de las estructuras. Más adelante se verá que, por sí solos, ninguno de los dos modelos de amortiguamiento es apropiado para su aplicación práctica.

A continuación se relacionan las fracciones de amortiguamiento modal para un sistema de amortiguamiento proporcional a la masa con el coeficiente a_0. El amortiguamiento generalizado para el n-ésimo modo, ecuación (10.9.10), es

$$C_n = a_0 M_n \tag{11.4.2}$$

y la fracción de amortiguamiento modal, ecuación (10.9.11), es

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} \tag{11.4.3}$$

La fracción de amortiguamiento es inversamente proporcional a la frecuencia natural (figura 11.4.2a). El coeficiente a_0 puede seleccionarse de manera que se obtenga un valor específico de la fracción de amortiguamiento en cualquier modo, por ejemplo ζ_i para el i-ésimo modo. Entonces la ecuación (11.4.3) da

$$a_0 = 2\zeta_i \omega_i \tag{11.4.4}$$

Al haber determinado a_0, la matriz de amortiguamiento **c** se conoce a partir de la ecuación (11.4.1a), y la fracción de amortiguamiento en cualquier otro modo, por ejemplo el n-ésimo modo, está dada por la ecuación (11.4.3).

De manera similar, las fracciones de amortiguamiento modal para un sistema con amortiguamiento proporcional a la rigidez pueden relacionarse con el coeficiente a_1. En este caso,

$$C_n = a_1 \omega_n^2 M_n \quad \text{y} \quad \zeta_n = \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{11.4.5}$$

en las que se utiliza la ecuación (10.2.4). La fracción de amortiguamiento se incrementa linealmente con la frecuencia natural (figura 11.4.2a). El coeficiente a_1 puede seleccionarse de manera que se obtenga un valor específico de la fracción de amortiguación en cualquier modo, por ejemplo ζ_j para el j-ésimo modo. Entonces, la ecuación (11.4.5b) da

$$a_1 = \frac{2\zeta_j}{\omega_j} \tag{11.4.6}$$

Al haber determinado a_1, la matriz de amortiguamiento **c** se conoce a partir de la ecuación (11.4.1b), y la fracción de amortiguamiento en cualquier otro modo está dada por la

ecuación (11.4.5b). Ninguna de las matrices de amortiguamiento definidas por la ecuación (11.4.1) es apropiada para el análisis práctico de los sistemas de varios grados de libertad. Las variaciones de las fracciones de amortiguamiento modal con las frecuencias naturales que representan (figura 11.4.2a) no son compatibles con los datos experimentales que indican aproximadamente las mismas fracciones de amortiguamiento para varios modos de vibración de una estructura.

Como un primer paso hacia la construcción de una matriz de amortiguamiento que sea en cierta medida consistente con los datos experimentales, se considera el *amortiguamiento de Rayleigh*:

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} + a_1\mathbf{k} \tag{11.4.7}$$

La fracción de amortiguamiento para el n-ésimo modo de tal sistema es

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n \tag{11.4.8}$$

Los coeficientes a_0 y a_1 pueden determinarse a partir de las fracciones de amortiguamiento especificadas ζ_i y ζ_j para los modos i-ésimo y j-ésimo, respectivamente. Si la ecuación (11.4.8) para estos dos modos se expresa en forma matricial, resulta

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \tag{11.4.9}$$

Estas dos ecuaciones algebraicas pueden resolverse para determinar los coeficientes a_0 y a_1. Si se supone que ambos modos tienen la misma fracción de amortiguamiento ζ, lo cual es razonable con base en los datos experimentales, entonces

$$a_0 = \zeta\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \qquad a_1 = \zeta\frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{11.4.10}$$

Ahora, la matriz de amortiguamiento se conoce a partir de la ecuación (11.4.7) y la fracción de amortiguamiento para cualquier otro modo, dada por la ecuación (11.4.8), varía con la frecuencia natural, como se muestra en la figura 11.4.2b.

Al aplicar este procedimiento a un problema práctico, los modos i y j con las fracciones de amortiguamiento especificadas deben elegirse de manera que garanticen valores

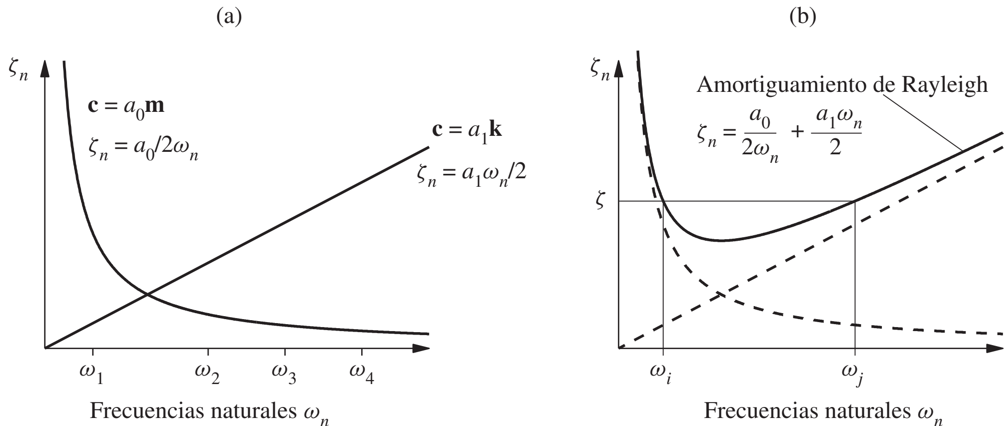


Figura 11.4.2 Variación de las fracciones de amortiguamiento modal con la frecuencia natural: (a) amortiguamientos proporcionales a la masa y a la rigidez; (b) amortiguamiento de Rayleigh.

razonables para las fracciones de amortiguamiento en todos los modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta. Por ejemplo, considere que se incluirán cinco modos en el análisis de la respuesta y que para todos ellos se desea aproximadamente la misma fracción de amortiguamiento ζ. Esta ζ debe especificarse para el primer modo y, quizá, para el cuarto. Entonces, la figura 11.4.2b sugiere que la fracción de amortiguamiento para los modos segundo y tercero será algo menor que ζ y para el quinto modo será algo mayor que ζ. La fracción de amortiguamiento de los modos superiores al quinto aumentarán monotónicamente con la frecuencia y las respuestas modales correspondientes se eliminarán, en esencia, debido a sus grandes amortiguamientos.

Ejemplo 11.1

En la figura E11.1 se proporcionan las propiedades de un edificio de cortante de tres pisos. Éstas incluyen los pesos de los niveles, las rigideces por entrepiso, y las frecuencias y modos naturales. Deduzca una matriz de amortiguamiento de Rayleigh de tal manera que la fracción de amortiguamiento sea del 5% para los modos primero y segundo. Calcule la fracción de amortiguamiento para el tercer modo.

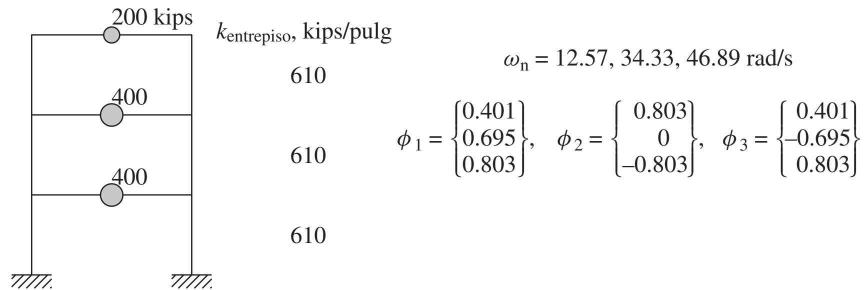


Figura E11.1

Solución

1. *Establezca las matrices de masa y rigidez.*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{386}\begin{bmatrix} 400 & & \\ & 400 & \\ & & 200 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = 610\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{a}$$

2. *Determine* a_0 y a_1 *a partir de la ecuación (11.4.9).*

$$\begin{bmatrix} 1/12.57 & 12.57 \\ 1/34.33 & 34.33 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

Estas ecuaciones algebraicas tienen la siguiente solución:

$$a_0 = 0.9198 \qquad a_1 = 0.0021 \tag{c}$$

3. *Evalúe la matriz de amortiguamiento.*

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} + a_1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3.55 & -1.30 & 0 \\ & 3.55 & -1.30 \\ \text{(sim)} & & 1.78 \end{bmatrix} \tag{d}$$

4. *Calcule* ζ_3 *a partir de la ecuación (11.4.8).*

$$\zeta_3 = \frac{0.9198}{2(46.89)} + \frac{0.0021(46.89)}{2} = 0.0593 \tag{e}$$

11.4.2 Amortiguamiento de Caughey

Si se desean especificar valores para las fracciones de amortiguamiento en más de dos modos, debe tenerse en cuenta la forma general de una matriz de amortiguamiento clásico (vea la deducción 11.1), conocida como el *amortiguamiento de Caughey*:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{l=0}^{N-1} a_l [\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}]^l \tag{11.4.11}$$

donde N es el número de grados de libertad en el sistema y a_l son constantes. Los tres primeros términos de la serie son

$$a_0\mathbf{m}(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k})^0 = a_0\mathbf{m} \qquad a_1\mathbf{m}(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k})^1 = a_1\mathbf{k} \qquad a_2\mathbf{m}(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k})^2 = a_2\mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \tag{11.4.12}$$

Así, la ecuación (11.4.11) con sólo los dos primeros términos es igual al amortiguamiento de Rayleigh. Suponga que se desean especificar las relaciones de amortiguamiento para los J modos de un sistema de N grados de libertad. Entonces, es necesario incluir J términos en la serie Caughey; éstos podrían ser cualesquiera J de los N términos de la ecuación (11.4.11). Si se incluyen los primeros J términos,

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{l=0}^{J-1} a_l [\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}]^l \tag{11.4.13}$$

y la fracción de amortiguamiento modal ζ_n está dada por (vea la deducción 11.2)

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{J-1} a_l \omega_n^{2l-1} \tag{11.4.14}$$

Los coeficientes a_l pueden determinarse a partir de las fracciones de amortiguamiento especificadas en cualesquiera J modos, por ejemplo los J primeros modos, al resolver las J ecuaciones algebraicas (11.4.14) para las incógnitas a_l, $l = 0$ a $J - 1$. Al haber determinado los a_l, la matriz de amortiguamiento $\mathbf{c}$ se conoce a partir de la ecuación (11.4.13) y las fracciones de amortiguamiento para los modos $n = J + 1, J + 2, ..., N$ están dadas por la ecuación (11.4.14). Es recomendable que estas fracciones de amortiguamiento se calculen de manera que garanticen valores razonables.

Con el propósito de demostrar que es importante seguir la recomendación anterior, se presentan los resultados de una estructura de ejemplo para la cual se especificó la misma fracción de amortiguamiento $\zeta = 5\%$ en los primeros cuatro modos, los cuatro primeros términos se incluyeron en la ecuación (11.4.11) y los valores de a_l se determinaron como se describió anteriormente para después sustituirlos en la ecuación (11.4.14), a fin de determinar la fracción de amortiguamiento en función de la frecuencia. Estos resultados, graficados en la figura 11.4.3, demuestran que la fracción de amortiguamiento se mantiene cerca (ligeramente por encima o por debajo) del valor deseado ζ en el intervalo de frecuencias de ω_1 a ω_4, siendo igual a ζ en las primeras cuatro frecuencias naturales, pero que aumenta monotónicamente con las frecuencias mayores a ω_4. Como resultado, las contribuciones a la respuesta de los modos más altos se subestimarán hasta un punto que en esencia resultarán excluidas. Por otro lado, cuando la fracción de amortiguamiento ζ se especifica sólo para los tres primeros modos, el mismo procedimiento conduce a una fracción razón de amortiguamiento que está cerca del valor deseado en el intervalo de frecuencia de ω_1 a ω_3, pero

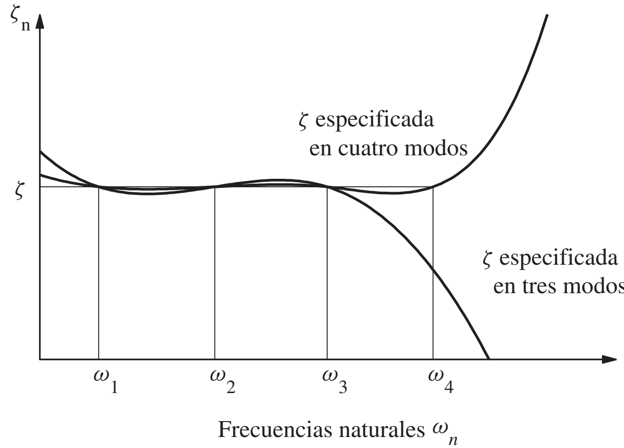


Figura 11.4.3

disminuye monotónicamente para los modos superiores al tercer modo, tomando al final valores negativos. Éstos son, por supuesto, poco realistas porque implican vibraciones libres que crecen en vez de decaer con el tiempo. En conclusión, el amortiguamiento de Caughey debería definirse de tal manera que se logren fracciones de amortiguamiento modal cercanas al valor deseado en todos los modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta, y ninguno de los valores ζ_n debe ser negativo.

Aunque la matriz general de amortiguamiento clásico dada por la ecuación (11.4.13) hace posible especificar las fracciones de amortiguamiento en cualquier número de modos, hay dos problemas asociados con su uso. En primer lugar, las ecuaciones algebraicas (11.4.14) están numéricamente mal condicionadas porque los coeficientes ω_n^{-1}, ω_n, ω_n^3, ω_n^5,... pueden variar en órdenes de magnitud. En segundo lugar, si se incluyen más de dos términos en la serie de Caughey, **c** es una matriz completa, aunque **k** sea una matriz en banda, y para un sistema de masas concentradas, **m** sea una matriz diagonal. Dado que el esfuerzo computacional para analizar grandes sistemas aumenta de manera considerable si la matriz de amortiguamiento no es concentrada, en los análisis prácticos suele suponerse un amortiguamiento de Rayleigh.

Ejemplo 11.2

Considere el sistema de la figura E11.1 y evalúe su matriz de amortiguamiento clásico si la fracción de amortiguamiento es del 5% para los tres modos.

Solución

1. *La serie de Caughey para un sistema de 3 grados de libertad es*:

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} + a_1\mathbf{k} + a_2\mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} \tag{a}$$

2. *Determine a_0, a_1 y a_2 a partir de la ecuación (11.4.14)*:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2}\omega_n + \frac{a_2}{2}\omega_n^3 \qquad n = 1, 2, 3 \tag{b}$$

o

$$\begin{bmatrix} 1/12.57 & 12.57 & (12.57)^3 \\ 1/34.33 & 34.33 & (34.33)^3 \\ 1/46.89 & 46.89 & (46.89)^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Estas ecuaciones algebraicas tienen la siguiente solución:

$$a_0 = 0.8377 \qquad a_1 = 0.0027 \qquad a_2 = -4.416 \times 10^{-7} \tag{d}$$

3. *Evalúe* **c**. Si se sustituyen a_0, a_1 y a_2 de la ecuación (d) en la ecuación (a), resulta

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3.40 & -1.03 & -0.159 \\ & 3.08 & -1.03 \\ (\text{sim}) & & 1.62 \end{bmatrix} \tag{e}$$

Deducción 11.1

Las frecuencias ω_r y los modos ϕ_r naturales deben satisfacer

$$\mathbf{k}\phi_r = \omega_r^2 \mathbf{m}\phi_r \tag{a}$$

Si se premultiplican ambos lados por $\phi_n^T \mathbf{km}^{-1}$, resulta

$$\phi_n^T \left[\mathbf{km}^{-1}\mathbf{k}\right] \phi_r = \omega_r^2 \phi_n^T \mathbf{k}\phi_r = 0 \qquad n \neq r \tag{b}$$

donde la segunda igualdad proviene de la ecuación de ortogonalidad (10.4.1a). Al premultiplicar ambos lados de la ecuación (a) por $\phi_n^T (\mathbf{km}^{-1})^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_n^T \left[(\mathbf{km}^{-1})^2\mathbf{k}\right] \phi_r &= \omega_r^2 \phi_n^T \left[\mathbf{km}^{-1}\mathbf{km}^{-1}\mathbf{m}\right] \phi_r \\ &= \omega_r^2 \phi_n^T \left[\mathbf{km}^{-1}\mathbf{k}\right] \phi_r = 0 \qquad n \neq r \end{aligned} \tag{c}$$

donde la segunda igualdad proviene de la ecuación (b). Mediante una aplicación repetida de este procedimiento, es posible conseguir una familia de relaciones de ortogonalidad, que puede expresarse en forma compacta:

$$\phi_n^T \mathbf{c}_l \phi_r = 0 \qquad n \neq r \tag{d}$$

donde

$$\mathbf{c}_l = \left[\mathbf{km}^{-1}\right]^l \mathbf{k} \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty \tag{e}$$

Las matrices $\mathbf{c}_l$ pueden escribirse en una forma alternativa si la ecuación (e) se premultiplica por la matriz identidad, $\mathbf{I} = \mathbf{mm}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_l &= \mathbf{mm}^{-1}\mathbf{km}^{-1}\mathbf{km}^{-1} \cdots \mathbf{km}^{-1}\mathbf{k} \\ &= \mathbf{m}\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^l \qquad l = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{aligned} \tag{f}$$

Al premultiplicar la ecuación (a) por $\phi_n^T \mathbf{mk}^{-1}$ y seguir el procedimiento anterior, puede demostrarse que la ecuación (d) se satisface mediante otra secuencia infinita de matrices:

$$\mathbf{c}_l = \mathbf{m}\left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^l \qquad l = -1, -2, -3, \ldots, -\infty \tag{g}$$

Si se combinan las ecuaciones (f) y (g), resulta

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \left[\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\right]^l \tag{h}$$

Es posible demostrar que sólo N términos de esta serie infinita son independientes, lo que conduce a la ecuación (11.4.11) como la forma general de las matrices de amortiguamiento clásico.

Deducción 11.2

Para el n-ésimo modo el amortiguamiento generalizado es

$$C_n = \phi_n^T \mathbf{c}\phi_n = \sum_{l=0}^{N-1} \phi_n^T \mathbf{c}_l \phi_n \tag{a}$$

donde $\mathbf{c}_l$ está dada por la ecuación (f) de la deducción 11.1 y los diferentes términos en esta serie son

$$l = 0: \quad \phi_n^T \mathbf{c}_o \phi_n = \phi_n^T (a_0 \mathbf{m}) \phi_n = a_o M_n$$

$$l = 1: \quad \phi_n^T \mathbf{c}_1 \phi_n = \phi_n^T (a_1 \mathbf{k}) \phi_n = a_1 \omega_n^2 M_n$$

$$l = 2: \quad \phi_n^T \mathbf{c}_2 \phi_n = \phi_n^T (a_2 \mathbf{k}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}) \phi_n = a_2 \omega_n^2 \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n = a_2 \omega_n^4 M_n$$

en las que se utiliza la ecuación (10.2.4). Así, la ecuación (a) se convierte en

$$C_n = \sum_{l=0}^{N-1} a_l \omega_n^{2l} M_n \tag{b}$$

La fracción de amortiguamiento para el n-ésimo modo, ecuación (10.9.11), está dada por

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} a_l \omega_n^{2l-1} \tag{c}$$

que es similar a la ecuación (11.4.14).

11.4.3 Superposición de las matrices de amortiguamiento modal

Un procedimiento alternativo para determinar una matriz de amortiguamiento clásico a partir de las fracciones de amortiguamiento modal puede deducirse iniciando con la ecuación (10.9.4):

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi} = \mathbf{C} \tag{11.4.15}$$

donde $\mathbf{C}$ es una matriz diagonal con el n-ésimo elemento diagonal igual al amortiguamiento modal generalizado:

$$C_n = \zeta_n (2 M_n \omega_n) \tag{11.4.16}$$

Con ζ_n estimada de la manera descrita en la sección 11.2, $\mathbf{C}$ se conoce a partir de la ecuación (11.4.16) y la ecuación (11.4.15) puede reescribirse como

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}^{-1} \tag{11.4.17}$$

El uso de esta ecuación para calcular $\mathbf{c}$ puede lucir como un procedimiento ineficiente, puesto que parece requerir la inversión de dos matrices de orden N, el número de grados de libertad. Sin embargo, la inversa de la matriz modal $\mathbf{\Phi}$ y de $\mathbf{\Phi}^T$ puede determinarse con pocos cálculos debido a la propiedad de ortogonalidad de los modos.

Si se inicia con la relación de ortogonalidad de la ecuación (10.4.5b),

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi} = \mathbf{M} \tag{11.4.18}$$

es posible demostrar que

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \qquad \left(\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} = \mathbf{m} \mathbf{\Phi} \mathbf{M}^{-1} \tag{11.4.19}$$

Como $\mathbf{M}$ es una matriz diagonal de masas modales generalizadas M_n, $\mathbf{M}^{-1}$ se conoce de inmediato como una matriz diagonal con elementos $= 1/M_n$. Así, $\mathbf{\Phi}^{-1}$ y $(\mathbf{\Phi}^T)^{-1}$ puede calcularse de manera eficaz a partir de la ecuación (11.4.19).

Si se sustituye la ecuación (11.4.19) en la ecuación (11.4.17), resulta

$$\mathbf{c} = (\mathbf{m}\mathbf{\Phi}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{m}) \tag{11.4.20}$$

Como **M** y **C** son matrices diagonales, definidas por las ecuaciones (11.4.18) y (11.4.15), respectivamente, la ecuación (11.4.20) puede expresarse como

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{2\zeta_n\omega_n}{M_n}\phi_n\phi_n^T\right)\mathbf{m} \tag{11.4.21}$$

El n-ésimo término en esta sumatoria es la contribución del n-ésimo modo con su fracción de amortiguamiento ζ_n a la matriz de amortiguamiento **c**; si este término no está incluido, la **c** resultante implica una fracción de amortiguamiento igual a cero en el n-ésimo modo. Es razonable incluir en la ecuación (11.4.21) sólo los J primeros modos, de los cuales se espera una contribución significativa a la respuesta. La ausencia de amortiguamiento en los modos del $J + 1$ al N no crea problemas numéricos si se usa un procedimiento paso a paso que sea incondicionalmente estable para integrar las ecuaciones de movimiento; vea el capítulo 15.

Ejemplo 11.3

Determine una matriz de amortiguamiento para el sistema de la figura E11.1 mediante la superposición de las matrices de amortiguamiento para los dos primeros modos, cada uno con $\zeta_n = 5\%$.

Solución

1. *Determine los términos individuales de la ecuación (11.4.21).*

$$\mathbf{c}_1 = \frac{2(0.05)(12.57)}{1.0}\mathbf{m}\phi_1\phi_1^T\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.217 & 0.376 & 0.217 \\ & 0.651 & 0.376 \\ (\text{sim}) & & 0.217 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_2 = \frac{2(0.05)(34.33)}{1.0}\mathbf{m}\phi_2\phi_2^T\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2.37 & 0 & -1.19 \\ & 0 & 0 \\ (\text{sim}) & & 0.593 \end{bmatrix}$$

2. *Determine* **c**.

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2.59 & 0.376 & -0.969 \\ & 0.651 & 0.376 \\ (\text{sim}) & & 0.810 \end{bmatrix}$$

Recuerde que esta **c** implica una fracción de amortiguamiento cero para el tercer modo.

Ejemplo 11.4

Determine la matriz de amortiguamiento del sistema de la figura E11.1 mediante la superposición de las matrices de amortiguamiento para los tres modos, cada uno con $\zeta_n = 5\%$.

Solución

1. *Determine los términos individuales de la ecuación (11.4.21).* Los dos primeros términos, $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$, ya se calcularon en el ejemplo 11.3 y

$$\mathbf{c}_3 = \frac{2(0.05)(46.89)}{1.0}\mathbf{m}\phi_3\phi_3^T\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.809 & -1.40 & 0.810 \\ & 2.43 & -1.40 \\ (\text{sim}) & & 0.811 \end{bmatrix}$$

2. *Determine* **c**.

$$\mathbf{c} = \sum_{n=1}^{3}\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} 3.40 & -1.03 & -0.159 \\ & 3.08 & -1.03 \\ (\text{sim}) & & 1.62 \end{bmatrix}$$

Observe que esta **c** es igual a la del ejemplo 11.2, porque $\zeta_n = 5\%$ para los tres modos en ambos ejemplos.

11.5 MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO NO CLÁSICO

El supuesto del amortiguamiento clásico no es apropiado si el sistema a analizar se compone de dos o más partes con niveles muy diferentes de amortiguamiento. Un ejemplo es un sistema suelo-estructura. Aunque el suelo subyacente puede suponerse rígido en el análisis de muchas estructuras, en caso de que éstas tengan periodos naturales muy cortos, como la estructura de una planta nuclear de la figura 1.10.1, es necesario tener en cuenta la interacción suelo-estructura. La fracción de amortiguamiento modal para el sistema del suelo suele ser muy diferente de la fracción de la estructura; por ejemplo, entre 15 y 20% para la región del suelo y de 3 a 5% para la estructura. Por lo tanto, el supuesto del amortiguamiento clásico no resultaría apropiado para el sistema combinado de suelo-estructura, aunque podría ser razonable para las regiones de la estructura y el suelo por separado. Otro ejemplo es una presa de concreto que retiene agua (figura 1.10.2). El amortiguamiento del agua es insignificante en relación con el amortiguamiento de la presa, y el amortiguamiento clásico no es un modelo apropiado para el sistema presa-agua. Aunque los métodos de subestructuración (que no se desarrollan en este libro) son muy efectivos para analizar los sistemas suelo-estructura y fluido-estructura, estos sistemas también se analizan mediante métodos estándar, los cuales requieren la matriz de amortiguamiento para el sistema completo.

La matriz de amortiguamiento para el sistema completo se construye directamente al ensamblar las matrices de amortiguamiento para los dos subsistemas (estructura y suelo en el primer caso, presa y agua en el segundo). Como se muestra en la figura 11.5.1, las matrices de rigidez y masa del sistema combinado suelo-estructura se ensamblan a partir de las matrices correspondientes para los dos subsistemas. La parte de estas matrices asociada con los grados de libertad comunes en la interfaz (I) entre los dos subsistemas incluye las contribuciones de ambos subsistemas. Entonces, todo lo que queda por describir es el pro-

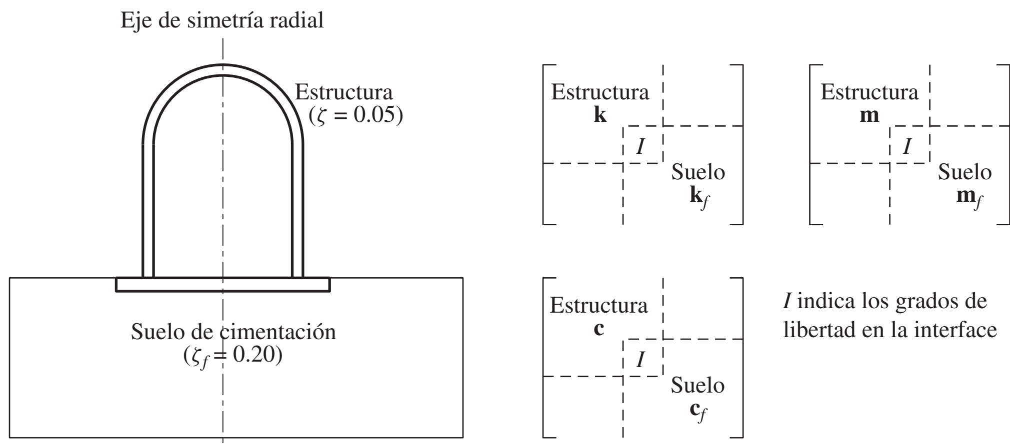


Figura 11.5.1 Ensamble de las matrices de los subsistemas.

cedimiento para construir matrices de amortiguamiento para los subsistemas individuales, que se suponen clásicamente amortiguados.

En principio, estas matrices de amortiguamiento de los subsistemas podrían construirse mediante cualquiera de los procedimientos desarrollados en la sección 11.4, pero el amortiguamiento de Rayleigh es quizás el más conveniente para los análisis prácticos. Así, las matrices de amortiguamiento para la estructura y el suelo de cimentación (indicado por el subíndice f) son

$$\mathbf{c} = a_0\mathbf{m} + a_1\mathbf{k} \qquad \mathbf{c}_f = a_{0f}\mathbf{m}_f + a_{1f}\mathbf{k}_f \tag{11.5.1}$$

Los coeficientes a_0 y a_1 están dados por la ecuación (11.4.10) usando una fracción de amortiguamiento apropiada para la estructura, por ejemplo $\zeta = 0.05$, donde ω_i y ω_j se seleccionan como las frecuencias de los modos naturales de vibración i-ésimo y j-ésimo del sistema combinado sin amortiguamiento. Los coeficientes a_{0f} y a_{1f} se determinan de manera similar; deberían ser cuatro veces mayores si la fracción de amortiguamiento para la región del suelo de cimentación se estima como $\zeta_f = 0.20$.

El supuesto del amortiguamiento clásico puede no ser apropiado, ya sea en estructuras con dispositivos especiales para la disipación de energía (sección 7.10) o en sistemas con aislamiento en la base, incluso si la propia estructura tiene amortiguamiento clásico. La matriz de amortiguamiento no clásico para el sistema se construye evaluando la primera matriz **c** de amortiguamiento clásico para la estructura por sí sola (sin los dispositivos especiales), a partir de las fracciones de amortiguamiento adecuadas para la estructura y utilizando l os procedimientos de la sección 11.4. Después, las contribuciones de amortiguamiento de los dispositivos para la disipación de energía se ensamblan en **c** a fin de obtener la matriz de amortiguamiento para el sistema completo.

LECTURAS ADICIONALES

Caughey, T. K., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *Journal of Applied Mechanics*, *ASME*, **27**, 1960, pp . 269-271.

Caughey, T. K. y O'Kelly, M. E. J., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *Journal of Applied Mechanics*, *ASME*, **32**, 1965, pp. 583-588.

Foutch, D. A., Housner, G. W. y Jennings, P. C., "Dynamic Responses of Six Multistory Buildings during the San Fernando Earthquake", *informe No. EERL 75-02*, California Institute of Technology, Pasadena, California, octubre de 1975.

Hart, G. C. y Vasudevan, R., "Earthquake Design of Buildings: Damping", *Journal of the Structural Division*, *ASCE*, **101**, 1975, pp. 11-30.

Hashimoto, P. S., Steele, L. K., Johnson, J. J. y Mensing, R. W., "Review of Structure Damping Values for Elastic Seismic Analysis of Nuclear Power Plants", *informe No. NUREG/CR-6011*, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C., marzo de 1993.

Jennings, P. C. y Kuroiwa, J. H., "Vibration and Soil-Structure Interaction Tests of a Nine-Story Reinforced Concrete Building", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 1968, pp. 891-916.

McVerry, G. H., "Frequency Domain Identification of Structural Models from Earthquake Records", *informe No. EERL 79-02*, California Institute of Technology, Pasadena, California, octubre de 1979.

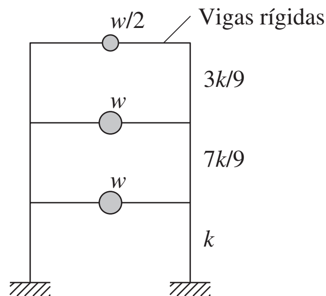
Newmark, N. M. y Hall, W. J., *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982, pp. 53-54.

Rayleigh, Lord, *Theory of Sound*, vol. 1, Dover Publications, Nueva York, 1945; publicado originalmente en 1896.

Wilson, E. L. y Penzien, J., "Evaluation of Orthogonal Damping Matrices", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**, 1972, pp. 5-10.

PROBLEMAS

11.1 En la figura P11.1 se proporcionan las propiedades de un edificio de cortante de tres niveles. Éstas incluyen los pesos de los niveles, las rigideces por entrepiso, y las frecuencias y los modos naturales de vibración. Deduzca una matriz de amortiguamiento de Rayleigh de tal modo que la fracción de amortiguamiento sea del 5% para los modos primero y tercero. Calcule la fracción de amortiguamiento para el segundo modo.



$w = 100$ kips $\quad k = 168$ kips/pulg

$\omega_n = 12.01, 25.47, 38.90$ rad/s

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.6375 \\ 1.2750 \\ 1.9125 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 0.9827 \\ 0.9829 \\ -1.9642 \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.5778 \\ -1.1270 \\ 0.4508 \end{Bmatrix}$$

Figura P11.1

11.2 Para el sistema de la figura P11.1 utilice la serie de Caughey a fin de determinar la matriz de amortiguamiento clásico si la fracción de amortiguamiento es del 5% para los tres modos.

11.3 Determine una matriz de amortiguamiento para el sistema de la figura P11.1 mediante la superposición de las matrices de amortiguamiento de los modos primero y tercero, cada uno con $\zeta_n = 5\%$. Compruebe que la matriz de amortiguamiento resultante no da ningún amortiguamiento en el segundo modo.

11.4 Determine la matriz de amortiguamiento clásico para el sistema de la figura P11.1 mediante la superposición de las matrices de amortiguamiento para los tres modos, cada uno con $\zeta_n = 5\%$.

12

Análisis dinámico y respuesta de los sistemas lineales

AVANCE

Ahora que se han desarrollado procedimientos para formular las ecuaciones de movimiento para los sistemas de VGDL sometidos a fuerzas dinámicas (capítulos 9 y 11), es posible presentar la solución a estas ecuaciones. En la parte A de este capítulo se demuestra que las ecuaciones de un sistema de dos grados de libertad sin amortiguamiento y sometido a fuerzas armónicas pueden resolverse en forma analítica. Después, estos resultados se utilizan para explicar la forma en que funciona un amortiguador de masa resonante para disminuir o eliminar las vibraciones no deseadas. Esta solución simultánea de las ecuaciones acopladas de movimiento en general no es factible, por lo que en la parte B se desarrolla el procedimiento clásico del análisis modal. Las ecuaciones de movimiento se transforman a coordenadas modales, lo que conduce a un conjunto acoplado de ecuaciones modales; cada una de ellas se resuelve para determinar las contribuciones modales a la respuesta, y estas respuestas modales se combinan para obtener la respuesta total. En la parte C se desarrolla una explicación de las contribuciones de respuesta relativa de los distintos modos, con el objetivo de determinar el número de modos que debe incluirse en el análisis dinámico. El capítulo termina con la parte D, que incluye dos procedimientos de análisis útiles en situaciones especiales: el método de corrección estática y el método de aceleración modal.

PARTE A: SISTEMAS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

12.1 ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE DOS GRADOS DE LIBERTAD SIN AMORTIGUAMIENTO

Considere los sistemas de dos grados de libertad mostrados en la figura 12.1.1, excitados mediante una fuerza armónica $p_1(t) = p_o$ sen ωt que se aplica a la masa m_1. Para ambos sistemas las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \text{sen } \omega t \qquad (12.1.1)$$

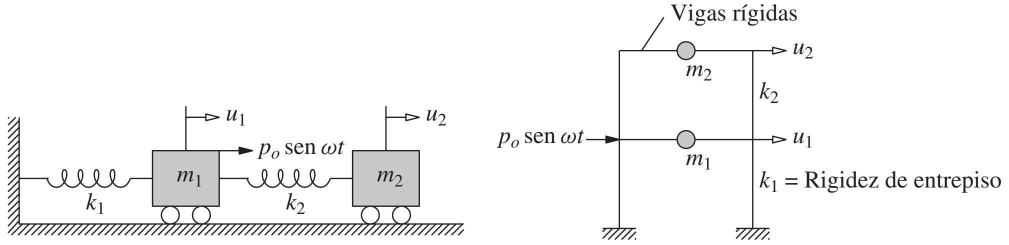


Figura 12.1.1 Sistemas de dos grados de libertad.

Observe que las ecuaciones están acopladas a través de la matriz de rigidez. Una ecuación no puede resolverse en forma independiente de la otra; es decir, ambas ecuaciones deben resolverse a la vez. Debido a que el sistema está amortiguado, la solución de estado estacionario puede suponerse como

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} \text{sen}\,\omega t$$

Si se sustituye esto en la ecuación (12.1.1), resulta

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.1.2}$$

o

$$\left[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}\right] \begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Al multiplicar antes por $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}$ se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}\right]^{-1} \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]}\,\text{adj}\,[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}] \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.1.3}$$

donde det[·] y adj[·] indican el determinante y la adjunta de la matriz [·], respectivamente. La ecuación de frecuencia (ecuación 10.2.6)

$$\det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}] = 0$$

puede resolverse para las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 del sistema. En términos de estas frecuencias, el determinante se expresa como

$$\det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}] = m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \tag{12.1.4}$$

Por lo tanto, la ecuación (12.1.3) se convierte en

$$\begin{Bmatrix} u_{1o} \\ u_{2o} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_o \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.1.5}$$

o

$$u_{1o} = \frac{p_o(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \qquad u_{2o} = \frac{p_o k_2}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{12.1.6}$$

Ejemplo 12.1

Grafique la curva de frecuencia-respuesta para el sistema que se muestra en la figura 12.1.1 con $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$ y $k_2 = k$, sometido a una fuerza armónica p_o que se aplica en la masa m_1.

Solución Si se sustituyen los valores dados de la masa y la rigidez en la ecuación (12.1.6), resulta

$$u_{1o} = \frac{p_o(k - m\omega^2)}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \qquad u_{2o} = \frac{p_o k}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{a}$$

donde $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ y $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$; estas frecuencias naturales se obtuvieron en el ejemplo 10.4. Con los parámetros dados del sistema, la ecuación (a) proporciona soluciones para las amplitudes de respuesta u_{1o} y u_{2o}. Resulta instructivo volver a escribirlos como

$$\frac{u_{1o}}{(u_{1\text{st}})_o} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\omega/\omega_1)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_1)^2\right]\left[1 - (\omega/\omega_2)^2\right]} \qquad \frac{u_{2o}}{(u_{2\text{st}})_o} = \frac{1}{\left[1 - (\omega/\omega_1)^2\right]\left[1 - (\omega/\omega_2)^2\right]} \tag{b}$$

En estas ecuaciones las amplitudes de respuesta se han dividido en $(u_{1\text{st}})_o = p_o/2k$ y $(u_{2\text{st}})_o = p_o/2k$, los valores máximos de los *desplazamientos estáticos* (un concepto introducido en la sección 3.1), para obtener respuestas normalizadas o no dimensionales que dependen de las relaciones de frecuencia ω/ω_1 y ω/ω_2, y no por separado de ω, ω_1 y ω_2.

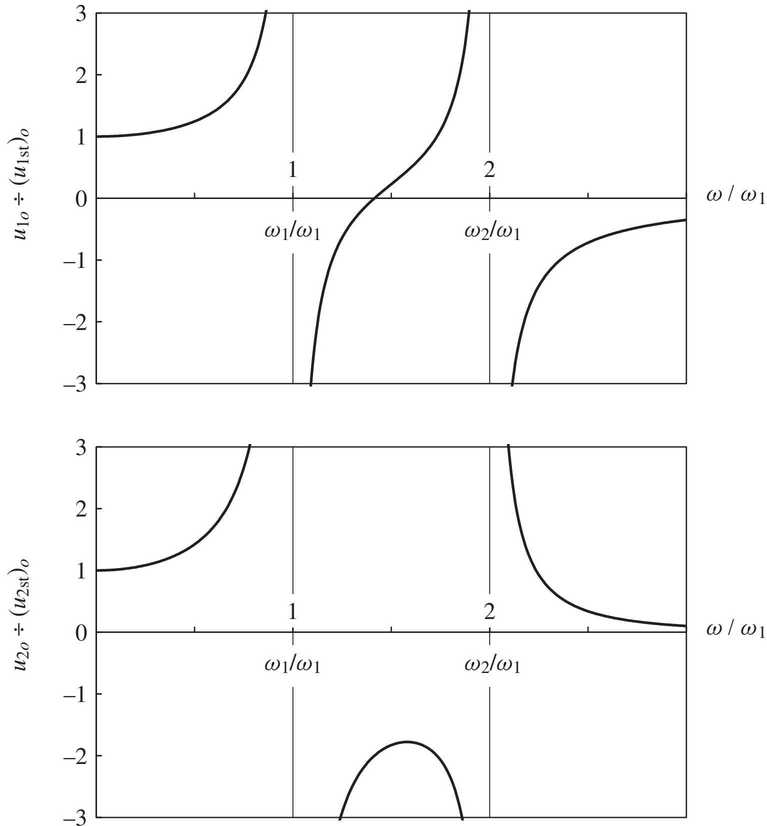


Figura E12.1

En la figura E12.1 se muestran las amplitudes u_{1o} y u_{2o} de la respuesta normalizada, graficadas contra la relación de frecuencia ω/ω_1. Estas curvas de frecuencia-respuesta indican dos condiciones de resonancia en $\omega = \omega_1$ y $\omega = \omega_2$; en estas frecuencias de excitación la respuesta en estado estacionario es ilimitada. En otras frecuencias de excitación la vibración es finita y puede calcularse a partir de la ecuación (b). Observe que existe una frecuencia de excitación en la que la vibración de la primera masa, donde se aplica la fuerza de excitación, se reduce a cero. Ésta es toda la base del amortiguador de masa resonante que se analiza a continuación.

12.2 AMORTIGUADOR DE MASA RESONANTE

El amortiguador de masa resonante es un dispositivo mecánico que se utiliza para reducir o eliminar la vibración no deseada. La descripción *amortiguador de masa sintonizado* se usa a menudo en las instalaciones modernas; este nombre nuevo tiene la ventaja de mostrar su relación con otros tipos de amortiguadores. La exposición breve que sigue se restringe al principio básico de un amortiguador de masa resonante sin entrar en muchos aspectos importantes de su diseño práctico.

En su forma más simple, un amortiguador de masa resonante consiste en un resorte y una masa. Tal sistema de absorción está conectado a un sistema de 1GDL, como se muestra en la figura 12.2.1a. Las ecuaciones de movimiento para la masa principal m_1 y la masa del amortiguador m_2 son las mismas que la ecuación (12.1.1). Para la fuerza armónica aplicada a la masa principal ya se tiene una solución dada por la ecuación (12.1.6). Se presenta la notación

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad \omega_2^* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \qquad \mu = \frac{m_2}{m_1} \tag{12.2.1}$$

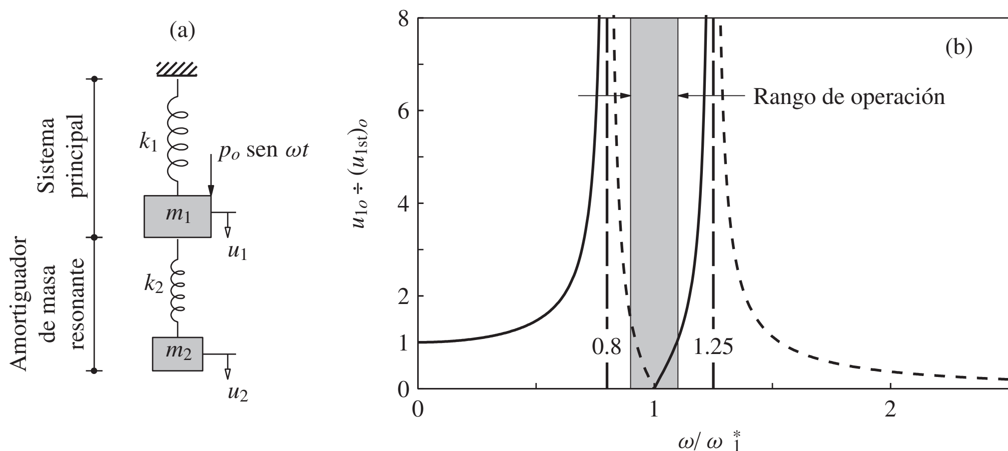


Figura 12.2.1 (a) Amortiguador de masa resonante unido a un sistema de 1GDL; (b) amplitud de respuesta contra la frecuencia de excitación (la curva a trazos indica u_{1o} negativa o una fase opuesta a la excitación); $\mu = 0.2$ y $\omega_1^* = \omega_2^*$.

la solución disponible puede reescribirse como

$$u_{1o} = \frac{p_o}{k_1} \frac{1 - \left(\omega/\omega_2^*\right)^2}{\left[1 + \mu\ \left(\omega_2^*/\omega_1^*\right)^2 - \left(\omega/\omega_1^*\right)^2\right]\left[1 - \left(\omega/\omega_2^*\right)^2\right] - \mu\ \left(\omega_2^*/\omega_1^*\right)^2} \quad (12.2.2a)$$

$$u_{2o} = \frac{p_o}{k_1} \frac{1}{\left[1 + \mu\ \left(\omega_2^*/\omega_1^*\right)^2 - \left(\omega/\omega_1^*\right)^2\right]\left[1 - \left(\omega/\omega_2^*\right)^2\right] - \mu\ \left(\omega_2^*/\omega_1^*\right)^2} \quad (12.2.2b)$$

En la frecuencia de excitación $\omega = \omega_2^*$, la ecuación (12.2.2a) indica que el movimiento de la masa principal m_1 no sólo disminuye, sino que cesa por completo. En la figura 12.2.1b se muestra una gráfica de la amplitud de respuesta $u_{1o} \div (u_{1st})_o$, donde $(u_{1st})_o = p_o/k_1$, contra ω; para este ejemplo, la relación de masa $\mu = 0.2$ y $\omega_1^* = \omega_2^*$, donde el amortiguador está sincronizado con la frecuencia natural del sistema principal. Como el sistema tiene dos grados de libertad, existen dos frecuencias de resonancia y la respuesta en esas frecuencias no está acotada. Se muestra el rango de la frecuencia de operación donde $u_{1o} \div (u_{1st})_o < 1$.

La utilidad del amortiguador de masa resonante es evidente al comparar la función de frecuencia-respuesta de la figura 12.2.1b con la respuesta de la masa principal por sí sola, sin la masa de éste. En $\omega = \omega_1^*$, la amplitud de respuesta de la masa principal por sí sola es ilimitada, pero es cero en presencia de la masa del amortiguador. Así, si la frecuencia de excitación ω está cerca de la frecuencia natural ω_1^* del sistema principal y las restricciones de operación hacen que sea imposible variar cualquiera de ellas, puede utilizarse el amortiguador de masa resonante para reducir la amplitud de respuesta del sistema principal hasta un valor cercano a cero.

¿Cuál debe ser el tamaño de la masa del amortiguador? Para responder a esta pregunta se utiliza la ecuación (12.2.2b) a fin de determinar el movimiento de la masa de éste en $\omega = \omega_2^*$:

$$u_{2o} = -\frac{p_o}{k_2} \quad (12.2.3)$$

La fuerza que actúa sobre la masa del amortiguador es

$$k_2 u_{2o} = \omega^2 m_2 u_{2o} = -p_o \quad (12.2.4)$$

Esto implica que este sistema ejerce una fuerza igual y opuesta a la fuerza de excitación. Así, el tamaño de la rigidez y la masa del amortiguador, k_2 y m_2, dependen del valor permitido de u_{2o}. Existen otros factores que afectan la elección de la masa del amortiguador. Obviamente, una masa grande de éste presenta un problema práctico. Al mismo tiempo, cuanto menor sea la relación de masa μ, más estrecho será el intervalo de la frecuencia de operación del amortiguador.

La presentación anterior indica que un amortiguador de masa resonante tiene su mayor aplicación en las máquinas sincronizadas, operando con una frecuencia casi constante, para las que se sintoniza a una frecuencia particular y sólo es eficaz en una banda estrecha de frecuencias. Sin embargo, los amortiguadores de vibraciones se emplean también en situaciones en las que la excitación no es cercanamente armónica. Los amortiguadores que cuelgan de las líneas de transmisión de alta tensión se usan para mitigar los efectos fati-

gantes de la vibración inducida por el viento. Éstos también se han utilizado para reducir la vibración inducida por el viento en edificios altos, cuando los movimientos han alcanzado niveles molestos para los ocupantes. Un ejemplo de esto es el edificio Citicorp Center de 59 niveles en el centro de Manhattan, cuya construcción finalizó en 1977; este edificio cuenta con un bloque de concreto de 820 kip instalado en el nivel 59 sobre una plataforma móvil, la cual se conecta al edificio mediante grandes brazos hidráulicos. Cuando el edificio se balancea más de 1 pie por segundo, una computadora dirige los brazos para mover el bloque en la otra dirección. Esta acción reduce la oscilación en un 40%, suficiente para aliviar las molestias de los ocupantes del edificio durante los vendavales fuertes.

PARTE B: ANÁLISIS MODAL

12.3 ECUACIONES MODALES PARA LOS SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Las ecuaciones de movimiento para un sistema lineal sin amortiguamiento de VGDL se obtuvieron en el capítulo 9 y se repiten aquí:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \tag{12.3.1}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones de movimiento acopladas, que se ilustró en la sección 12.1 para un sistema de dos grados de libertad sometido a una excitación armónica, no es eficiente para los sistemas con más grados de libertad, ni es factible para los sistemas excitados por otros tipos de fuerzas. Por consiguiente, resulta ventajoso transformar estas ecuaciones en coordenadas modales, como se verá a continuación.

Como se mencionó en la sección 10.7, el vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ de un sistema de VGDL puede ampliarse en términos de las contribuciones modales. Así, la respuesta dinámica de un sistema puede expresarse como

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t) \tag{12.3.2}$$

Si se usa esta ecuación, las ecuaciones acopladas (12.3.1) en $u_j(t)$ pueden transformarse en un conjunto de ecuaciones no acopladas donde las coordenadas modales $q_n(t)$ son las incógnitas. Al sustituir la ecuación (12.3.2) en la (12.3.1), se obtiene

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\,\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\,\phi_r q_r(t) = \mathbf{p}(t)$$

Si se multiplica antes cada término de esta ecuación por ϕ_n^T, resulta

$$\sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \mathbf{m}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \mathbf{k}\phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

Debido a las relaciones de ortogonalidad de la ecuación (10.4.1), todos los términos en cada una de los sumatorias se anulan, con excepción del término $r = n$; lo anterior reduce esta ecuación a

$$(\phi_n^T \mathbf{m}\phi_n)\ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{k}\phi_n)q_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

o

$$M_n\,\ddot{q}_n(t) + K_n\,q_n(t) = P_n(t) \tag{12.3.3}$$

donde

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m}\phi_n \qquad K_n = \phi_n^T \mathbf{k}\phi_n \qquad P_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t) \tag{12.3.4}$$

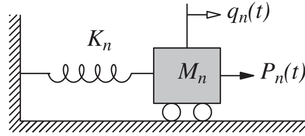


Figura 12.3.1 Sistema generalizado de 1GDL para el n-ésimo modo natural.

La ecuación (12.3.3) puede interpretarse como la ecuación que rige la respuesta $q_n(t)$ del sistema de 1GDL mostrado en la figura 12.3.1, con masa M_n, rigidez K_n y la fuerza de excitación $P_n(t)$. Por lo tanto, M_n se denomina la *masa generalizada* para el n-ésimo modo natural, K_n la *rigidez generalizada* para el n-ésimo modo, y $P_n(t)$ la *fuerza generalizada* para el n-ésimo modo. Estos parámetros dependen sólo del n-ésimo modo ϕ_n. Por lo tanto, si sólo se conoce el modo n, es posible escribir la ecuación para q_n y resolverla sin conocer siquiera los otros modos. Si se divide entre M_n y se usa la ecuación (10.4.7), la ecuación (12.3.3) puede reescribirse como

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2\,q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \tag{12.3.5}$$

Las ecuaciones (12.3.3) o (12.3.5) rigen la n-ésima coordenada modal $q_n(t)$, la única incógnita en la ecuación, y hay N de estas ecuaciones, una para cada modo. Así, el conjunto de N ecuaciones diferenciales acopladas (12.3.1) en los desplazamientos nodales $u_j(t)$ –$j = 1, 2, \ldots, N$– ha sido transformado en el conjunto de N ecuaciones no acopladas (12.3.3) en las coordenadas modales $q_n(t)$ –$n = 1, 2, \ldots, N$–. Escrito en forma matricial este último conjunto de ecuaciones es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \tag{12.3.6}$$

donde $\mathbf{M}$ es una matriz diagonal de las masas modales generalizadas M_n, $\mathbf{K}$ es una matriz diagonal de las rigideces modales generalizadas K_n, y $\mathbf{P}(t)$ es un vector columna de las fuerzas modales generalizadas $P_n(t)$. Recuerde que $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ se introdujeron en la sección 10.4.

Ejemplo 12.2

Considere los sistemas y la excitación del ejemplo 12.1. Determine, mediante el análisis modal, la respuesta de estado estacionario del sistema.

Solución Las frecuencias y los modos de vibración naturales de este sistema se determinaron en el ejemplo 10.4, a partir del cual se calculan las masas y rigideces generalizadas utilizando

la ecuación (12.3.4). Estos resultados se resumen a continuación:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\phi_1 = \left\langle \tfrac{1}{2} \quad 1 \right\rangle^T \qquad \phi_2 = \langle -1 \quad 1 \rangle^T$$

$$M_1 = \frac{3m}{2} \qquad M_2 = 3m$$

$$K_1 = \frac{3k}{4} \qquad K_2 = 6k$$

1. *Calcule las fuerzas generalizadas*.

$$P_1(t) = \phi_1^T \mathbf{p}(t) = \underbrace{(p_o/2)}_{P_{1o}} \text{ sen } \omega t \qquad P_2(t) = \phi_2^T \mathbf{p}(t) = \underbrace{-p_o}_{P_{2o}} \text{ sen } \omega t \tag{a}$$

2. *Establezca las ecuaciones modales*.

$$M_n \ddot{q}_n + K_n q_n = P_{no} \text{ sen } \omega t \tag{b}$$

3. *Resuelva las ecuaciones modales*. Para resolver la ecuación (b) se trabaja sobre la solución presentada en la ecuación (3.1.7) para un sistema de 1GDL sometido a una fuerza armónica. La ecuación gobernante es

$$m\ddot{u} + ku = p_o \text{ sen } \omega t \tag{c}$$

y su solución de estado estacionario es

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \mathcal{C} \text{ sen } \omega t \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{d}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Al comparar las ecuaciones (c) y (b), la solución para la ecuación (b) es

$$q_n(t) = \frac{P_{no}}{K_n} \mathcal{C}_n \text{ sen } \omega t \tag{e}$$

donde $\mathcal{C}_n$ está dada por la ecuación (d) con ω_n interpretada como la frecuencia natural del n-ésimo modo. Si se sustituyen P_{no} y K_n para $n = 1$ y 2, resulta

$$q_1(t) = \frac{2p_o}{3k} \mathcal{C}_1 \text{ sen } \omega t \qquad q_2(t) = -\frac{p_o}{6k} \mathcal{C}_2 \text{ sen } \omega t \tag{f}$$

4. *Determine las respuestas modales*. La contribución del n-ésimo modo a los desplazamientos (con base en la ecuación 12.3.2) es $\mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t)$. Al sustituir la ecuación (f) se obtiene la respuesta de desplazamiento debida a los dos modos:

$$\mathbf{u}_1(t) = \phi_1 \frac{2p_o}{3k} \mathcal{C}_1 \text{ sen } \omega t \qquad \mathbf{u}_2(t) = \phi_2 \frac{-p_o}{6k} \mathcal{C}_2 \text{ sen } \omega t \tag{g}$$

5. *Combine las respuestas modales*.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \quad \text{o} \quad u_j(t) = u_{j1}(t) + u_{j2}(t) \qquad j = 1, 2 \tag{h}$$

Si se sustituye la ecuación (g) para ϕ_1 y ϕ_2, resulta

$$u_1(t) = \frac{p_o}{6k}\ (2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\ \text{sen}\ \omega t \qquad u_2(t) = \frac{p_o}{6k}\ (4\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\ \text{sen}\ \omega t \tag{i}$$

Estos resultados son equivalentes a los obtenidos en el ejemplo 12.1 mediante la resolución de las ecuaciones de movimiento acopladas (12.3.1).

12.4 ECUACIONES MODALES PARA LOS SISTEMAS AMORTIGUADOS

Cuando se incluye el amortiguamiento, las ecuaciones de movimiento para un sistema de VGDL son

$$\mathbf{m\ddot{u}} + \mathbf{c\dot{u}} + \mathbf{ku} = \mathbf{p}(t) \tag{12.4.1}$$

Con base en la transformación de la ecuación (12.3.2), donde ϕ_r son los modos naturales del sistema sin amortiguamiento, estas ecuaciones pueden escribirse en términos de coordenadas modales. A diferencia del caso de los sistemas no amortiguados (sección 12.3), estas ecuaciones modales pueden acoplarse a través de los términos de amortiguamiento. Sin embargo, para ciertas formas de amortiguamiento que son idealizaciones razonables de muchas estructuras, éstas se desacoplan de la misma forma que para los sistemas no amortiguados. Esto se demostrará a continuación.

Si se sustituye la ecuación (12.3.2) en la ecuación (12.4.1), resulta

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{c}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\phi_r q_r(t) = \mathbf{p}(t)$$

Al multiplicar antes cada término de esta ecuación por ϕ_n^T, se obtiene

$$\sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \mathbf{m}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \mathbf{c}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \mathbf{k}\phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

que puede reescribirse como

$$M_n\, \ddot{q}_n(t) + \sum_{r=1}^{N} C_{nr}\, \dot{q}_r(t) + K_n\, q_n(t) = P_n(t) \tag{12.4.2}$$

donde M_n, K_n y $P_n(t)$ se definen en la ecuación (12.3.4) y

$$C_{nr} = \phi_n^T \mathbf{c}\phi_r \tag{12.4.3}$$

La ecuación (12.4.2) existe para cada $n = 1$ a N, y el conjunto de N ecuaciones puede escribirse en forma matricial:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \tag{12.4.4}$$

donde **M**, **K** y **P**(t) se introdujeron en la ecuación (12.3.6), y **C** es una matriz no diagonal con los coeficientes C_{nr}. Estas N ecuaciones en las coordenadas modales $q_n(t)$ se acoplan a través de los términos de amortiguamiento porque la ecuación (12.4.2) contiene más de una velocidad modal.

Las ecuaciones modales se desacoplan si el sistema tiene un amortiguamiento clásico. Para tales sistemas, como se definió en la sección 10.9, $C_{nr} = 0$ si $n \neq r$ y la ecuación (12.4.2) se reduce a

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = P_n(t) \tag{12.4.5}$$

donde el amortiguamiento generalizado C_n está definido por la ecuación (10.9.10). Esta ecuación rige la respuesta del sistema de 1GDL mostrado en la figura 12.4.1. Al dividir la ecuación (12.4.5) entre M_n, se obtiene

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \tag{12.4.6}$$

donde ζ_n es la fracción de amortiguamiento para el n-ésimo modo. Por lo general, la fracción de amortiguamiento no se calcula utilizando la ecuación (10.9.11) sino que se estima con base en datos experimentales para estructuras similares a la analizada, (capítulo 11). La ecuación (12.4.5) rige la coordenada $q_n(t)$ del n-ésimo modo y los parámetros M_n, K_n, C_n y $P_n(t)$ dependen sólo del ϕ_n del n-ésimo modo, no de los otros modos. Por lo tanto, se tienen N ecuaciones desacopladas como la ecuación (12.4.5), una para cada modo natural. En resumen, el conjunto de N ecuaciones diferenciales acopladas (12.4.1) en los desplazamientos nodales $u_j(t)$ se ha transformado en el conjunto de N ecuaciones no acopladas (12.4.5) en las coordenadas modales $q_n(t)$.

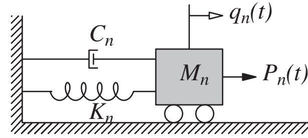


Figura 12.4.1 Sistema generalizado de 1GDL para el n-ésimo modo natural.

12.5 RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTO

Para las fuerzas externas dinámicas dadas, que están definidas por $\mathbf{p}(t)$, la respuesta dinámica de un sistema de VGDL puede determinarse resolviendo las ecuaciones (12.4.5) o (12.4.6) para la coordenada modal $q_n(t)$. Cada ecuación modal tiene la misma forma que la ecuación de movimiento para un sistema de 1GDL. Por lo tanto, los métodos de solución y los resultados disponibles para los sistemas de 1GDL (capítulos 3 a 5) pueden adaptarse a fin de obtener las soluciones $q_n(t)$ para las ecuaciones modales. Una vez que se han determinado las coordenadas modales $q_n(t)$, la ecuación (12.3.2) indica que la contribución del n-ésimo modo a los desplazamientos nodales $\mathbf{u}(t)$ es

$$\mathbf{u}_n(t) = \phi_n \, q_n(t) \tag{12.5.1}$$

y la combinación de estas contribuciones modales proporciona los desplazamientos totales:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \, q_n(t) \tag{12.5.2}$$

La $\mathbf{u}(t)$ resultante es independiente de la manera en que se normalicen los modos, aunque las $q_n(t)$ no lo son.

Este procedimiento se conoce como el *análisis modal clásico* o el *método de superposición de modos clásico* porque las ecuaciones modales individuales (desacopladas) se resuelven a fin de determinar las coordenadas modales $q_n(t)$ y las respuestas modales $\mathbf{u}_n(t)$, para después combinarlas y obtener la respuesta total $\mathbf{u}(t)$. En forma más precisa, este método se denomina el *método de superposición de desplazamientos modales clásico* debido a que los desplazamientos modales se superponen. Por brevedad, este procedimiento suele referirse como el *análisis modal*. Este método de análisis está restringido a los sistemas lineales con amortiguamiento clásico. La linealidad del sistema está implícita en el uso del principio de superposición, ecuación (12.3.2). El amortiguamiento debe tener la forma clásica para obtener ecuaciones modales que se desacoplen, una característica central del análisis modal.

12.6 FUERZAS DE LOS ELEMENTOS

Existen dos procedimientos descritos en la sección 9.10 para determinar las fuerzas en los diversos elementos (vigas, columnas, paredes, etcétera) de una estructura en el instante t de tiempo, a partir de los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ en el mismo instante de tiempo. En el análisis modal resulta instructivo determinar las contribuciones de los diferentes modos individuales a las fuerzas de los elementos. En el primer procedimiento, la contribución del n-ésimo modo $r_n(t)$ a una fuerza elemental $r(t)$ se determina a partir de los desplazamientos modales $\mathbf{u}_n(t)$ utilizando las propiedades de rigidez del elemento (apéndice 1). Entonces la fuerza del elemento considerando las contribuciones de todos los modos es

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) \qquad (12.6.1)$$

En el segundo procedimiento, las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con la respuesta del n-ésimo modo están definidas por la ecuación (9.10.1) con el subíndice s eliminado: $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)$. Si se sustituye la ecuación (12.5.1) y se utiliza la ecuación (10.2.4), resulta

$$\mathbf{f}_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) \qquad (12.6.2)$$

El análisis estático de la estructura sometida a estas fuerzas externas en cada instante de tiempo proporciona la fuerza elemental $r_n(t)$. Entonces, la fuerza total $r(t)$ está dada por la ecuación (12.6.1).

12.7 ANÁLISIS MODAL: RESUMEN

La respuesta dinámica de un sistema de VGDL a las fuerzas externas $\mathbf{p}(t)$ puede calcularse mediante un análisis modal, el cual se resume a continuación como una secuencia de pasos:

1. Defina las propiedades estructurales.
 a. Determine la matriz de masa $\mathbf{m}$ y la matriz de rigidez $\mathbf{k}$ (capítulo 9).
 b. Estime la fracción de amortiguamiento modal ζ_n (capítulo 11).

2. Determine las frecuencias naturales ω_n y los modos naturales ϕ_n (capítulo 10).
3. Calcule la respuesta en cada modo siguiendo los siguientes pasos:
  a. Establezca la ecuación (12.4.5) o (12.4.6) y resuelva para $q_n(t)$.
  b. Calcule los desplazamientos nodales $\mathbf{u}_n(t)$ a partir de la ecuación (12.5.1).
  c. Calcule las fuerzas de los elementos asociadas con los desplazamientos nodales $\mathbf{u}_n(t)$ mediante la aplicación de uno de los dos métodos descritos en la sección 12.6 para los valores deseados de t y las fuerzas de los elementos de interés.
4. Combine las contribuciones de todos los modos para determinar la respuesta total. En particular, los desplazamientos nodales $\mathbf{u}(t)$ están dados por la ecuación (12.5.2) y las fuerzas de los elementos por la ecuación (12.6.1).

Ejemplo 12.3

Considere los sistemas y la excitación del ejemplo 12.1. Determine las fuerzas de resorte $V_j(t)$ para el sistema de la figura 12.1.1a o las fuerzas cortantes $V_j(t)$ de cada nivel en el sistema de la figura 12.1.1b, sin introducir fuerzas estáticas equivalentes. Tome en cuenta sólo la respuesta de estado estacionario.

Solución Los pasos 1, 2, 3a y 3b del resumen del análisis de la sección 12.7 ya se realizaron en el ejemplo 12.2.

Paso 3c: Las fuerzas de resorte en el sistema de la figura 12.1.1a o las fuerzas cortantes de cada nivel en el sistema de la figura 12.1.1b son

$$V_{1n}(t) = k_1 u_{1n}(t) = k_1 \phi_{1n} q_n(t) \tag{a}$$

$$V_{2n}(t) = k_2 \left[u_{2n}(t) - u_{1n}(t)\right] = k_2(\phi_{2n} - \phi_{1n}) q_n(t) \tag{b}$$

Si se sustituye la ecuación (f) del ejemplo 12.2 en las ecuaciones (a) y (b) con $n = 1$, $k_1 = 2k$, $k_2 = k$, $\phi_{11} = \frac{1}{2}$ y $\phi_{21} = 1$, resultan las fuerzas debidas al primer modo:

$$V_{11}(t) = \frac{2p_o}{3}\, \mathcal{C}_1 \operatorname{sen} \omega t \qquad V_{21}(t) = \frac{p_o}{3}\, \mathcal{C}_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{c}$$

Al sustituir la ecuación (f) del ejemplo 12.2 en las ecuaciones (a) y (b) con $n = 2$, $\phi_{12} = -1$, y $\phi_{22} = 1$, se obtienen las fuerzas del segundo modo:

$$V_{12}(t) = \frac{p_o}{3}\, \mathcal{C}_2 \operatorname{sen} \omega t \qquad V_{22}(t) = -\frac{p_o}{3}\, \mathcal{C}_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{d}$$

Paso 4b: Si se sustituyen las ecuaciones (c) y (d) en $V_j(t) = V_{j1}(t) + V_{j2}(t)$, resulta

$$V_1(t) = \frac{p_o}{3}\, (2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \operatorname{sen} \omega t \qquad V_2(t) = \frac{p_o}{3}\, (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \operatorname{sen} \omega t \tag{e}$$

La ecuación (e) proporciona la variación en el tiempo de las fuerzas de resorte y las fuerzas cortantes en cada nivel. Para una p_o dada y unas ω y ω_n ya determinadas, todas las cantidades en el lado derecho de estas ecuaciones se conocen, por lo que es posible calcular $V_j(t)$.

Ejemplo 12.4

Repita el ejemplo 12.3 usando fuerzas estáticas equivalentes.

Solución A partir de la ecuación (12.6.2), para un sistema de masas agrupadas, la fuerza estática equivalente en el j-ésimo grado de libertad debida al n-ésimo modo es

$$f_{jn}(t) = \omega_n^2 m_j \phi_{jn} q_n(t) \tag{a}$$

Paso 3c: En la ecuación (a) con $n = 1$ sustituya $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $\phi_{11} = \frac{1}{2}$, $\phi_{21} = 1$, $w_1^2 = k/2m$, y $q_1(t)$ a partir de la ecuación (f) del ejemplo 12.2 para obtener

$$f_{11}(t) = \frac{p_o}{3}\,\mathcal{C}_1 \text{ sen } \omega t \qquad f_{21}(t) = \frac{p_o}{3}\,\mathcal{C}_1 \text{ sen } \omega t \tag{b}$$

En la ecuación (a) con $n = 2$ sustituya $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $\phi_{12} = -1$, $\phi_{22} = 1$, $w_2^2 = 2k/m$, y $q_2(t)$ a partir de la ecuación (f) del ejemplo 12.2 para obtener

$$f_{12}(t) = \frac{2p_o}{3}\,\mathcal{C}_2 \text{ sen } \omega t \qquad f_{22}(t) = -\frac{p_o}{3}\,\mathcal{C}_2 \text{ sen } \omega t \tag{c}$$

El análisis estático de los sistemas de la figura E12.4 sometidos a las fuerzas $f_{jn}(t)$ proporciona las dos fuerzas de resorte y las fuerzas cortantes de cada nivel debidas al n-ésimo modo:

$$V_{1n}(t) = f_{1n}(t) + f_{2n}(t) \qquad V_{2n}(t) = f_{2n}(t) \tag{d}$$

La sustitución de la ecuación (b) en la ecuación (d) con $n = 1$ da las fuerzas del primer modo que son idénticas a la ecuación (c) del ejemplo 12.3. De manera similar, si se sustituye la ecuación (c) en la ecuación (d) con $n = 2$, se obtienen los resultados del segundo modo que son idénticos a la ecuación (d) del ejemplo 12.3.

Paso 4: Proceda como en el paso 4b del ejemplo 12.3.

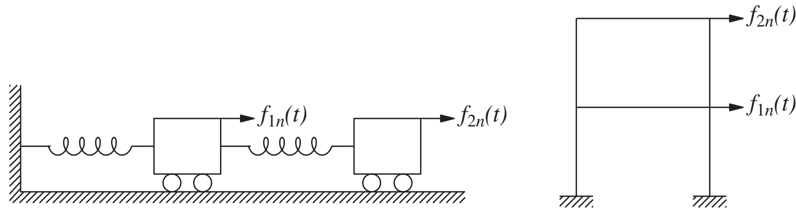


Figura E12.4

Ejemplo 12.5

Considere el sistema y la excitación del ejemplo 12.1 con las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n. Determine las amplitudes de desplazamiento en el estado estacionario del sistema.

Solución Los pasos 1 y 2 del resumen del análisis ya se realizaron en el ejemplo 12.2.

Paso 3: Las ecuaciones modales sin amortiguamiento se desarrollaron en el ejemplo 12.2. Ahora, al incluir el amortiguamiento, éstas se convierten en

$$M_n\,\ddot{q}_n + C_n\,\dot{q}_n + K_n\,q_n = P_{no} \text{ sen } \omega t \tag{a}$$

donde M_n, K_n y P_{no} están disponibles y C_n se conoce en términos de ζ_n.

Para resolver la ecuación (a) se trabaja sobre la solución presentada en la ecuación (3.2.3) para un sistema de 1GDL con amortiguamiento sometido a una fuerza armónica. La ecuación gobernante es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_o \text{ sen } \omega t \tag{b}$$

y su solución de estado estacionario es

$$u(t) = \frac{p_o}{k}\,(\mathcal{C} \text{ sen } \omega t + \mathcal{D} \cos \omega t) \tag{c}$$

con

$$\mathcal{C} = \frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\,\omega/\omega_n)^2} \qquad \mathcal{D} = \frac{-2\zeta\,\omega/\omega_n}{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\,\omega/\omega_n)^2} \tag{d}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y $\zeta = c/2m\omega_n$.

Al comparar las ecuaciones (b) y (a), la solución para esta última es

$$q_n(t) = \frac{P_{no}}{K_n}\,(\mathcal{C}_n \text{ sen } \omega t + \mathcal{D}_n \cos \omega t) \tag{e}$$

donde $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$ están dadas por la ecuación (d) con ω_n interpretada como la frecuencia natura del n-ésimo modo y $\zeta = \zeta_n$, la fracción de amortiguamiento del n-ésimo modo. La sustitución de P_{no} y K_n para $n = 1$ y 2 da

$$q_1(t) = \frac{2p_o}{3k}\,(\mathcal{C}_1 \text{ sen } \omega t + \mathcal{D}_1 \cos \omega t) \tag{f}$$

$$q_2(t) = -\frac{p_o}{6k}\,(\mathcal{C}_2 \text{ sen } \omega t + \mathcal{D}_2 \cos \omega t) \tag{g}$$

Pasos 3b y 4: Al sustituir ϕ_n en las ecuaciones (12.5.2), se obtienen los desplazamientos nodales:

$$u_1(t) = \tfrac{1}{2}\,q_1(t) - q_2(t) \qquad u_2(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (f) y (g) para $q_n(t)$, resulta

$$u_1(t) = \frac{p_o}{6k}\,[(2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) \text{ sen } \omega t + (2\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \cos \omega t] \tag{h}$$

$$u_2(t) = \frac{p_o}{6k}\,[(4\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) \text{ sen } \omega t + (4\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2) \cos \omega t] \tag{i}$$

Las amplitudes de desplazamiento son

$$u_{1o} = \frac{p_o}{6k}\sqrt{(2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)^2 + (2\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)^2} \tag{j}$$

$$u_{2o} = \frac{p_o}{6k}\sqrt{(4\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)^2 + (4\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2)^2} \tag{k}$$

Estas u_{jo} pueden calcularse cuando la amplitud p_o y la frecuencia ω de la fuerza de excitación son conocidas junto con las propiedades del sistema k, ω_n y ζ_n.

Es posible demostrar que las ecuaciones (h) e (i), especificadas para $\zeta_n = 0$, son idénticas a los resultados para el sistema sin amortiguamiento obtenidos en el ejemplo 12.2.

Ejemplo 12.6

Se desea encontrar la respuesta dinámica del sistema de la figura E12.6a a la excitación mostrada en la figura E12.6b. Determine: **(a)** los desplazamientos $u_1(t)$ y $u_2(t)$; **(b)** los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes en las secciones a, b, c y d como funciones del tiempo; **(c)** los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en $t = 0.18$ s. Los parámetros del sistema y la excitación son $E = 29{,}000$ ksi, $I = 100$ pulg^4, $L = 120$ pulg, $mL = 0.1672$ kip-s^2/pulg y $p_o = 5$ kips. Desprecie el amortiguamiento.

Solución Las matrices de masa y rigidez están disponibles a partir del ejemplo 9.5. Las frecuencias y modos naturales de este sistema se determinaron en el ejemplo 10.2. Éstos son $\omega_1 = 3.156\sqrt{EI/mL^4}$ y $\omega_2 = 16.258\sqrt{EI/mL^4}$; $\phi_1 = \langle 1 \quad 0.3274\rangle^T$ y $\phi_2 = \langle 1 \quad -1.5274\rangle^T$. Al sustituir E, I, m y L se obtiene $\omega_1 = 10.00$ y $\omega_2 = 51.51$ rad/s.

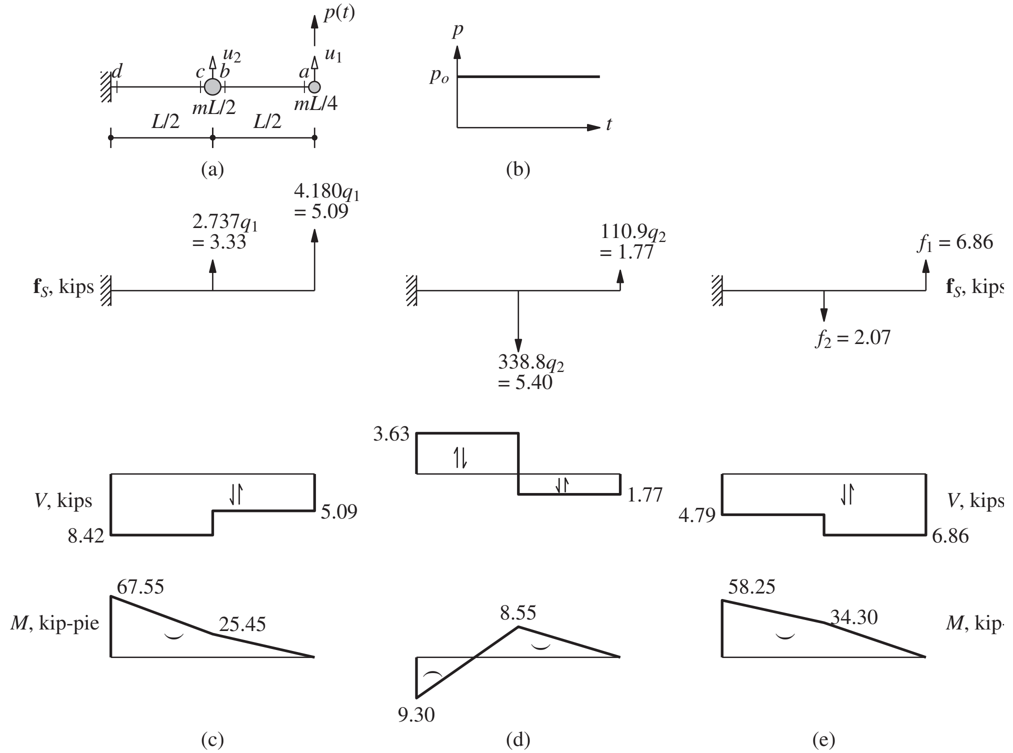


Figura E12.6

1. *Establezca las ecuaciones modales.*

$$M_1 = \phi_1^T \mathbf{m} \phi_1 = 0.0507 \qquad M_2 = \phi_2^T \mathbf{m} \phi_2 = 0.2368 \text{ kip-s}^2\text{/pulg}$$

$$P_1(t) = \phi_1^T \begin{Bmatrix} p_o \\ o \end{Bmatrix} = 5 \qquad P_2(t) = \phi_2^T \begin{Bmatrix} p_o \\ o \end{Bmatrix} = 5 \text{ kips}$$

Las ecuaciones modales (12.4.6) son

$$\ddot{q}_1 + 10^2 q_1 = \frac{5}{0.0507} = 98.62 \qquad \ddot{q}_2 + (51.51)^2 q_2 = \frac{5}{0.2368} = 21.12 \tag{a}$$

2. *Resuelva las ecuaciones modales*. Si se adapta el resultado para el sistema de 1GDL, ecuación (4.3.2), a la ecuación, (a) da

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{98.62}{10^2}(1 - \cos 10t) = 0.986(1 - \cos 10t) \\ q_2(t) &= \frac{21.12}{(51.51)^2}(1 - \cos 51.51t) = 0.008(1 - \cos 51.51t) \end{aligned} \tag{b}$$

3. *Determine la respuesta de desplazamiento*. Al sustituir para ϕ_1, ϕ_2, $q_1(t)$ y $q_2(t)$ en la ecuación (12.5.2), se obtiene

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0.994 - 0.986 \cos 10t - 0.008 \cos 51.51t \\ u_2(t) &= 0.311 - 0.323 \cos 10t + 0.012 \cos 51.51t \end{aligned} \tag{c}$$

4. *Determine las fuerzas estáticas equivalentes*. Si se sustituyen ω_1^2, $\mathbf{m}$ y ϕ_1 en la ecuación (12.6.2), resultan las fuerzas mostradas en la figura E12.6c:

$$\mathbf{f}_1(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}_1 = 10^2 \begin{bmatrix} 0.0418 & \\ & 0.0836 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.3274 \end{Bmatrix} q_1(t) = \begin{Bmatrix} 4.180 \\ 2.737 \end{Bmatrix} q_1(t) \tag{d}$$

Del mismo modo, al sustituir ω_2^2, $\mathbf{m}$ y ϕ_2, se obtienen las fuerzas mostradas en la figura E12.6d:

$$\mathbf{f}_2(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 110.9 \\ -338.8 \end{bmatrix} q_2(t) \tag{e}$$

Las fuerzas combinadas son

$$f_1(t) = 4.180\, q_1(t) + 110.9\, q_2(t) \qquad f_2(t) = 2.737\, q_1(t) - 338.8\, q_2(t) \tag{f}$$

5. *Determine las fuerzas internas*. El análisis estático de la viga en voladizo de la figura E12.6e proporciona las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en las diferentes secciones a, b, c y d:

$$V_a(t) = V_b(t) = f_1(t) \qquad V_c(t) = V_d(t) = f_1(t) + f_2(t) \tag{g}$$

$$M_a(t) = 0 \qquad M_b(t) = \frac{L}{2} f_1(t) \qquad M_d(t) = L f_1(t) + \frac{L}{2} f_2(t) \tag{h}$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se conocen a partir de las ecuaciones (f) y (b).

6. *Determine las fuerzas internas en $t = 0.18$ s*. En $t = 0.18$ s, con base en la ecuación (b), $q_1 = 1.217$ pulg y $q_2 = 0.0159$ pulg. Al sustituir estas cantidades en las ecuaciones (d) y (e), se obtienen los valores numéricos para las fuerzas estáticas equivalentes que se muestran en las figuras E12.6c y d, donde se grafican las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes debidos a cada modo. Los valores combinados de estas fuerzas elementales se presentan en la figura E12.6e.

PARTE C: CONTRIBUCIONES A LA RESPUESTA MODAL

12.8 EXPANSIÓN MODAL DEL VECTOR DE EXCITACIÓN p(*t*) = sp(*t*)

Ahora se considerará un caso de carga común en el que las fuerzas aplicadas $p_j(t)$ tienen la misma variación en el tiempo $p(t)$ y su distribución espacial está definida por $\mathbf{s}$, independientemente del tiempo. Así,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t) \tag{12.8.1}$$

Una idea central de esta formulación, que resultará instructiva, consiste en expandir el vector $\mathbf{s}$ como

$$\mathbf{s} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{s}_r = \sum_{r=1}^{N} \Gamma_r\, \mathbf{m}\, \phi_r \tag{12.8.2}$$

Si se multiplican antes ambos lados de la ecuación (12.8.2) por ϕ_n^T y se usa la propiedad de ortogonalidad de los modos, resulta

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T \mathbf{s}}{M_n} \tag{12.8.3}$$

La contribución del n-ésimo modo a $\mathbf{s}$ es

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n \tag{12.8.4}$$

la cual es independiente de la manera en que los modos se normalicen. Esto debería quedar claro a partir de la estructura de las ecuaciones (12.8.3) y (12.8.4).

La ecuación (12.8.2) puede verse como una expansión de la distribución $\mathbf{s}$ de las fuerzas aplicadas, en términos de las distribuciones $\mathbf{s}_n$ de las fuerzas de inercia asociadas con los modos naturales. Esta interpretación se hace evidente al considerar la estructura que vibra en su n-ésimo modo con las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = \ddot{q}_n(t)\,\phi_n$. Las fuerzas de inercia asociadas son

$$(\mathbf{f}_I)_n = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_n(t) = -\mathbf{m}\,\phi_n\,\ddot{q}_n(t)$$

y su distribución espacial, dada por el vector $\mathbf{m}\phi_n$, es igual a la de $\mathbf{s}_n$.

La expansión de la ecuación (12.8.2) tiene dos propiedades útiles: (1) el vector de fuerza $\mathbf{s}_n p(t)$ produce una respuesta sólo en el n-ésimo modo, sin que haya respuesta en ningún otro modo; y (2) la respuesta dinámica en el n-ésimo modo se debe por completo al vector de fuerza parcial $\mathbf{s}_n p(t)$ (vea la deducción 12.1).

Para estudiar aún más la expansión modal del vector de fuerza $\mathbf{s}p(t)$ se considera la estructura de la figura 12.8.1: un edificio de cortante de cinco niveles (es decir, las vigas de piso y las losas son rígidas a flexión), con masa concentrada m en cada nivel y la misma rigidez k de entrepiso para todos los niveles.

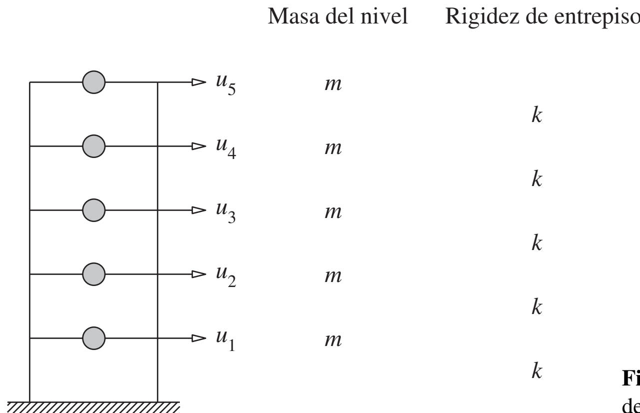


Figura 12.8.1 Edificio de cortante de cinco niveles uniformes.

Las matrices de masa y rigidez de la estructura son

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las frecuencias naturales, determinadas mediante la resolución del problema de valor propio, son

$$\omega_n = \alpha_n \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

donde $\alpha_1 = 0.285$, $\alpha_2 = 0.831$, $\alpha_3 = 1.310$, $\alpha_4 = 1.682$ y $\alpha_3 = 1.919$. Para una estructura con $m = 100$ kips/g, los modos de vibración natural, que se han normalizado con el propósito de obtener $M_n = 1$, son (figura 12.8.2)

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.334 \\ 0.641 \\ 0.895 \\ 1.078 \\ 1.173 \end{Bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.895 \\ -1.173 \\ -0.641 \\ 0.334 \\ 1.078 \end{Bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1.173 \\ 0.334 \\ -1.078 \\ -0.641 \\ 0.895 \end{Bmatrix} \quad \phi_4 = \begin{Bmatrix} -1.078 \\ 0.895 \\ 0.334 \\ -1.173 \\ 0.641 \end{Bmatrix} \quad \phi_5 = \begin{Bmatrix} 0.641 \\ -1.078 \\ 1.173 \\ -0.895 \\ 0.334 \end{Bmatrix}$$

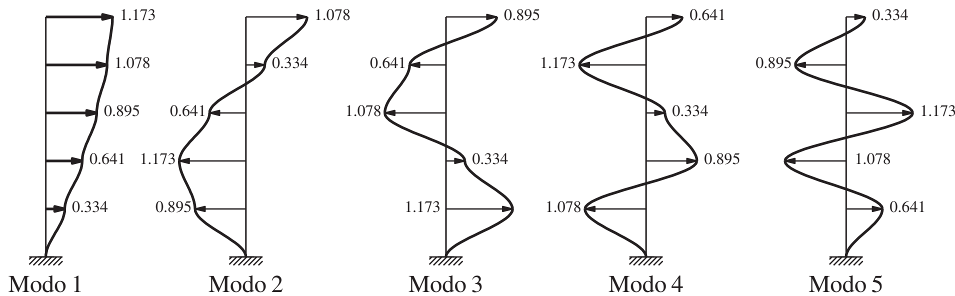


Figura 12.8.2 Modos naturales de vibración del edificio cortante de cinco niveles uniformes.

Considere dos grupos diferentes de fuerzas aplicadas: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_a p(t)$ y $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_b p(t)$, donde $\mathbf{s}_a^T = \langle 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \rangle$ y $\mathbf{s}_b^T = \langle 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2 \rangle$; observe que la fuerza resultante es la unidad en ambos casos (figura 12.8.3). Si se sustituye para $\mathbf{m}$, ϕ_n y $\mathbf{s} = \mathbf{s}_a$ en las ecuaciones (12.8.4) y (12.8.3), resultan las contribuciones modales $\mathbf{s}_n$:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{Bmatrix} 0.101 \\ 0.195 \\ 0.272 \\ 0.327 \\ 0.356 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{Bmatrix} -0.250 \\ -0.327 \\ -0.179 \\ 0.093 \\ 0.301 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{Bmatrix} 0.272 \\ 0.077 \\ -0.250 \\ -0.149 \\ 0.208 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{Bmatrix} -0.179 \\ 0.149 \\ 0.055 \\ -0.195 \\ 0.106 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_5 = \begin{Bmatrix} 0.055 \\ -0.093 \\ 0.101 \\ -0.077 \\ 0.029 \end{Bmatrix}$$

De manera similar, para $\mathbf{s} = \mathbf{s}_b$, los vectores $\mathbf{s}_n$ son

$$\mathbf{s}_1 = \begin{Bmatrix} 0.110 \\ 0.210 \\ 0.294 \\ 0.354 \\ 0.385 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{Bmatrix} -0.423 \\ -0.553 \\ -0.302 \\ 0.157 \\ 0.508 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{Bmatrix} 0.739 \\ 0.210 \\ -0.679 \\ -0.403 \\ 0.564 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{Bmatrix} -0.685 \\ 0.569 \\ 0.212 \\ -0.746 \\ 0.407 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{s}_5 = \begin{Bmatrix} 0.259 \\ -0.436 \\ 0.475 \\ -0.363 \\ 0.135 \end{Bmatrix}$$

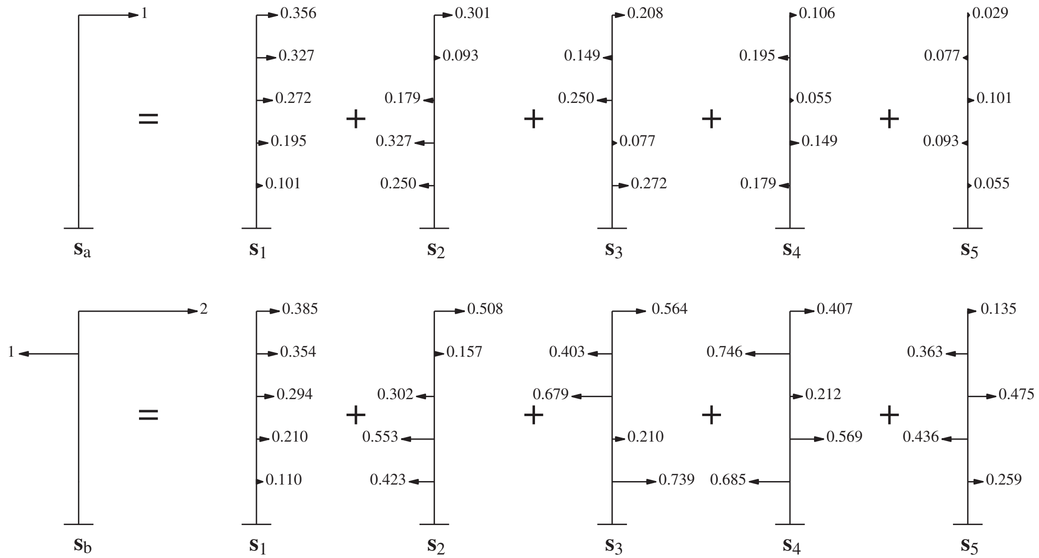


Figura 12.8.3 Expansión modal de los vectores de excitación $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$.

Ambos grupos de vectores se muestran en la figura 12.8.3. Las contribuciones de los modos superiores a **s** son más grandes para $\mathbf{s}_b$ que para $\mathbf{s}_a$, lo que sugiere que estos modos pueden contribuir más a la respuesta si la distribución de la fuerza es $\mathbf{s}_b$ que si es $\mathbf{s}_a$. Esta observación se retomará en la sección 12.11.

Deducción 12.1

La primera propiedad puede demostrarse a partir de la fuerza generalizada para el *r*-ésimo modo:

$$P_r(t) = \phi_r^T \mathbf{s}_n\, p(t) = \Gamma_n(\phi_r^T \mathbf{m}\phi_n)\, p(t) \tag{a}$$

Debido a la ecuación (10.4.1b), la propiedad de ortogonalidad de los modos,

$$P_r(t) = 0 \qquad r \neq n \tag{b}$$

que indica que el vector de excitación $\mathbf{s}_n p(t)$ no produce ninguna fuerza generalizada y, por lo tanto, no existe respuesta en el *r*-ésimo modo, $r \neq n$. La ecuación (a) para $r = n$ es

$$P_n(t) = \Gamma_n M_n\, p(t) \tag{c}$$

que es distinta de cero, lo que implica que $\mathbf{s}_n p(t)$ produce una respuesta solamente en el *n*-ésimo modo.

La segunda propiedad se hace evidente al examinar la fuerza generalizada para el *n*-ésimo modo asociada con el vector de fuerza total:

$$P_n(t) = \phi_n^T \mathbf{s}\, p(t)$$

Si se sustituye la ecuación (12.8.2) para **s**, resulta

$$P_n(t) = \sum_{r=1}^{N} \Gamma_r \left(\phi_n^T \mathbf{m}\phi_r\right)\, p(t)$$

que, después de utilizar la propiedad de ortogonalidad de los modos, se reduce a

$$P_n(t) = \Gamma_n M_n p(t) \tag{d}$$

Esta fuerza generalizada para el vector de fuerza completo $\mathbf{s}p(t)$ es igual a la ecuación (c) asociada con el vector de fuerza parcial $\mathbf{s}_n p(t)$.

12.9 ANÁLISIS MODAL PARA $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$

El análisis dinámico de un sistema de VGDL sometido a las fuerzas $\mathbf{p}(t)$ se especifica en esta sección para la excitación $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$. La fuerza generalizada $P_n(t) = \Gamma_n M_n p(t)$ para el n-ésimo modo se sustituye en la ecuación (12.4.6) a fin de obtener la ecuación modal:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \Gamma_n p(t) \tag{12.9.1}$$

El factor Γ_n que multiplica a la fuerza $p(t)$ se denomina en ocasiones como un factor de participación modal, pero aquí se evita esa terminología porque Γ_n tiene dos desventajas; no es independiente de la manera en que se normaliza, o es una medida de la contribución del modo a una cantidad de respuesta. Ambos inconvenientes pueden superarse mediante los factores de contribución modal que se definen en la siguiente sección.

La solución $q_n(t)$ se escribirá en términos de la respuesta de un sistema de 1GDL. Considere un sistema de este tipo con masa unitaria y las propiedades de vibración (frecuencia natural ω_n y fracción de amortiguamiento ζ_n) del n-ésimo modo del sistema de VGDL excitado por la fuerza $p(t)$. La respuesta de este *n-ésimo modo del sistema de 1GDL* está regido por la ecuación (1.5.2) con $m = 1$ y $\zeta = \zeta_n$, que se repite aquí con la u sustituida por D_n para enfatizar su conexión con el n-ésimo modo:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = p(t) \tag{12.9.2}$$

Si se comparan las ecuaciones (12.9.2) y (12.9.1), resulta

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t) \tag{12.9.3}$$

Así, $q_n(t)$ estará disponible una vez que se haya resuelto la ecuación (12.9.2) para $D_n(t)$, utilizando los resultados disponibles para los sistemas de 1GDL sometidos, por ejemplo, a fuerzas armónicas, escalonadas e impulsivas (capítulos 3 y 4).

Entonces, la contribución del n-ésimo modo a los desplazamientos nodales $\mathbf{u}(t)$, ecuación (12.5.1), es

$$\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \phi_n D_n(t) \tag{12.9.4}$$

Si se sustituye la ecuación (12.9.3) en (12.6.2), resultan las fuerzas estáticas equivalentes:

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n\left[\omega_n^2 D_n(t)\right] \tag{12.9.5}$$

La contribución $r_n(t)$ del n-ésimo modo a cualquier cantidad de respuesta $r(t)$ se determina mediante el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $\mathbf{f_n}(t)$. Si r_n^{st} indica la *respuesta estática modal*, el valor estático (indicado por el superíndice "st") de r debido a las fuerzas externas $\mathbf{s}_n$,† entonces

$$r_n(t) = r_n^{st}\,[\omega_n^2 D_n(t)] \tag{12.9.6}$$

La combinación de las contribuciones de todos los modos a la respuesta proporciona la respuesta total:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^{st}\left[\omega_n^2 D_n(t)\right] \tag{12.9.7}$$

El procedimiento de análisis modal que se acaba de presentar, un caso especial del desarrollado en la sección 12.7, tiene la ventaja de proporcionar una base para identificar y comprender los factores que influyen en las contribuciones modales relativas a la respuesta, como se verá en la sección 12.11.

Interpretación de análisis modal. En la primera fase del procedimiento de análisis modal se calculan las propiedades de vibración de la estructura (frecuencias y modos naturales), y la distribución $\mathbf{s}$ de la fuerza se expande en sus componentes modales $\mathbf{s}_n$. El resto del procedimiento se muestra de manera esquemática en la figura 12.9.1 para enfatizar los conceptos subyacentes. La contribución $r_n(t)$ del n-ésimo modo a la respuesta dinámica se obtiene multiplicando los resultados de dos análisis: (1) el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas externas $\mathbf{s}_n$ y (2) el análisis dinámico del n-ésimo modo del sistema de 1GDL excitado por la fuerza $p(t)$. Así, el análisis modal requiere un análisis estático de la estructura para N conjuntos de fuerzas externas, $\mathbf{s}_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$; y el análisis dinámico de N sistemas de 1GDL diferentes. La combinación de las respuestas modales proporciona la respuesta dinámica de la estructura.

12.10 FACTORES DE CONTRIBUCIÓN MODAL

La contribución r_n del n-ésimo modo a la cantidad de respuesta r, ecuación (12.9.6), puede expresarse como

$$r_n(t) = r^{st}\,\bar{r}_n\left[\omega_n^2\, D_n(t)\right] \tag{12.10.1}$$

donde r^{st} es el valor estático de r debido a las fuerzas externas $\mathbf{s}$ y el n-ésimo *factor de contribución modal:*

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{st}}{r^{st}} \tag{12.10.2}$$

†Aunque de forma poco precisa se hace referencia a $\mathbf{s}_n$ como si fueran fuerzas, éstas son adimensionales porque $p(t)$ tiene unidades de fuerza. Así, $r^{st}{}_n$ no tiene las mismas unidades que r, pero la ecuación (12.9.6) proporciona las unidades correctas para r_n y la ecuación (12.9.7) lo hace para r.

Modo	Análisis estático de la estructura	Análisis dinámico del sistema de 1GDL	Contribución modal a la respuesta dinámica
1	Fuerzas $\mathbf{s}_1$; r_1^{st}	Masa unitaria; $p(t)$; $D_1(t)$; ω_1, ζ_1	$r_1(t) = r_1^{st}\,[\omega_1^2\, D_1(t)]$
2	Fuerzas $\mathbf{s}_2$; r_2^{st}	Masa unitaria; $p(t)$; $D_2(t)$; ω_2, ζ_2	$r_2(t) = r_2^{st}\,[\omega_2^2\, D_2(t)]$
• • •	• • •	• • •	• • •
N	Fuerzas $\mathbf{s}_N$; r_N^{st}	Masa unitaria; $p(t)$; $D_N(t)$; ω_N, ζ_N	$r_N(t) = r_N^{st}\,[\omega_N^2\, D_N(t)]$
Respuesta total			$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t)$

Figura 12.9.1 Explicación conceptual del análisis modal.

Estos factores de contribución modal $\bar{r}_n$ tienen tres propiedades importantes:

1. Son adimensionales.
2. Son independientes de la manera en que se normalizan los modos.
3. La suma de los factores de contribución modal en todos los modos es la unidad, es decir,

$$\sum_{n=1}^{N} \bar{r}_n = 1 \tag{12.10.3}$$

La primera propiedad resulta obvia con base en su definición (ecuación 12.10.2). La segunda propiedad se hace evidente al observar que r_n^{st} es el efecto estático de $\mathbf{s}_n$, que no depende de la normalización, y que las propiedades modales no entran en r^{st}. La ecuación (12.10.3) puede comprobarse al reconocer que $\mathbf{s} = \sum s_n$ (ecuación 12.8.2), lo que implica que $r^{st} = \sum r_n^{st}$. Al dividir entre r^{st} se obtiene el resultado deseado.

12.11 RESPUESTAS MODALES Y NÚMERO REQUERIDO DE MODOS

Considere el desplazamiento $D_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL y defina su valor máximo como $D_{no} \equiv \max_t |D_n(t)|$. El valor correspondiente de $r_n(t)$, ecuación (12.10.1), es

$$r_{no} = r^{st}\bar{r}_n \omega_n^2 D_{no} \tag{12.11.1}$$

Esta ecuación se reescribirá en términos del factor de respuesta dinámica presentado en los capítulos 3 y 4. Para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL regido por la ecuación (12.9.2) este factor es $R_{dn} = D_{no}/(D_{n,\,st})_o$, donde $(D_{n,\,st})_o$ es el valor máximo de $D_{n,\,st}(t)$, la respuesta estática. Se obtiene descartando los términos $\dot{D}_n$ y $\ddot{D}_n$ en la ecuación (12.9.2), $D_{n,\,st}(t) = p(t)/\omega_n^2$ y su valor máximo es $(D_{n,\,st})_o = p_o/\omega_n^2$. Por lo tanto, la ecuación (12.11.1) se convierte en

$$r_{no} = p_o r^{st}\bar{r}_n R_{dn} \tag{12.11.2}$$

El signo algebraico de r_{no} es el mismo que el de la respuesta estática modal $r_n^{st} = r^{st}\bar{r}_n$ porque D_{no} es positivo por definición (ecuación 12.11.1). Aunque tiene un signo algebraico, se hará referencia a r_{no} como el valor máximo de la contribución del n-ésimo modo a la respuesta r o, por razones de brevedad, la respuesta modal máxima, debido a que corresponde al valor máximo de $D_n(t)$.

La ecuación (12.11.2) indica que la respuesta modal máxima es el producto de cuatro cantidades: (1) el factor adimensional de amplificación dinámica R_{dn} para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL excitado por la fuerza $p(t)$; (2) el factor adimensional de contribución modal $\bar{r}_n$ para la cantidad de respuesta r; (3) r^{st}, el valor estático de r debido a las fuerzas externas $\mathbf{s}$; y (4) p_o, el valor máximo de $p(t)$. Las cantidades r^{st} y $\bar{r}_n$ dependen de la distribución espacial $\mathbf{s}$ de las fuerzas aplicadas, pero son independientes de la variación en el tiempo $p(t)$ de las fuerzas; por otro lado, R_{dn} depende de $p(t)$, pero es independiente de $\mathbf{s}$.

El factor de contribución modal $\bar{r}_n$ y el factor de amplificación dinámica R_{dn} influyen en las contribuciones a la respuesta relativas a los distintos modos de vibración y, por tanto,

en el número mínimo de modos que debe incluirse en el análisis dinámico. Esto se hace evidente al observar que, entre las cuatro cantidades que entran en la ecuación (12.11.2), p_o y r^{st} son independientes del número de modos, pero $\bar{r}_n$ y R_{dn} varían con n.

¿Cuántos modos deberían incluirse en un análisis modal? Obviamente deben incluirse las contribuciones a la respuesta de todos los modos a fin de obtener el valor exacto de la respuesta; pero sólo unos cuantos modos suelen proporcionar resultados lo suficientemente precisos. Por lo general, en el análisis de un sistema de N grados de libertad se incluyen los primeros J modos, donde J puede ser mucho menor que N y, en consecuencia, la sumatoria modal de la ecuación (12.9.7) se trunca. Por lo tanto, sólo es necesario calcular las frecuencias naturales, los modos naturales y la respuesta $D_n(t)$ para los J primeros modos, lo que implica un ahorro de cálculo.

Antes de estudiar las contribuciones relativas a la respuesta de los distintos modos de vibración y el número de modos que se deben incluir para ejemplos específicos, se hará un par de observaciones generales. Si sólo se incluyen los primeros J modos, el error en la respuesta estática es

$$e_J = 1 - \sum_{n=1}^{J} \bar{r}_n \tag{12.11.3}$$

Para una J fija el error e_J depende de la distribución espacial $\mathbf{s}$ de las fuerzas aplicadas. Para cualquier $\mathbf{s}$ el error e_J será cero si se incluyen todos los modos ($J = N$) por la ecuación (12.10.3), y el error será igual a la unidad cuando no haya modos incluidos ($J = 0$). Así, el análisis modal puede truncarse cuando $|e_J|$, el valor absoluto de e_J, sea lo suficientemente pequeño para la cantidad de respuesta r de interés. Sin embargo, los valores relativos de R_{dn} para los distintos modos también influyen en el número mínimo de modos que debe incluirse. R_{dn} depende de la variación del tiempo $p(t)$ de las fuerzas aplicadas y de las propiedades de vibración ω_n y ζ_n para el modo n.

A continuación se estudiarán las contribuciones relativas de los diversos modos a la respuesta y el número de modos que debe incluirse en el análisis dinámico, con referencia a la estructura de la figura 12.8.1 y a las distribuciones $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$ de la fuerza aplicada en la figura 12.8.3. Para este propósito, es necesario investigar los dos factores que influyen: el factor de contribución modal, que depende de la distribución espacial de las fuerzas, y el factor de amplificación dinámica, que es controlado por la variación en el tiempo de las fuerzas.

12.11.1 Factores de contribución modal

En esta sección se describe en primer lugar un procedimiento para determinar los factores de contribución modal para la fuerza cortante en la base V_b y el desplazamiento u_N del techo (N-ésimo piso) de un edificio de varios niveles. En la figura 12.11.1 se muestran las fuerzas externas $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}_n$. Esta última se define mediante la ecuación (12.8.4); en particular, la fuerza lateral al nivel del j-ésimo nivel es el j-ésimo elemento de $\mathbf{s}_n$:

$$s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} \tag{12.11.4}$$

donde m_j es la masa concentrada y ϕ_{jn} es el valor de la forma del n-ésimo modo en el j-ésimo nivel. Como resultado de las fuerzas estáticas $\mathbf{s}_n$ (figura 12.11.1b), la fuerza cortante en la base es

$$V_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^{N} s_{jn} = \Gamma_n \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn} \tag{12.11.5}$$

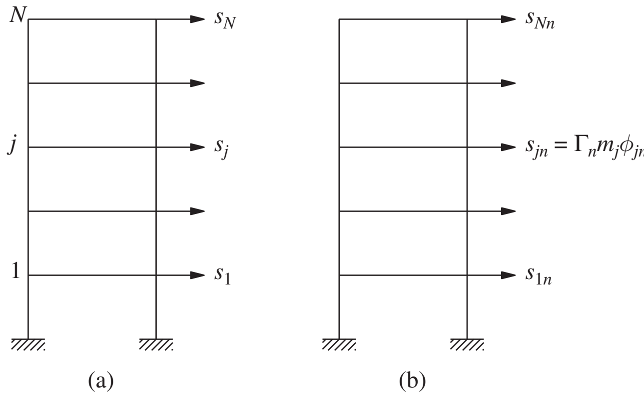


Figura 12.11.1 Fuerzas externas: (a) **s**; (b) $\mathbf{s}_n$.

y los desplazamientos de nivel son $\mathbf{u}_n^{\text{st}} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{s}_n$. Si se inserta la ecuación (12.8.4) y se utiliza la ecuación (10.2.4), resulta $\mathbf{u}_n^{\text{st}} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\boldsymbol{\phi}_n$. En particular, el desplazamiento del techo es

$$u_{Nn}^{\text{st}} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\,\phi_{Nn} \tag{12.11.6}$$

Las ecuaciones (12.11.5) y (12.11.6) definen las respuestas estáticas modales r_n^{st} para la fuerza cortante en la base y el desplazamiento del techo. Con r_n^{st} conocida, el factor de contribución modal se obtiene de la ecuación (12.10.2), donde r^{st} se calcula mediante el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas **s** (figura 12.11.1a).

Ahora se estudiará la manera en que los factores de contribución modal dependen de la distribución espacial de las fuerzas aplicadas. El procedimiento que se acaba de describir se usa a fin de determinar los factores de contribución modal para los desplazamientos del techo y la fuerza cortante en la base de un marco de cortante con cinco niveles (figura 12.8.1) para los dos diferentes vectores de distribución de fuerza $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$ presentados en la sección 12.8. Estos cálculos requieren las expansiones modales de $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$, y los modos naturales del sistema, que están disponibles en las figuras 12.8.2 y 12.8.3. Los factores de contribución modal y sus valores acumulados considerando los primeros *J* modos se presentan en la tabla 12.11.1. De acuerdo con la ecuación (12.10.3), la suma de los factores de contribución modal considerando todos los modos es la unidad, aunque la convergencia puede ser uniforme o no (entendiendo por uniforme que se aproxima progresivamente a un valor determinado). De acuerdo con la estructura y las distribuciones de fuerza consideradas, la tabla 12.11.1 indica que la convergencia es uniforme para el desplazamiento del techo pero no lo es para la fuerza cortante en la base.

Los datos de la tabla 12.11.1 permiten dos observaciones útiles correspondientes a los valores relativos de las respuestas modales:

1. Para una distribución espacial de fuerzas particular, los factores de contribución modal de los modos más altos son más grandes para la fuerza cortante en la base que para el desplazamiento del techo; lo anterior sugiere que los modos superiores contribuyen más a la fuerza cortante en la base (y otras fuerzas elementales) que al desplazamiento del techo (y otros desplazamientos de nivel).
2. En una cantidad de respuesta particular los factores de contribución modal de los modos superiores son más grandes para la distribución de fuerzas $\mathbf{s}_b$ que para $\mathbf{s}_a$, lo que sugiere que los modos superiores contribuyen más a una respuesta en el caso de $\mathbf{s}_b$. Recuerde que la expansión modal de $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$ en la sección 12.8 sugirió la misma conclusión.

TABLA 12.11.1 FACTORES DE CONTRIBUCIÓN MODALES Y ACUMULADOS

Modo n de número de modos, J	Distribución de fuerza, $\mathbf{s}_a$				Distribución de fuerza, $\mathbf{s}_b$			
	Desplazamiento del techo		Cortante en la base		Desplazamiento del techo		Fuerza cortante en la base	
	$\overline{u}_{5n}$	$\sum_{n=1}^{J} \overline{u}_{5n}$	$\overline{V}_{bn}$	$\sum_{n=1}^{J} \overline{V}_{bn}$	$\overline{u}_{5n}$	$\sum_{n=1}^{J} \overline{u}_{5n}$	$\overline{V}_{bn}$	$\sum_{n=1}^{J} \overline{V}_{bn}$
1	0.880	0.880	1.252	1.252	0.792	0.792	1.353	1.353
2	0.087	0.967	−0.362	0.890	0.123	0.915	−0.612	0.741
3	0.024	0.991	0.159	1.048	0.055	0.970	0.431	1.172
4	0.008	0.998	−0.063	0.985	0.024	0.994	−0.242	0.930
5	0.002	1.000	0.015	1.000	0.006	1.000	0.070	1.000

¿Cuántos modos deben incluirse en el análisis modal? En primer lugar, se examina la manera en que el número de modos requeridos para mantener el error en la respuesta estática debajo de algún valor seleccionado se ve influido por la distribución espacial **s** de las fuerzas aplicadas. Si el objetivo es mantener $|e_J| < 0.05$ (5%) para la fuerza cortante en la base, los datos de la tabla 12.11.1 indican que tres modos serán suficientes para la distribución de fuerza $\mathbf{s}_a$, mientras que en el caso de $\mathbf{s}_b$ serán necesarios cinco modos. Si se considera la misma precisión en el desplazamiento del techo, dos modos serán suficientes para la distribución de fuerza $\mathbf{s}_a$ y se requerirán tres modos en el caso de $\mathbf{s}_b$. Es necesario incluir más modos para la distribución de fuerza $\mathbf{s}_b$ que para $\mathbf{s}_a$ porque, como se mencionó anteriormente, los factores de contribución modal de los modos superiores son más grandes para $\mathbf{s}_b$ que para $\mathbf{s}_a$.

A continuación se examina la manera en que el número de modos requeridos está influenciado por la cantidad de respuesta de interés. Si el objetivo es mantener $|e_J| < 0.05$ (5%), se deben incluir tres modos a fin de determinar la fuerza cortante en la base para la distribución de la fuerza $\mathbf{s}_a$, mientras que dos modos serían suficiente para el desplazamiento del techo. Si se desea conseguir la misma precisión para la distribución de la fuerza $\mathbf{s}_b$, se requieren los cinco modos para la fuerza cortante en la base, mientras que tres modos serían suficiente para el desplazamiento del techo. Es necesario incluir más modos para la fuerza cortante en la base que para el desplazamiento del techo, puesto que, como se mencionó anteriormente, los factores de contribución modal de los modos superiores son más grandes para la fuerza cortante en la base que para el desplazamiento del techo.

No es necesario repetir el análisis anterior para todas las cantidades de respuesta. En cambio, se deben identificar algunas de las cantidades de respuesta claves, en especial aquellas que pueden ser sensibles a los modos más altos para decidir el número de modos que se incluirán en el análisis modal.

12.11.2 Factor de amplificación dinámica

Ahora se estudiará la manera en que las contribuciones modales a la respuesta dependen de la variación en el tiempo de la excitación. La respuesta dinámica a $p(t)$ se caracteriza por el factor de amplificación dinámica R_{dn} en la ecuación (12.11.2). Este factor se dedujo

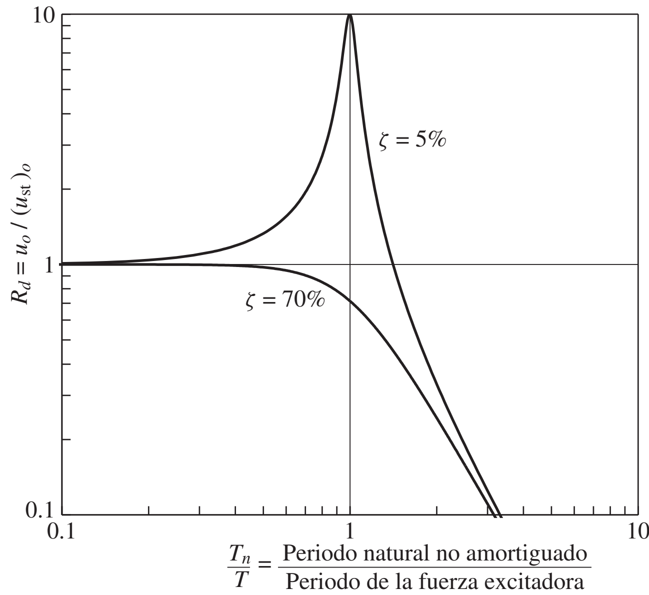


Figura 12.11.2 Factor de amplificación dinámica para la fuerza armónica; $\zeta = 5\%$ y 70%.

en el capítulo 3 para la excitación armónica (figura 3.2.6), y en el capítulo 4 para otras excitaciones, incluyendo el pulso sinusoidal de medio ciclo (figura 4.8.3c). En la figura 12.11.2 se grafica R_d para una fuerza armónica de periodo T contra T_n/T para los sistemas de 1GDL con periodo natural T_n y dos razones de amortiguamiento: $\zeta = 5$ y 70%; en la figura 12.11.3 se grafica R_d para una fuerza de pulso sinusoidal de medio ciclo con duración t_d contra T_n/t_d para los sistemas de 1GDL sin amortiguamiento.

La forma en que R_{dn}, el valor de R_d en el n-ésimo modo, para una excitación $p(t)$ dada varía con n depende del sitio donde los periodos naturales T_n caen en la escala del periodo. En el caso de la excitación de pulso, la figura 12.11.3 muestra que R_{dn} varía en un intervalo estrecho para un intervalo amplio de T_n y podría tener valores similares para varios modos. Por lo tanto, en la mayoría de los casos tendrían que incluirse varios modos en el análisis modal con sus contribuciones de respuesta relativa, ecuación (12.11.2), determinadas en su mayor parte mediante los valores relativos de $\bar{r}_n$, los factores de contribución modal. Esta

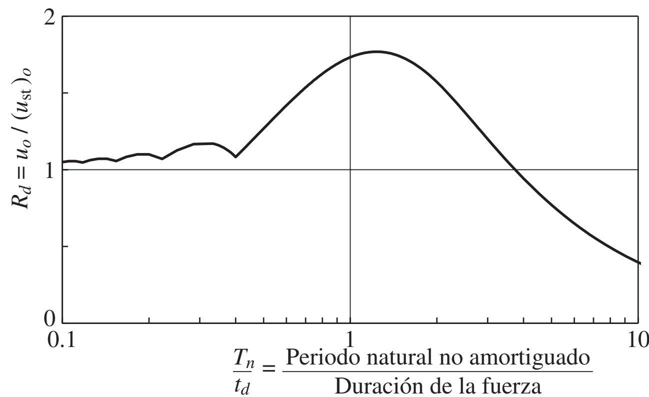


Figura 12.11.3 Factor de amplificación dinámica para una fuerza de pulso de medio ciclo; $\zeta = 0$.

misma conclusión también se aplica a los sistemas altamente amortiguados sometidos a una fuerza armónica, puesto que, como se ve en la figura 12.11.2, existen varios modos que podrían tener valores similares de R_{dn}. Por otra parte, para los sistemas ligeramente amortiguados sometidos a una excitación armónica, la figura 12.11.2 indica que R_{dn} es muy grande para los modos con periodo natural T_n cercano al periodo T de la fuerza excitadora. Estos modos contribuirían mucho a la respuesta y son, quizá, los únicos modos que deben incluirse en el análisis modal, a menos que sus factores de contribución modal $\bar{r}_n$ sean mucho menores que para algunos otros modos.

Para explorar a mayor profundidad estas ideas considere el marco de cortante de cinco niveles (figura 12.8.1), sin amortiguamiento y sometido a las fuerzas armónicas $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_b p(t)$, donde $p(t) = p_o \text{sen}(2\pi/T)$. Además, considere cuatro valores diferentes del periodo de la fuerza excitadora T relativos al periodo fundamental natural del sistema: $T_1/T = 0.75$, 2.75, 3.50 y 4.30. Para cada uno de estos periodos de la fuerza excitadora en la figura 12.11.4 se identifican los valores R_{dn} para los cinco periodos naturales del sistema (definidos en la sección 12.8). Estos datos permiten las siguientes observaciones en cada uno de los cuatro casos:

1. $T_1/T = 0.75$ (figura 12.11.4a): R_{dn} es más grande para el primer modo, y R_{d1} es mucho mayor que cualquier otro R_{dn}. El R_{d1} más grande combinado con el factor de contribución modal mayor $\bar{V}_{b1}$ para el primer modo, en comparación con estos factores $\bar{V}_{bn}$ para los otros modos (tabla 12.11.1), hará que la respuesta del primer modo sea la más grande. Observe que R_{dn} para los modos más altos es cercano a 1, lo que indica que la respuesta en estos modos es en esencia estática.
2. $T_1/T = 2.75$ (figura 12.11.4b): Para este caso $T_2/T = 0.943$ y, por lo tanto, $R_{d2} = 8.89$ es mucho mayor que los otros R_{dn}. Así, la respuesta del segundo modo dominará todas las respuestas modales, incluso la respuesta del primer modo, aunque $\bar{V}_{b1} = 1.353$ es más de dos veces $\bar{V}_{b2} = -0.612$. El segundo modo puede proporcionar por sí solo un resultado razonablemente preciso.
3. $T_1/T = 3.5$ (figura 12.11.4c): R_{d2} y R_{d3} son similares en magnitud, mucho más grandes que R_{d1}, y significativamente más grandes que R_{d4} y R_{d5}. Esto sugiere que las contribuciones a la respuesta del segundo y tercer modos serían las más grandes. La respuesta del segundo modo excede a la respuesta del tercer modo porque la magnitud de $\bar{V}_{b2} = -0.612$ es mayor que $\bar{V}_{b3} = 0.431$.
4. $T_1/T = 4.3$ (figura 12.11.4d): Para este caso el periodo del tercer modo es el más cercano al periodo de excitación ($T_3/T = 0.935$) y, por lo tanto, $R_{d3} = 7.89$ es mucho mayor que los otros R_{dn}. Así, la respuesta del tercer modo dominará a todas las respuestas modales, incluso a la respuesta del primer modo, aunque $\bar{V}_{b1} = 1.353$ exceda a $\bar{V}_{b3} = 0.431$ por un factor de más de 3. El tercer modo por sí solo puede proporcionar un resultado razonablemente preciso.

Para determinar cuáles de los valores R_{dn} son significativos no es necesario calcular todos los periodos naturales de un sistema con muchos grados de libertad. Sólo se requiere calcular y localizar en la gráfica que muestra el factor de amplificación dinámico algunos de los primeros periodos naturales. Después, las ubicaciones aproximadas de los periodos naturales superiores se hacen evidentes, lo que proporciona suficiente información para estimar el intervalo de valores R_{dn} y tomar una decisión preliminar sobre los modos que

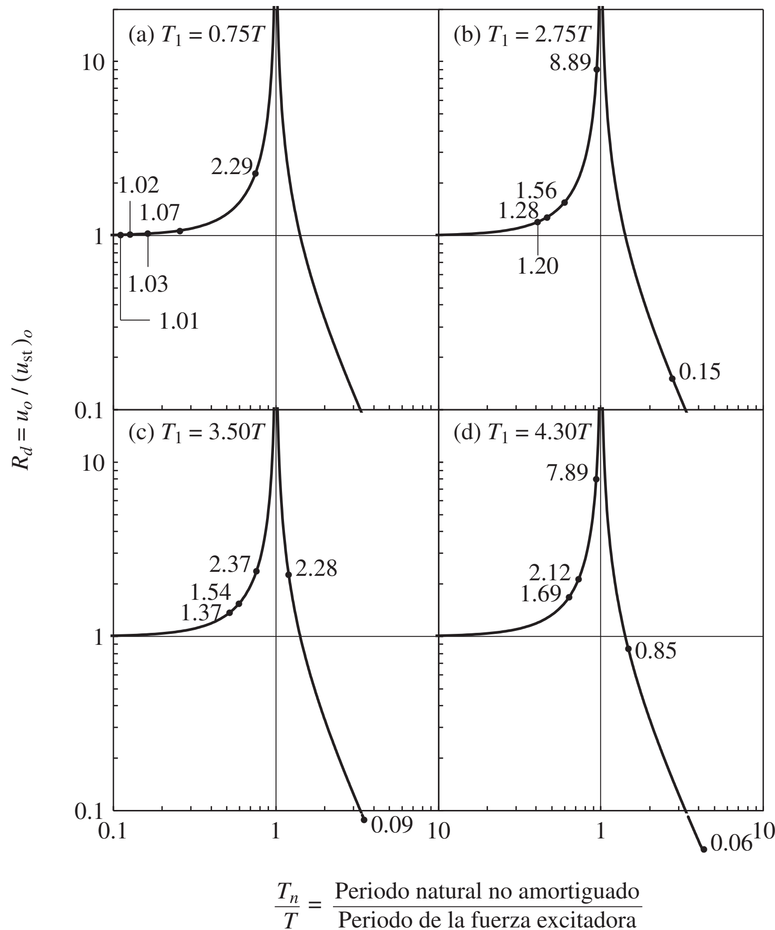


Figura 12.11.4 Factores de amplificación dinámica R_{dn} para los cinco modos del sistema no amortiguado y cuatro períodos de la fuerza excitadora T: (a) $T_1 = 0.75T$; (b) $T_1 = 2.75T$; (c) $T_1 = 3.50T$; (d) $T_1 = 4.30T$.

pueden contribuir mucho a la respuesta. De esta manera, es posible calcular los valores precisos de R_{dn} para estos modos e incluirlos en el análisis modal.

Al juzgar la contribución de un modo natural a la respuesta dinámica de la estructura es necesario tener en cuenta los efectos combinados del factor de contribución modal $\bar{r}_n$ y el factor de amplificación dinámica R_{dn}. Los dos factores se han analizado en forma separada en ésta y las anteriores secciones porque $\bar{r}_n$ depende de la distribución espacial **s** de las fuerzas aplicadas, mientras que R_{dn} depende de la variación en el tiempo $p(t)$ de la excitación. Sin embargo, ambos entran en la respuesta modal, ecuación (12.11.2). Al retener sólo los primeros modos con valores significativos de $\bar{r}_n$ o R_{dn}, o ambos, es posible reducir el esfuerzo de cálculo. Los ahorros de cálculo resultantes pueden no ser significativos en el análisis dinámico de sistemas con pocos grados de libertad, como el marco de cortante de cinco niveles que se considera aquí. Sin embargo, en el caso de las estructuras prácticas y complejas

cuya idealización puede requerir cientos o miles de grados de libertad, sí es posible lograr una reducción sustancial en los cálculos.

PARTE D: PROCEDIMIENTOS ESPECIALES DE ANÁLISIS

12.12 MÉTODO DE CORRECCIÓN ESTÁTICA

En la sección 12.11 se demostró que el factor de amplificación dinámica R_{dn} para algunos de los modos más altos de una estructura puede ser sólo un poco mayor que la unidad. Para el marco de cortante de cinco niveles sometido a una excitación armónica con $T_1/T = 0.75$, $R_{dn} = 1.07$, 1.03, 1.02 y 1.01, para el segundo, tercero, cuarto y quinto modos, respectivamente (figura 12.11.4a). Tal es el caso cuando el periodo del modo mayor T_n es mucho más corto que el periodo T de la excitación armónica o la duración t_d de una excitación impulsiva (figura 12.11.3). La respuesta de tal modo superior podría determinarse mediante un análisis estático, que es más sencillo que un análisis dinámico. Ésta es la esencia del *método de corrección estática*, que se desarrolla a continuación.

Suponga que en el análisis se incluyen los N modos, pero se dividen en dos partes: (1) los primeros N_d modos con periodos naturales T_n de tal forma que los efectos dinámicos sean significativos, como lo indica el hecho de que R_{dn} sea muy diferente de 1; y (2) los modos de N_d+1 a N con periodos naturales T_n de tal forma que R_{dn} sea cercano a 1. Entonces, las contribuciones modales a la respuesta pueden dividirse en dos partes:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N_d} r_n(t) + \sum_{n=N_d+1}^{N} r_n(t) \qquad (12.12.1)$$

La respuesta $r_n(t)$ del n-ésimo modo está dada por la ecuación (12.10.1), donde $D_n(t)$ es la respuesta dinámica del n-ésimo modo del sistema de 1GDL regido por la ecuación (12.9.2). Una solución cuasi-estática de esta ecuación da $D_n(t)$ para los modos de N_d+1 a N; si se descartan la velocidad $\dot{D}_n(t)$ y la aceleración $\ddot{D}_n(t)$, se llega a

$$\omega_n^2 D_n(t) = p(t) \qquad (12.12.2)$$

Al sustituir las ecuaciones (12.10.1) y (12.12.2) en la ecuación (12.12.1) se obtiene

$$r(t) = r^{\text{st}} \sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n \left[\omega_n^2 D_n(t)\right] + r^{\text{st}} p(t) \sum_{n=N_d+1}^{N} \bar{r}_n \qquad (12.12.3)$$

Por lo tanto, la ecuación (12.9.2) debe resolverse mediante procedimientos de análisis dinámico (por ejemplo, la solución analítica o la integración numérica de la ecuación diferencial) sólo para los primeros N_d modos. Sin embargo, la ecuación (12.12.3) sugiere que los factores de contribución modal $\bar{r}_n$ siguen siendo necesarios para los modos superiores $N_d + 1$

a N y, como se ha visto anteriormente, las frecuencias y los modos naturales del sistema son requisitos para calcular $\bar{r}_n$.

Por lo tanto, se busca una manera de eludir este requisito al reescribir

$$\sum_{n=N_d+1}^{N} \bar{r}_n = \sum_{n=1}^{N} \bar{r}_n - \sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n = 1 - \sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n \tag{12.12.4}$$

donde se ha utilizado la ecuación (12.10.3). Si se sustituye la ecuación (12.12.4) en (12.12.3), resulta

$$r(t) = r^{\text{st}} \left[\sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n \left(\omega_n^2 D_n(t)\right) + \left(1 - \sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n\right) p(t) \right] \tag{12.12.5}$$

o

$$r(t) = r^{\text{st}} \left[p(t) + \sum_{n=1}^{N_d} \bar{r}_n \left(\omega_n^2 D_n(t) - p(t)\right) \right] \tag{12.12.6}$$

Cuando la ecuación se escribe en alguna de estas formas, sólo se requieren las primeras N_d frecuencias naturales y los primeros N_d modos naturales para calcular la respuesta dinámica. En la ecuación (12.12.5) el segundo término entre corchetes es la solución de la respuesta cuasi-estática de los modos superiores, $n = N_d+1$ a N, que puede considerarse como la corrección estática a la solución de la respuesta dinámica dada por el primer término. Es por ello que este método se conoce como el *método de corrección estática*.

El método de corrección estática es efectivo en el análisis donde deben incluirse muchos de los modos más altos para representar de manera satisfactoria la distribución espacial **s** de las fuerzas aplicadas, pero donde la fuerza de excitación $p(t)$ es tal que el factor de respuesta dinámica para sólo unos pocos de los modos más bajos es muy diferente de 1. En estas situaciones, la respuesta dinámica combinada de estos pocos modos junto con el término de corrección estática da resultados comparables a un análisis modal clásico que incluye muchos más modos. Si $p(t)$ se define de manera numérica, el método de corrección estática requiere mucho menos esfuerzo de cálculo al evitar la solución numérica por pasos de tiempo para los modos superiores y estáticamente significativos. Los ahorros de cálculo pueden ser sustanciales debido a que el paso de tiempo a utilizar en la solución numérica de las ecuaciones modales superiores debe ser muy corto (capítulos 5 y 16).

Ejemplo 12.7

Calcule la fuerza cortante en la base del marco de cortante uniforme de cinco niveles que se muestra en la figura 12.8.1, para $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_b p(t)$, donde $\mathbf{s}_b^T = \langle 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2 \rangle$ y $p(t) = p_o$ sen ωt mediante dos métodos: **(a)** el análisis modal clásico, y **(b)** el método de corrección estática; $\omega/\omega_1 = T_1/T = 0.75$ y el sistema es no amortiguado. Calcule sólo la respuesta de estado estacionario.

Solución (a) *Análisis modal clásico*. La respuesta del n-ésimo modo está dada por la ecuación (12.10.1). La solución de estado estacionario de la ecuación (12.9.2) con $\zeta_n = 0$ y $p(t)$ armónica es

$$D_n(t) = \frac{p_o}{\omega_n^2} R_{dn} \text{ sen } \omega t \qquad R_{dn} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{a}$$

Observe que este R_{dn} puede ser positivo o negativo, en contraste con el valor absoluto utilizado en el capítulo 3 y en la figura 12.11.4. La conservación del signo algebraico es útil cuando se trata con la respuesta de estado estacionario de sistemas no amortiguados a una excitación armónica. Al sustituir la ecuación (a) en la ecuación (12.10.1), se obtiene la respuesta en el n-ésimo modo:

$$r_n(t) = p_o r^{\text{st}} \bar{r}_n R_{dn} \text{ sen } \omega t \tag{b}$$

Si se combinan las contribuciones de todos los modos, resulta la respuesta total:

$$r(t) = p_o r^{\text{st}} \left(\sum_{n=1}^{N} \bar{r}_n R_{dn} \right) \text{sen } \omega t \tag{c}$$

y su valor máximo es

$$r_o = p_o r^{\text{st}} \sum_{n=1}^{N} \bar{r}_n R_{dn} \tag{d}$$

La ecuación (d) especificada para la fuerza cortante en la base puede expresarse como

$$\frac{V_{bo}}{p_o V_b^{\text{st}}} = \sum_{n=1}^{N} \overline{V}_{bn} R_{dn} \tag{e}$$

Para el sistema de la figura 12.8.1, $N = 5$ y la fuerza cortante en la base estática debida a las fuerzas $\mathbf{s}_b$ (figura 12.8.3) es $V_b^{\text{st}} = 1$. Por lo tanto, la ecuación (e) se convierte en

$$\frac{V_{bo}}{p_o} = \sum_{n=1}^{5} \overline{V}_{bn} R_{dn} \tag{f}$$

La sustitución de los factores de contribución modal $\overline{V}_{bn}$ tomados de la tabla 12.11.1 y el cálculo de R_{dn} a partir de la ecuación (a), conducen a

$$\begin{aligned} \frac{V_{bo}}{p_o} &= \overline{V}_{b1} R_{d1} + \overline{V}_{b2} R_{d2} + \overline{V}_{b3} R_{d3} + \overline{V}_{b4} R_{d4} + \overline{V}_{b5} R_{d5} \\ &= (1.353)\,(2.29) + (-0.612)\,(1.07) + (0.431)\,(1.03) + (-0.242)\,(1.02) \\ &\quad + (0.070)\,(1.01) \\ &= 2.71 \end{aligned}$$

(b) *Método de corrección estática*. Si se especifica la ecuación (12.12.6) para la fuerza cortante en la base:

$$V_b(t) = V_b^{\text{st}} \left[p(t) + \sum_{n=1}^{N_d} \overline{V}_{bn} \left(\omega_n^2 D_n(t) - p(t) \right) \right] \tag{g}$$

Al sustituir para V_b^{st}, p_o, y $D_n(t)$ a partir de la ecuación (a), se obtiene

$$V_b(t) = p_o \text{ sen } \omega t \left[1 + \sum_{n=1}^{N_d} \overline{V}_{bn} (R_{dn} - 1) \right] \tag{h}$$

El valor máximo V_{bo} de la fuerza cortante en la base está dado por

$$\frac{V_{bo}}{p_o} = 1 + \sum_{n=1}^{N_d} \overline{V}_{bn} (R_{dn} - 1) \tag{i}$$

Suponga que sólo se considera la respuesta dinámica en el primer modo. En ese caso, $N_d = 1$ y la ecuación (i) da

$$\frac{V_{bo}}{p_o} = 1 + \overline{V}_{b1}\,(R_{d1} - 1) = 1 + 1.353(2.29 - 1) = 2.75$$

Este resultado es cercano al resultado exacto de 2.71 obtenido a partir de las soluciones de la respuesta dinámica para todos los modos. Esta buena concordancia se previó en la sección 12.11.2, donde se observó que los R_{dn} para $n > 1$ fueron sólo un poco mayores que 1.

Observe que, en este caso especial de la respuesta de estado estacionario de sistemas no amortiguados a una excitación armónica, tanto $p(t)$ como $D_n(t)$ varían como el sen ωt. Sin embargo, la variación en el tiempo de D_n(t) suele ser diferente a la de $p(t)$.

12.13 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN DE LA ACELERACIÓN MODAL

Otro método que puede proporcionar el mismo efecto general que el método de corrección estática, llamado *método de superposición de la aceleración modal*, puede deducirse con facilidad a partir de las ecuaciones de movimiento modal. La respuesta total es la suma de las contribuciones modales a la respuesta, ecuación (12.10.1):

$$r(t) = r^{\text{st}} \sum_{n=1}^{N} \overline{r}_n \left[\omega_n^2 D_n(t)\right] \tag{12.13.1}$$

donde $D_n(t)$ se rige por la ecuación (12.9.2), que puede reescribirse como

$$\omega_n^2 D_n(t) = p(t) - \ddot{D}_n(t) - 2\zeta_n\,\omega_n \dot{D}_n(t) \tag{12.13.2}$$

Si se sustituye la ecuación (12.13.2) en la ecuación (12.13.1), resulta

$$r(t) = r^{\text{st}} \sum_{n=1}^{N} \overline{r}_n \left[p(t) - \ddot{D}_n(t) - 2\zeta_n\omega_n \dot{D}_n(t)\right]$$

que, por medio de la ecuación (12.10.3), puede expresarse como

$$r(t) = r^{\text{st}} p(t) - r^{\text{st}} \sum_{n=1}^{N} \overline{r}_n [\ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{D}_n(t)] \tag{12.13.3}$$

Esto puede interpretarse como la solución cuasi-estática dada por el primer término en el lado derecho, modificado por el segundo término para obtener la respuesta dinámica del sistema. Si la respuesta de un modo superior, por ejemplo el n-ésimo modo, es estática, el n-ésimo término de la sumatoria será insignificante. Por lo tanto, si la respuesta en todos los modos más altos que los primeros N_d modos es estática, la sumatoria puede truncarse en consecuencia para obtener

$$r(t) = r^{\text{st}} \left\{ p(t) - \sum_{n=1}^{N_d} \overline{r}_n\,[\ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{D}_n(t)] \right\} \tag{12.13.4}$$

Este método se conoce normalmente como el *método de superposición de la aceleración modal* puesto que la ecuación (12.13.4) consiste en la superposición de las aceleraciones $\ddot{D}_n$ (y de las velocidades modales $\dot{D}_n$) en lugar de los desplazamientos modales D_n.

El método de superposición de la aceleración modal es equivalente al método de corrección estática, lo que se hace evidente al comparar las ecuaciones (12.13.4) y (12.12.6) teniendo en cuenta la ecuación (12.9.2). Por lo tanto, los dos métodos deberían proporcionar resultados idénticos excepto por pequeñas diferencias que surgen de su implementación numérica. La elección entre los dos métodos suele estar dictada por la facilidad de implementación en un código de computadora. A este respecto, el método de corrección estática es, en general, más conveniente debido a que requiere la modificación sencilla del análisis modal clásico (o el método de superposición del desplazamiento modal clásico). En el procedimiento clásico el primer término de la ecuación (12.12.5) se calcula de cualquier manera para el número de modos N_d especificado. Para estos modos los factores de contribución modal $\bar{r}_n$ están disponibles, por lo que el segundo término puede calcularse con poco esfuerzo adicional.

12.14 MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN DE LA ACELERACIÓN MODAL: EXCITACIÓN ARBITRARIA

Ahora que se entienden los conceptos detrás de los métodos de corrección estática y de superposición de la aceleración modal, dos métodos equivalentes, se presenta un último método para las fuerzas arbitrarias $\mathbf{p}(t)$, es decir, para las fuerzas no limitadas a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, junto con un ejemplo completo. Las fuerzas ejercidas por las olas sobre las plataformas de perforación marinas son un ejemplo de tal excitación.

La respuesta de desplazamiento de un sistema de N grados de libertad está dada por la ecuación (12.5.2), que se repite aquí por conveniencia:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) \tag{12.14.1}$$

donde la coordenada modal $q_n(t)$ está regida por la ecuación (12.4.6):

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \tag{12.14.2}$$

donde $P_n(t)$ y M_n fueron definidos en la ecuación (12.3.4). En el método de superposición de la aceleración la respuesta debida a los modos inferiores a N_d se determina por análisis dinámico, es decir, al resolver la ecuación (12.14.2), mientras que las contribuciones de los modos de N_d+1 a N se determinan por análisis estático. Si se descartan los términos de la velocidad $\dot{q}_n(t)$ y la aceleración $\ddot{q}_n(t)$, la ecuación (12.14.2) da la solución cuasi-estática $q_n(t) = P_n(t)K_n$, donde la rigidez generalizada del n-ésimo modo $K_n = \omega_n^2 M_n$; vea la ecuación (10.4.7). Al sustituir esta $q_n(t)$ en los términos asociados con $n = N_d+1$ a N en la ecuación (12.14.1), se obtiene

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N_d} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) + \sum_{n=N_d+1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n \frac{P_n(t)}{K_n} \tag{12.14.3}$$

donde un término individual en la segunda sumatoria representa la contribución del n-ésimo modo a la respuesta estática. Si se reescribe la segunda sumatoria como

$$\sum_{n=N_d+1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n \frac{P_n(t)}{K_n} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n \frac{P_n(t)}{K_n} - \sum_{n=1}^{N_d} \boldsymbol{\phi}_n \frac{P_n(t)}{K_n}$$

y se observa que la primera sumatoria incluye todos los modos y que, por lo tanto, representa la respuesta cuasi-estática (total) de la estructura a $\mathbf{p}(t)$, la ecuación anterior se convierte en

$$\sum_{n=N_d+1}^{N} \phi_n \frac{P_n(t)}{K_n} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) - \sum_{n=1}^{N_d} \phi_n \frac{P_n(t)}{K_n} \tag{12.14.4}$$

Al sustituir la ecuación (12.14.4) en la ecuación (12.14.3), se obtiene

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) + \sum_{n=1}^{N_d} \phi_n \left[q_n(t) - \frac{P_n(t)}{K_n} \right] \tag{12.14.5}$$

El procedimiento de análisis incorporado en la ecuación (12.14.5), que es una versión generalizada de la ecuación (12.12.6), se conoce como el *método de corrección estática*.

Para expresar la ecuación (12.14.5) en términos de la velocidad modal $\dot{q}_n$ y la aceleración modal $\ddot{q}_n$, la ecuación (12.14.2) se divide entre ω_n^2 y se reescribe como

$$q_n(t) - \frac{P_n(t)}{K_n} = -\left[\frac{2\zeta_n}{\omega_n} \dot{q}_n(t) + \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{q}_n(t) \right] \tag{12.14.6}$$

Si se sustituye la ecuación (12.14.6) en la ecuación (12.14.5), resulta

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t) - \sum_{n=1}^{N_d} \phi_n \left[\frac{2\zeta_n}{\omega_n} \dot{q}_n(t) + \frac{1}{\omega_n^2} \ddot{q}_n(t) \right] \tag{12.14.7}$$

El procedimiento de análisis incorporado en la ecuación (12.14.7), que es una versión generalizada de la ecuación (12.13.4), se conoce como el *método de superposición de la aceleración modal*. El primer término en la ecuación (12.14.7) representa la solución cuasi-estática, y la sumatoria representa una corrección aplicada a la respuesta cuasi-estática para obtener la respuesta dinámica.

A partir de la deducción anterior es evidente que el método de superposición de la aceleración modal es equivalente al método de corrección estática. Para cualquiera de los métodos es necesario decidir N_d, el número de modos para los cuales debe determinarse la respuesta mediante un análisis dinámico. Esta decisión es muy sencilla si las fuerzas de excitación son armónicas con la frecuencia ω. Con referencia a la figura 3.2.6, es evidente que se requiere el análisis dinámico de todos los modos para los que ω/ω_n es tal que el factor de amplificación de deformación R_d difiere significativamente de 1.0, o que el ángulo de fase ϕ difiere significativamente de cero. Es difícil establecer criterios similares y sencillos para las excitaciones no armónicas que varían de manera arbitraria en el tiempo.

12.14.1 EJEMPLO

El sistema considerado es una torre en voladizo uniforme de longitud L, masa por unidad de longitud m, rigidez a la flexión EI y fracción de amortiguamiento del 5% en todos los modos naturales de vibración (figura 12.14.1a). Para los propósitos del análisis dinámico se identifican los grados de libertad y el sistema se discretiza con 10 masas concentradas, como se muestra en la figura 12.14.1b, donde $m_o = mL/\theta$. Las fuerzas armónicas aplicadas a los grados de libertad

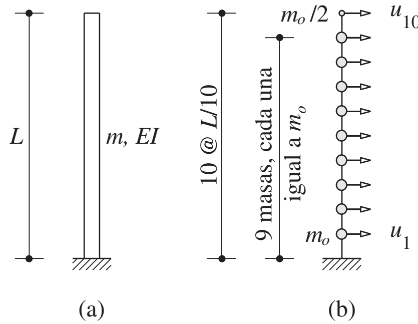


Figura 12.14.1 (a) Torre en voladizo (b) sistema de masa concentrada.

u_9 y u_{10} son $p_9(t) = -2p(t)$ y $p_{10}(t) = p(t)$, donde $p(t) = p_o$ sen ωt con $\omega/\omega_1 = 1.5$, siendo ω_1 la frecuencia natural fundamental del sistema†; en ninguno de los otros grados de libertad se aplican fuerzas. Así, las fuerzas tienen la forma $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, donde su distribución espacial está definida por $\mathbf{s} = \langle 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 1 \rangle$. La expansión modal de **s** (sección 12.8) conduce a las contribuciones modales $\mathbf{s}_n$, mostradas en la figura 12.14.2, donde se observa que las contribuciones de los modos del 4 al 9 son más grandes que las de los modos del 1 al 3; lo anterior sugiere que estos modos superiores pueden contribuir de manera significativa a la respuesta dinámica.

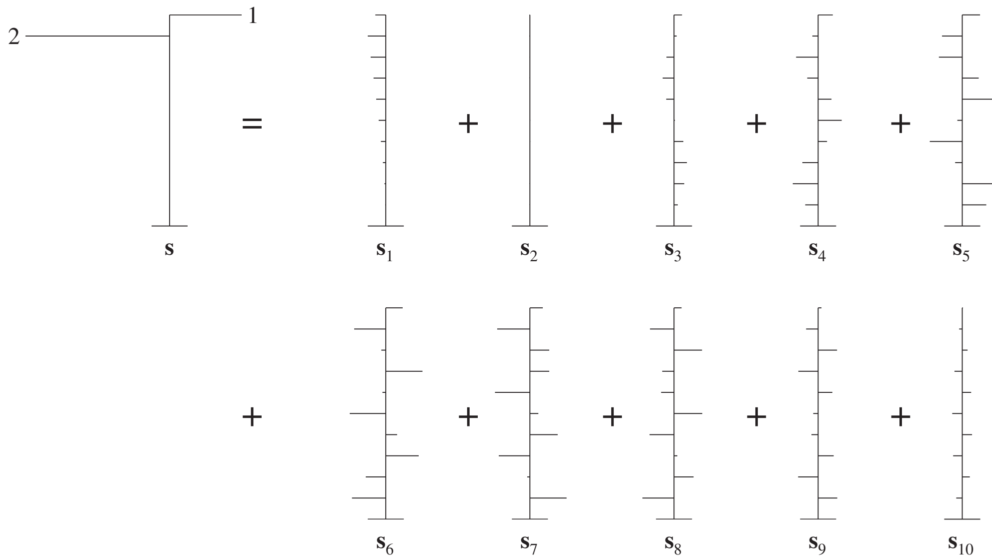


Figura 12.14.2 Expansión modal de la distribución de la fuerza s; las fuerzas s_n, que se muestran sin puntas de flecha, están trazadas a la misma escala que s, pero no se incluyen los valores numéricos.

†Aunque estas fuerzas pertenecen a la clase restringida $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, se utilizarán las ecuaciones (12.14.7), (12.5.2) y (12.6.1) para implementar el análisis dinámico del sistema en la clase restringida y no se usarán los procedimientos de las secciones 12.9 y 12.13.

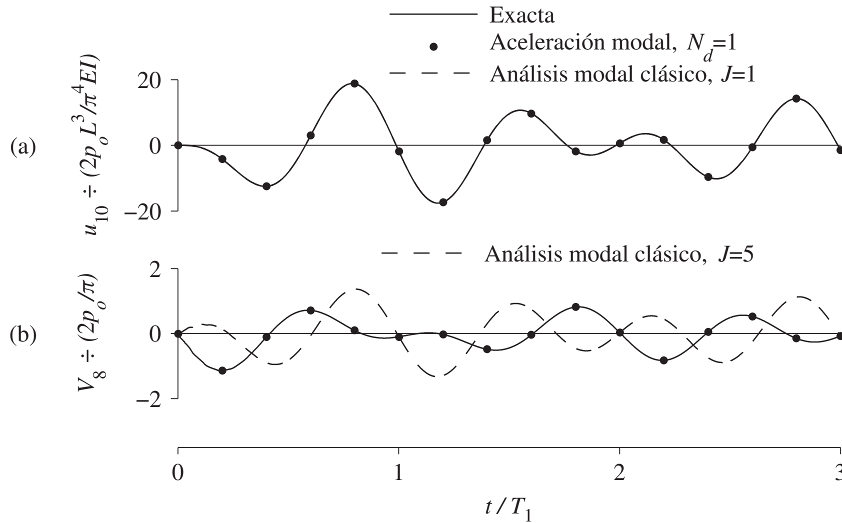


Figura 12.14.3 Historia de la respuesta determinada mediante dos métodos de análisis modal aproximado (clásico y de superposición de la aceleración modal) comparada con la respuesta exacta; (a) $u_{10}(t)$ y (b) $V_8(t)$.

Los resultados aproximados para la respuesta dinámica del sistema obtenidos mediante dos métodos (el método de superposición de la aceleración modal, ecuación 12.14.7, con $N_d = 1$ y el análisis modal clásico, incluyendo las contribuciones de los primeros $J = 1$, 3 o 5 modos, en las ecuaciones 12.5.2 y 12.6.1) se comparan con el resultado exacto, que puede obtenerse al incluir las contribuciones de todos los modos en el análisis modal clásico o al elegir $N_d = 10$ en la ecuación (12.14.7); ambos métodos dan resultados idénticos. En la figura 12.14.3 se presenta la variación en el tiempo de dos cantidades de respuesta [el desplazamiento $u_{10}(t)$ en el extremo libre y la fuerza cortante $V_8(t)$ en la sección justo por encima del grado de libertad u_8]. Para la obtención de estos resultados se incluyeron las partes combinadas de los estados estacionario y transitorio (vea la sección 3.2.1) de $q_n(t)$, a partir de las condiciones iniciales de “reposo”. En la figura 12.14.4 se muestra la distribución de valores máximos de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes según la altura, considerando sólo la parte de la respuesta en estado estacionario. Para facilitar la visualización de los resultados se ajustaron funciones suavizadas a los valores de estas fuerzas internas determinadas en las ubicaciones de los 10 grados de libertad.

Estos resultados permiten las siguientes observaciones: el método de aceleración modal con $N_d = 1$ proporciona los resultados exactos para los desplazamientos y las fuerzas. Esto es así porque los valores de R_d, definidos por la ecuación (3.2.11) para ω/ω_n y asociados con los modos 2, 3 y 4, son 1.061, 1.007 y 1.002; y los valores de R_d asociados con los modos más altos son aún más cercanos a 1.0, lo que implica que las contribuciones a la respuesta de los modos del 2 al 10 pueden determinarse mediante el análisis estático; es decir, sólo la respuesta debida al primer modo se determina mediante el análisis dinámico. En contraste, el análisis modal clásico que incluye un modo proporciona excelentes resultados para el desplazamiento pero, incluso cuando se incluye un máximo de cinco modos, el momento y las fuerzas cortantes son inexactos en un grado inaceptable; se deben incluir hasta nueve modos para obtener resultados exactos en las fuerzas cortantes. El hecho de que

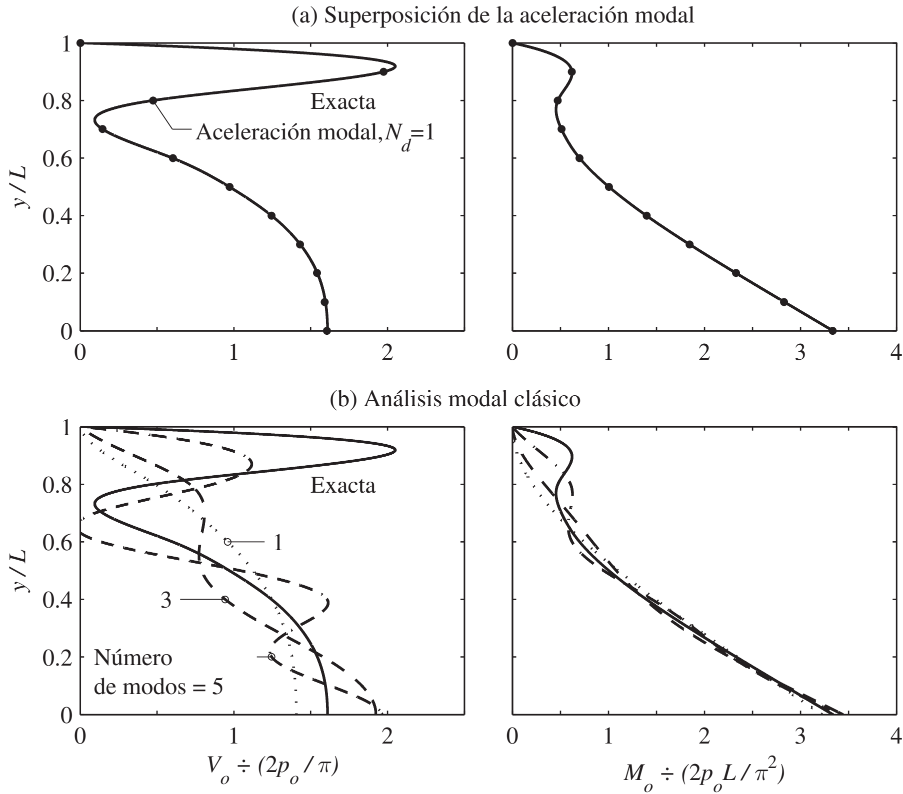


Figura 12.14.4 Distribuciones según la altura de las fuerzas cortantes y los momentos máximos debidos a una excitación armónica con $\omega/\omega_1 = 1.5$: (a) superposición de la aceleración modal; (b) análisis modal clásico.

los modos más altos contribuyan más a la fuerza cortante que a los momentos, y más a los momentos que a los desplazamientos, se basa en un análisis (no presentado aquí) similar al de la sección 12.11 para los factores de contribución modal, determinados a partir de la ecuación (12.10.2).

El análisis anterior se repitió para las fuerzas de excitación $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, donde $\mathbf{s}$ se definió con anterioridad y $p(t)$ es una fuerza escalonada que salta súbitamente desde cero hasta p_o y se mantiene constante (figura 4.3.1b). Las distribuciones según la altura de los valores máximos de los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes se presentan en la figura 12.14.5. Para esta excitación, el método de la aceleración modal con $N_d = 1$ proporciona buenos resultados para los momentos y las fuerzas cortantes en la parte inferior de la torre, pero es incapaz de reproducir la variación rápida de fuerzas en su parte superior. A medida que N_d aumenta, los resultados mejoran, y $N_d = 5$ da la solución exacta, lo que implica que el análisis dinámico es necesario para determinar las contribuciones a la respuesta de los primeros cinco modos. Esto es así porque el valor de R_d asociado con todos los modos es 1.85[†], por lo que las contribuciones de estos modos no pueden determinarse mediante el análisis estático.

[†]$R_d = u_o/(u_{st})_o$, donde u_o es el valor máximo de $u(t)$ definido por la ecuación (4.3.5).

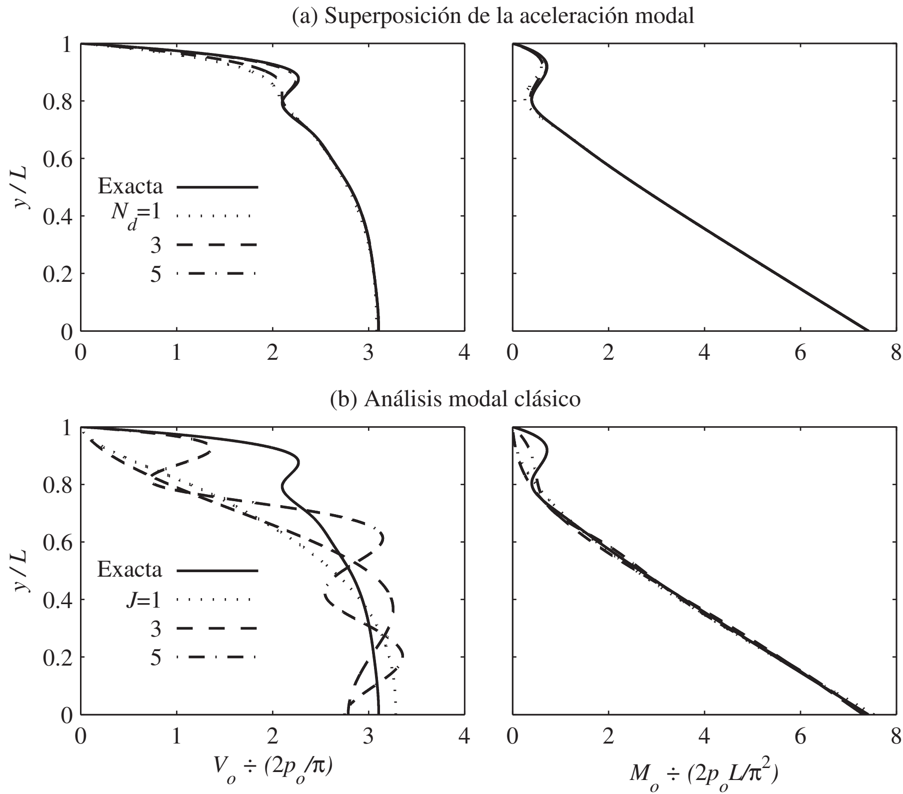


Figura 12.14.5 Distribuciones según la altura de las fuerzas cortantes y los momentos máximos debidos a la fuerza de excitación escalonada: (a) superposición de la aceleración modal; (b) análisis modal clásico.

El hecho de que los valores máximos de las fuerzas determinadas por el método de la aceleración modal no cambien tanto a medida que N_d se incrementa por encima de 5, sugiere que la respuesta estática en los modos del 6 al 10, que ya se incluyen en el primer término de la ecuación (12.14.7), es adecuada. Sin embargo, esta sugerencia no se ve respaldada por el hecho de que el valor de R_d asociado con los modos del 6 al 10 es 1.85, lo cual indica que también se requiere un análisis dinámico para determinar las contribuciones a la respuesta de estos modos. De hecho, dicho análisis es necesario para obtener una descripción precisa de la historia completa de la respuesta; sin embargo, por coincidencia, tenía muy poco efecto sobre la respuesta máxima.

De regreso al análisis modal clásico, la figura 12.4.5 muestra que, a medida que se incrementa el número de modos incluidos, la respuesta máxima se acerca al resultado exacto a un ritmo muy lento en comparación con la convergencia lograda mediante el método de la aceleración modal a medida que aumenta N_d. Incluso si se incluyen cinco modos, el momento flexionante en la parte superior de la torre y las fuerzas cortantes en toda su altura son inexactos en un grado inaceptable.

El método de la aceleración modal es más preciso, puesto que no pierde ningún detalle de la distribución de las fuerzas aplicadas según la altura; están plenamente considerados en la solución estática representada por el primer término de la ecuación (12.14.7), que considera

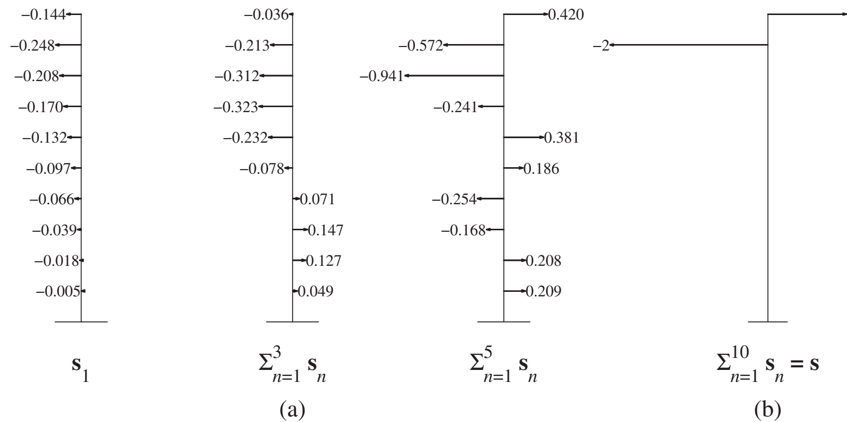


Figura 12.14.6 (a) Distribuciones de fuerza parciales $\sum_{n=1}^{J} \mathbf{s}_n$, $J = 1$, 3 y 5; (b) distribución de la fuerza s completa.

al vector **s** exacto. En contraste, el análisis modal clásico no conserva la distribución completa de la fuerza. Si se incluyen sólo los primeros *J* modos en el análisis modal clásico, éste es equivalente a determinar la respuesta a $\mathbf{p}(t) = p(t)\sum_{n=1}^{J} \mathbf{s}_n$; es decir, sólo considera la distribución de fuerza $\sum_{n=1}^{J} \mathbf{s}_n$. Esta distribución de fuerza parcial se muestra con $J = 1$, 3, 5 y 10 en la figura 12.14.6, donde es evidente que la distribución de la fuerza parcial para $J = 5$ es muy diferente de la distribución de la fuerza **s** completa. Por lo tanto, no es sorprendente que el análisis modal clásico incluyendo los primeros cinco modos no sea capaz de producir resultados precisos para las respuestas (figura 12.14.5).

LECTURAS ADICIONALES

Bisplinghoff, R. L., Ashley, H. y Halfman, R. L., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955.

Craig, R. R., Jr. y Kurdilla, A. J. *Fundamentals of Structural Dynamics*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2006, sección 11.4.

Crandall, S. H. y McCalley, R. B., Jr., "Matrix Methods of Analysis", capítulo 28 en *Shock and Vibration Handbook* (ed. C. M. Haris), McGraw-Hill, Nueva York, 1988.

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1956, pp. 87-105.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, 2a. ed., A. A. Balkema Publishers, Lisse, Países Bajos, 2002, capítulo 10.

PROBLEMAS

Parte A

12.1 En la figura P12.1 se muestra un marco de cortante (es decir, con vigas rígidas), sus masas por nivel y sus rigideces de entrepiso. Esta estructura se somete a una fuerza horizontal armónica $p(t) = p_o$ sen ωt en el piso superior.

(a) Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos en estado estacionario de la estructura mediante dos métodos: (i) la solución directa de las ecuaciones acopladas y (ii) el análisis modal.

(b) Demuestre que ambos métodos dan resultados equivalentes.

(c) Represente en la misma gráfica las dos amplitudes de desplazamiento u_{1o} y u_{2o} como funciones de la frecuencia de excitación. Utilice las normalizaciones adecuadas del desplazamiento y de las escalas de frecuencia. Desprecie el amortiguamiento.

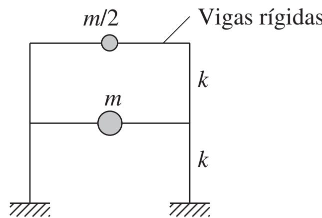


Figura P12.1

12.2 Para el sistema y la excitación del problema 12.1, deduzca las ecuaciones para las fuerzas cortantes de entrepiso (considerando sólo la respuesta de estado estacionario) mediante dos métodos: (**a**) directamente a partir de los desplazamientos (sin introducir fuerzas estáticas equivalentes) y (**b**) utilizando fuerzas estáticas equivalentes. Demuestre que los dos métodos dan resultados similares.

Parte B

12.3 Considere el sistema de la figura P12.1 con fracciones de amortiguamiento modal ζ_n y sometido a la misma excitación. Deduzca las ecuaciones de las amplitudes de desplazamiento para el sistema en estado estacionario.

12.4 El sistema no amortiguado de la figura P12.1 se somete a una fuerza impulsiva en la masa del primer nivel: $p_1(t) = p_o\delta(t)$. Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos laterales del nivel en función del tiempo.

12.5 El sistema no amortiguado de la figura P12.1 se somete a una fuerza aplicada súbitamente en la masa del primer nivel: $p_1(t) = p_o$, $t \geq 0$. Deduzca las ecuaciones para (**a**) los desplazamientos laterales del nivel como una función del tiempo y (**b**) la distorsión de entrepiso en el segundo nivel como una función del tiempo.

12.6 El sistema no amortiguado de la figura P12.1 se somete a una fuerza de pulso rectangular en el primer nivel. El pulso tiene una amplitud p_o y una duración $t_d = T_1/2$, donde T_1 es el periodo fundamental de vibración del sistema. Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos del nivel como funciones del tiempo.

12.7 En la figura P12.7 se muestra un marco de cortante (es decir, con vigas rígidas), los pesos de sus niveles y sus rigideces de entrepiso. Esta estructura se somete a una fuerza armónica $p(t) = p_o$ sen ωt en el nivel superior.

(a) Determine los desplazamientos de estado estacionario como funciones de ω mediante dos métodos: (i) la solución directa de las ecuaciones acopladas y (ii) el análisis modal.

(b) Demuestre que ambos métodos dan el mismo resultado.

(c) Represente en la misma gráfica las tres amplitudes de desplazamiento como una función de la frecuencia de excitación en el rango de frecuencia que va de 0 a $5\omega_1$. Utilice las normalizaciones adecuadas del desplazamiento y de las escalas de frecuencia.

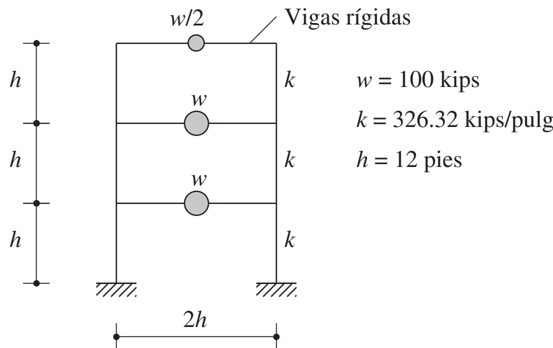


Figura P12.7

12.8 Para el sistema y la excitación del problema 12.7 determine las fuerzas cortantes por nivel (considerando sólo la respuesta en estado estacionario) mediante dos métodos: (**a**) directamente a partir de los desplazamientos (sin introducir fuerzas estáticas equivalentes) y (**b**) utilizando fuerzas estáticas equivalentes. Demuestre que los dos métodos dan resultados idénticos.

12.9 Un excitador de masa excéntrica se monta en el techo del sistema de la figura P12.7. El excitador tiene dos pesos que giran en oposición, cada uno de 20 lb, con una excentricidad de 12 pulg respecto al eje vertical de rotación. Determine las amplitudes de desplazamiento y la aceleración en estado estacionario del techo como una función de la frecuencia de excitación. Grafique las curvas de frecuencia de la respuesta en el intervalo de 0 a 15 Hz. Suponga que las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n son del 5%.

12.10 El sistema no amortiguado de la figura P12.7 se somete a una fuerza impulsiva en la masa del segundo nivel: $p_2(t) = p_o\delta(t)$, donde $p_o = 20$ kips. Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos laterales del nivel como funciones del tiempo.

12.11 El sistema no amortiguado de la figura P12.7 se somete a una fuerza aplicada súbitamente en la masa del primer nivel: $p_1(t) = p_o$, $t \geq 0$, donde $p_o = 200$ kips. Deduzca las ecuaciones para (**a**) los desplazamientos laterales del piso como funciones del tiempo y (**b**) la distorsión de entrepiso del segundo nivel como una función del tiempo.

12.12 El sistema no amortiguado de la figura P12.7 se somete a una fuerza de pulso rectangular en el tercer nivel. El pulso tiene una amplitud $p_o = 200$ kips y una duración $t_d = T_1/2$, donde T_1 es el periodo de vibración fundamental del sistema. Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos del nivel como funciones del tiempo.

12.13 En la figura P12.13 se muestra una viga de acero estructural con $E = 30{,}000$ ksi, $I = 100$ pulg^4, $L = 150$ pulg y $mL = 0.864$ kip-s^2/pulg. Determine la respuesta de desplazamiento del sistema a una fuerza impulsiva $p_1(t) = p_o\delta(t)$ en la masa izquierda, donde $p_o = 10$ kips y $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Grafique, como funciones del tiempo, los desplazamientos u_j debidos a cada modo de vibración en forma separada y combinada.

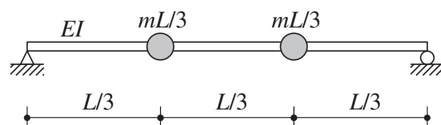


Figura P12.13

12.14 Para el sistema del problema 12.13 determine la respuesta de desplazamiento a una fuerza de 100 kips aplicada súbitamente sobre la masa izquierda. Grafique, como funciones del tiempo, los desplazamientos u_j debidos a cada modo de vibración en forma separada y combinada.

12.15 Para el sistema del problema 12.13 determine la respuesta de desplazamiento de la fuerza $p(t)$ que se muestra en la figura P12.15 y se aplica sobre la masa izquierda. Grafique, como funciones del tiempo, los desplazamientos $u_j(t)$ debidos a cada modo de vibración en forma separada y combinada.

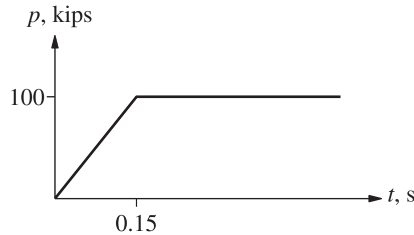


Figura P12.15

12.16 Para el sistema del problema 12.13 determine la respuesta de desplazamiento a la fuerza $p(t)$ que se muestra en la figura P12.16 y se aplica a la masa derecha. Grafique, como funciones del tiempo, los desplazamientos $u_j(t)$ debidos a cada modo de vibración en forma separada y combinada.

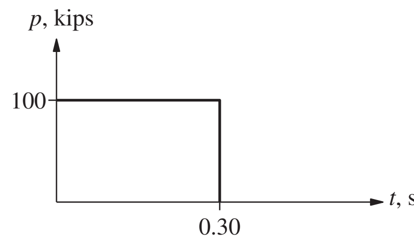


Figura P12.16

12.17 Repita el inciso (c) del ejemplo 12.6 sin usar fuerzas estáticas equivalentes. En otras palabras, determine las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes directamente a partir de los desplazamientos y las rotaciones.

12.18 Para el sistema y la excitación del problema 12.14 determine las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en las secciones a, b, c, d, e y f (figura P12.18) en $t = 0.1$ s, usando fuerzas estáticas equivalentes. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante debidos a cada modo en forma separada y combinada.

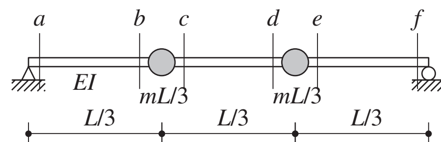


Figura P12.18

12.19 El sistema del problema 12.13 se somete a una fuerza armónica sobre la masa izquierda: $p(t) = p_o$ sen ωt, donde $p_o = 100$ kips y $\omega = 25$ rad/s. Desprecie el amortiguamiento y

determine la respuesta forzada (en estado estacionario) del sistema. En particular, determine **(a)** los desplazamientos y las aceleraciones de las dos masas como funciones del tiempo y (**b**) las amplitudes de los desplazamientos y las aceleraciones.

12.20 Para el sistema y la excitación del problema 12.19 determine la amplitud del momento flexionante forzado (en estado estacionario) en la ubicación de cada masa, usando fuerzas estáticas equivalentes.

12.21 Resuelva el problema 12.19 suponiendo fracciones de amortiguamiento modal del 10% para el sistema.

Parte C

***12.22** En la figura P12.22 se muestra una viga simplemente apoyada sin masa con tres masas concentradas y las propiedades siguientes: $L = 150$ pulg, $m = 0.192$ kip-s^2/pulg, $E = 30{,}000$ ksi e $I = 100$ pulg^4. Se desea estudiar la respuesta dinámica de la viga a dos grupos de fuerzas aplicadas: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, $\mathbf{s}_a^T = \langle 1 \;\; 0 \;\; 0 \rangle$, y $\mathbf{s}_b^T = \langle 2 \;\; 0 \;\; -1 \rangle$.

(a) Determine la expansión modal de los vectores $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$ que definen la distribución espacial de las fuerzas. Muestre en forma gráfica estas expansiones modales y comente sobre las contribuciones relativas de los diversos modos a $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$, y sobre cómo estas contribuciones difieren entre $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$.

(b) Para el momento flexionante M_1 en la ubicación del grado de libertad u_1 determine las respuestas estáticas modales M_{1n}^{st} tanto para $\mathbf{s}_a$ como para $\mathbf{s}_b$. Demuestre que $M_1^{\text{st}} = \sum M_{1n}^{\text{st}}$.

(c) Calcule y tabule los factores de contribución modal, sus valores acumulados para los diversos números de modos incluidos ($J = 1$, 2 o 3) y el error e_J en la respuesta estática. Comente sobre cómo los valores relativos de los factores de contribución modal y el error e_J están influenciados por la distribución espacial de las fuerzas.

(d) Determine los valores máximos $(M_{1n})_o$ de las respuestas modales $M_{1n}(t)$ debidas a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, donde $\mathbf{s} = \mathbf{s}_a$ o $\mathbf{s}_b$ y $p(t)$ es el pulso sinusoidal de medio ciclo:

$$p(t) = \begin{cases} p_o \operatorname{sen}(\pi t/t_d) & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

La duración del pulso t_d es T_1, el periodo fundamental del sistema. La figura 12.11.3 da el espectro de choque para un pulso sinusoidal de medio ciclo con coordenadas numéricas $R_d =$ 1.73, 1.14 y 1.06 para $T_1/t_d = 1$, $T_2/t_d = 0.252$ y $T_3/t_d = 0.119$, respectivamente. Puede ser conveniente organizar los cálculos en una tabla que contenga las siguientes columnas: modo n, T_n/t_d, R_{dn}, $\overline{M}_{1n}$ y $(M_{1n})_o/p_o M_1^{\text{st}}$.

(e) Comente la forma en que las respuestas modales máximas determinadas en el inciso (d) dependen de las respuestas modales estáticas M_{1n}^{st}, los factores de contribución modal $\overline{M}_{1n}$, los factores de amplificación dinámica R_{dn}, y las distribuciones de fuerza $\mathbf{s}_a$ y $\mathbf{s}_b$.

(f) ¿Se puede determinar el valor máximo de la respuesta total (considerando todos los modos) a partir de las respuestas modales máximas? Justifique su respuesta.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

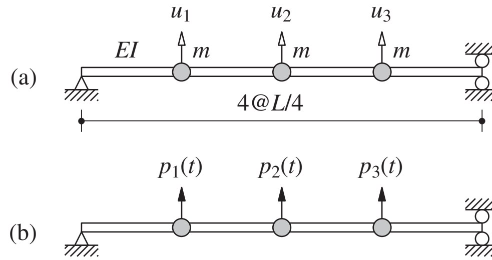


Figura P12.22

***12.23** La estructura de la figura P9.13 tiene las siguientes propiedades: $L = 100$ pulg, $m = 0.192$ kip-s²/pulg, $E = 30{,}000$ ksi e $I = 150$ pulg⁴. Se desea estudiar la respuesta dinámica de la estructura a tres grupos de fuerzas aplicadas: $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, $\mathbf{s}_a = \langle 1 \quad -1 \quad 1\rangle^T$, $\mathbf{s}_b = \langle 1 \quad 1 \quad -1\rangle^T$ y $\mathbf{s}_c = \langle 1 \quad 2 \quad 2\rangle^T$.

(a) Determine la expansión modal de los vectores $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ y $\mathbf{s}_c$ que definen la distribución espacial de las fuerzas. Muestre en forma gráfica estas expansiones modales y comente sobre las contribuciones relativas de los distintos modos a $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ y $\mathbf{s}_c$, y sobre cómo estas contribuciones difieren entre $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ y $\mathbf{s}_c$.

(b) Para el momento flexionante M_1 en la base b y el momento flexionante M_2 a la derecha del punto a, determine las respuestas estáticas modales M_{1n}^{st} y M_{2n}^{st} para $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ y $\mathbf{s}_c$. Demuestre que $M_1^{\text{st}} = \sum M_{1n}^{\text{st}}$ y $M_2^{\text{st}} = \sum M_{2n}^{\text{st}}$.

(c) Calcule y tabule los factores de contribución modal, sus valores acumulados para los diversos números de modos incluidos ($J = 1$, 2 o 3), y el error e_J en la respuesta estática. Comente sobre cómo los valores relativos de los factores de contribución modal y el error e_J están influidos por la distribución espacial de las fuerzas.

(d) Determine los valores máximos $(M_{1n})_o$ y $(M_{2n})_o$ de las respuestas modales M_{1n} y M_{2n} debidas a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$, donde $\mathbf{s} = \mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ o $\mathbf{s}_c$, y $p(t)$ es un pulso rectangular:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

La duración del pulso $t_d = 0.2T_1$, donde T_1 es el periodo fundamental del sistema. La figura 4.7.3b da el espectro de choque para un pulso rectangular con coordenadas numéricas $R_d =$ 0.691, 2.0 y 2.0 para $T_1/t_d = 5.0$, $T_2/t_d = 1.63$ y $T_3/t_d = 0.51$, respectivamente. Puede ser conveniente organizar los cálculos en una tabla que contenga los siguientes encabezados de columna para M_1: modo n, T_n/t_d, R_{dn}, $\overline{M}_{1n}$ y $(M_{1n})_o/p_o M_1^{\text{st}}$, y encabezados de columna similares para M_2.

(e) Comente la forma en que las respuestas modales máximas determinadas en el inciso (d) dependen de los factores de contribución modal M_{1n} y M_{2n}, y del factor de amplificación dinámica R_{dn}.

(f) ¿Se puede determinar el valor máximo de la respuesta total (considerando todos los modos) a partir de las respuestas modales máximas? Justifique su respuesta.

Parte D

12.24 El sistema no amortiguado de la figura P12.22 con las propiedades definidas en el problema 12.22 se somete a las fuerzas dinámicas $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}_b p(t)$, donde $\mathbf{s}_b^T = \langle 2 \quad 0 \quad -1\rangle$ y $p(t)$ es el pulso

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

sinusoidal de medio ciclo definido en el inciso (d) del problema 12.22 con la duración del pulso t_d igual a T_1, que es el periodo de vibración fundamental del sistema. Determine el momento flexionante $M(t)$ en la ubicación del grado de libertad u_1, como una función del tiempo y mediante dos métodos: **(a)** el análisis modal clásico y **(b)** el método de corrección estática con la respuesta dinámica determinada sólo en el primer modo. Para el inciso (a) grafique las contribuciones modales individuales a $M(t)$ y la respuesta total. En una gráfica por separado compare esta respuesta total con los resultados del inciso (b). Comente sobre la exactitud del método de corrección estática.

13

Análisis sísmico de sistemas lineales

AVANCE

En este capítulo se desarrollan procedimientos para el análisis sísmico de estructuras, idealizadas como sistemas con masa concentrada. La exposición está organizada en dos partes. La parte A se refiere al cálculo de la respuesta estructural como una función del tiempo cuando el sistema se somete a una aceleración dada del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Este procedimiento del *análisis de la historia de la respuesta* se presenta en primer lugar para una configuración estructural arbitraria y, posteriormente, se especifica para edificios de varios niveles con planta simétrica, y para edificios de varios niveles con planta asimétrica. También se incluye un análisis breve de la respuesta torsional de los edificios de planta simétrica. La parte A está dedicada a un solo componente del movimiento de terreno, por lo general uno de los componentes horizontales. La combinación de las respuestas estructurales determinadas a partir de este tipo de análisis independiente para cada componente de excitación proporciona la respuesta de los sistemas lineales a una excitación con varios componentes. Además, se desarrolla un procedimiento para analizar la respuesta de una estructura sometida a diferentes movimientos prescritos en sus diferentes apoyos.

La parte B se refiere a los procedimientos para calcular la respuesta máxima de una estructura durante un sismo, directamente a partir del espectro de respuesta (o diseño) sísmica, sin necesidad de analizar la historia de la respuesta de la estructura. Este procedimiento, conocido como el *análisis del espectro de respuesta*, no es un factor de predicción exacta de la respuesta máxima, sino que proporciona una estimación bastante precisa para las aplicaciones de diseño estructural. El procedimiento se presenta en primer lugar para las estructuras sometidas a las componentes individuales de traslación de un movimiento del terreno. Más adelante, se presentan las reglas para combinar las tres respuestas picos individuales a fin de estimar la respuesta máxima de una excitación con varios componentes. En este capítulo también se incluyen las ecuaciones basadas en el espectro de respuesta para determinar una envolvente que delimita la trayectoria de respuesta conjunta de todas las fuerzas que actúan de manera simultánea que controlan el diseño sísmico de un elemento estructural.

PARTE A: ANÁLISIS DE LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

13.1 ANÁLISIS MODAL

En esta sección se desarrolla el procedimiento del análisis modal para determinar la respuesta de una estructura a un movimiento del terreno inducido por un sismo $\ddot{u}_g(t)$, idéntico en todos los puntos de apoyo de la estructura.

13.1.1 Ecuaciones de movimiento

A continuación se repiten las ecuaciones diferenciales (9.4.8) que controlan la respuesta de un sistema de VGDL a un movimiento inducido por un sismo:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{\text{ef}}(t) \tag{13.1.1}$$

donde

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\ddot{u}_g(t) \tag{13.1.2}$$

Las matrices de masa y rigidez, **m** y **k**, y el vector de influencia ι se determinan mediante los métodos del capítulo 9. La matriz de amortiguamiento **c** no es necesaria en el análisis modal de la respuesta sísmica; en su lugar, son suficientes las fracciones de amortiguamiento modal, y sus valores numéricos pueden estimarse como se mostró en el capítulo 11. El procedimiento del análisis modal desarrollado en el capítulo 12 para resolver la ecuación (12.4.1) es aplicable para resolver la ecuación (13.1.1).

13.1.2 Expansión modal de los desplazamientos y las fuerzas

El desplazamiento **u** de un sistema con N grados de libertad puede expresarse, al igual que en la ecuación (12.3.2), como la superposición de las contribuciones modales:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n q_n(t) \tag{13.1.3}$$

La distribución espacial de las fuerzas sísmicas efectivas $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$ está definida por $\mathbf{s} = \mathbf{m}\iota$. Esta distribución de fuerza puede expandirse como la sumatoria de las distribuciones de fuerza inercial modal $\mathbf{s}_n$ (sección 12.8):

$$\mathbf{m}\iota = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n \tag{13.1.4}$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} \qquad L_n = \phi_n^T \mathbf{m}\iota \qquad M_n = \phi_n^T \mathbf{m}\phi_n \tag{13.1.5}$$

La ecuación (13.1.5) para el coeficiente Γ_n puede deducirse al multiplicar antes ambos lados de la ecuación (13.1.4) por ϕ_r^T y al usar la propiedad de ortogonalidad de los modos, o mediante la especificación de la ecuación (12.8.3) para $\mathbf{s} = \mathbf{m}\iota$. La contribución del n-ésimo modo a $\mathbf{m}\iota$ es

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m}\phi_n \tag{13.1.6}$$

que es independiente de la manera en que se normalizan los modos.

13.1.3 Ecuaciones modales

La ecuación (12.4.6) se especifica para la excitación sísmica al sustituir $\mathbf{p}(t)$ en la ecuación (12.3.4) por $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$, a fin de obtener

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \tag{13.1.7}$$

La solución $q_n(t)$ puede obtenerse con facilidad al comparar la ecuación (13.1.7) con la ecuación de movimiento para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL, un sistema de un grado de libertad con las propiedades de vibración (frecuencia natural ω_n y fracción de amortiguamiento ζ_n) del n-ésimo modo del sistema de 1GDL. La ecuación (6.2.1) con $\zeta = \zeta_n$, que regula el movimiento de este sistema de 1GDL sometido a una aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, se repite aquí con u sustituido por D_n para enfatizar su conexión con el n-ésimo modo:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t) \tag{13.1.8}$$

Si se compara la ecuación (13.1.8) con la (13.1.7), resulta la relación entre q_n y D_n:

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t) \tag{13.1.9}$$

Por lo tanto, q_n(t) puede determinarse con facilidad una vez que se haya resuelto la ecuación (13.1.8) para $D_n(t)$, utilizando los métodos numéricos en el tiempo paso a paso para los sistemas de 1GDL (capítulo 5).

El factor Γ_n (definido en la ecuación 13.1.5a) que multiplica a $\ddot{u}_g(t)$ en la ecuación (13.1.7) es igual al coeficiente de expansión modal (sección 10.7) del vector de influencia:

$$\iota = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \phi_n$$

Éste se conoce por lo general como un factor de participación modal, lo que implica que es una medida del grado en la que el n-ésimo modo participa en la respuesta. Sin embargo, esta terminología es engañosa, porque Γ_n no es independiente de la manera en que se normaliza el modo, ni una medida de la contribución modal a una cantidad de respuesta. Ambos inconvenientes se eliminan mediante los factores de contribución modal que se presentaron en la sección 12.10 para investigar la respuesta sísmica de los edificios.

13.1.4 Respuestas modales

La contribución del n-ésimo modo a los desplazamientos nodales $\mathbf{u}(t)$ es

$$\mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t) = \Gamma_n \phi_n D_n(t) \tag{13.1.10}$$

Existen dos procedimientos del análisis estático que se describen en la sección 9.10 para determinar las fuerzas en los diversos elementos estructurales (vigas, columnas, muros, etcétera) a partir de los desplazamientos $\mathbf{u}_n(t)$. En el análisis sísmico se recomienda el segundo de estos procedimientos, que utiliza fuerzas estáticas equivalentes, puesto que facilita la comparación de los procedimientos de análisis dinámico con las fuerzas de diseño sísmico especificadas en los códigos de diseño (capítulo 21 , en inglés en el sitio web). Las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con la respuesta del n-ésimo modo son $\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t)$, donde $\mathbf{u}_n(t)$ está dado por la ecuación (13.1.10). Si estas ecuaciones se combinan y se utilizan las ecuaciones (10.2.4) y (13.1.6), se llega a

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t) \tag{13.1.11}$$

donde, de manera similar a la ecuación (6.4.3),

$$A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t) \tag{13.1.12}$$

Las fuerzas estáticas equivalentes $\mathbf{f}_n(t)$ son el producto de dos cantidades: (1) la contribución $\mathbf{s}_n$ del n-ésimo modo a la distribución espacial $\mathbf{m}\iota$ de $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$, y (2) la respuesta de pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

La contribución $r_n(t)$ del n-ésimo modo a cualquier cantidad de respuesta $r(t)$ que puede expresarse como una combinación lineal de los desplazamientos estructurales $\mathbf{u}(t)$ se determina mediante un análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas externas $\mathbf{f}_n(t)$. Si r_n^{st} indica la respuesta estática modal, el valor estático (indicado por el superíndice "st") de r debido a las fuerzas externas† $\mathbf{s}_n$, entonces,

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.1.13}$$

Observe que r_n^{st} puede ser positiva o negativa, y es independiente de la manera en que se normaliza el modo. La ecuación (13.1.13) también se aplica a la respuesta de desplazamiento, aunque su deducción haya sido motivada por el deseo de calcular las fuerzas surgidas de los desplazamientos. Los desplazamientos estáticos debidos a las fuerzas $\mathbf{s}_n$ satisfacen $\mathbf{k}\mathbf{u}_n^{\text{st}} = \mathbf{s}_n$. Al sustituir la ecuación (13.1.6) para $\mathbf{s}_n$ y al usar la ecuación (10.2.4), se obtiene

$$\mathbf{u}_n^{\text{st}} = \mathbf{k}^{-1}(\Gamma_n \mathbf{m}\phi_n) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\phi_n$$

Si esto se sustituye en la ecuación (13.1.13), resulta

$$\mathbf{u}_n(t) = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\phi_n A_n(t) \tag{13.1.14}$$

que es equivalente a la ecuación (13.1.10) debido a la ecuación (13.1.12).

13.1.5 Respuesta total

La combinación de las contribuciones de respuesta de todos los modos proporciona la respuesta total de la estructura al movimiento del terreno. Por lo tanto los desplazamientos nodales son

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \phi_n D_n(t) \tag{13.1.15}$$

donde la ecuación (13.1.10) se ha sustituido para $\mathbf{u}_n(t)$. Al usar la ecuación (13.1.13) se obtiene un resultado general válido para cualquier cantidad de respuesta:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.1.16}$$

†Aunque de manera inexacta se hace referencia a $\mathbf{s}_n$ como si fueran fuerzas, sus unidades son de masa. Por lo tanto, r_n^{st} no tiene las mismas unidades que r, pero la ecuación (13.1.13) proporciona las unidades correctas para r_n.

Bajo circunstancias apropiadas, las contribuciones a la respuesta de algunos de los modos superiores pueden determinarse mediante el análisis estático más sencillo, en vez del análisis dinámico. Como se muestra en la figura 6.8.4, para los sistemas de 1GDL con periodos muy cortos, la pseudo-aceleración $A(t) \simeq -\ddot{u}_g(t)$. Para el espectro de diseño de la figura 6.9.3, $A = \ddot{u}_{go}$ para $T_n \leq \frac{1}{33}$ s. Si este intervalo de tiempo incluye los periodos naturales de los modos del $N_d + 1$ al N, entonces la ecuación (13.1.16) puede expresarse como

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N_d} r_n^{\mathrm{st}} A_n(t) - \ddot{u}_g(t)\left(r^{\mathrm{st}} - \sum_{n=1}^{N_d} r_n^{\mathrm{st}}\right) \tag{13.1.17}$$

donde r^{st} es el valor estático de r debido a las fuerzas externas **s** (sección 12.10) y $r^{\mathrm{st}} = \sum_{n=1}^{N} r_n^{\mathrm{st}}$ porque $\mathbf{s} = \Sigma \mathbf{s}_n$ (ecuación 13.1.4). Esta solución consta de dos partes: el primer término es la respuesta dinámica considerando los primeros N_d modos y el segundo es la respuesta de los modos más altos determinados mediante el análisis estático. La ecuación (13.1.17) es el método de corrección estática que también puede deducirse siguiendo la sección 12.12, o puede reescribirse en la forma del método de aceleración modal (sección 12.13). Por lo general, estos métodos no son útiles para el análisis sísmico de estructuras porque los movimientos sísmicos del terreno suelen contener una amplia banda de frecuencias que incluye las frecuencias estructurales y porque los componentes de los modos más altos en $\mathbf{s} = \mathbf{m}\iota$ son pequeños.

13.1.6 Interpretación del análisis modal

En la primera fase de este procedimiento de análisis dinámico se calculan las propiedades de vibración (frecuencias y modos naturales) de la estructura y el vector de la distribución de la fuerza $\mathbf{m}\iota$ se expande en sus componentes modales $\mathbf{s}_n$. El resto del procedimiento del análisis se muestra de manera esquemática en la figura 13.1.1 para enfatizar los conceptos subyacentes. La contribución del n-ésimo modo a la respuesta dinámica se obtiene multiplicando los resultados de dos análisis: (1) el análisis estático de la estructura con las fuerzas $\mathbf{s}_n$ aplicadas y (2) el análisis dinámico del n-ésimo modo del sistema de 1GDL excitado por $\ddot{u}_g(t)$. Así, el análisis modal requiere un análisis estático de la estructura para N conjuntos de fuerzas: $\mathbf{s}_n$, $n = 1, 2, ..., N$; y el análisis dinámico de N sistemas de 1GDL diferentes. La combinación de las respuestas modales proporciona la respuesta de la estructura al sismo.

Ejemplo 13.1

Determine la respuesta del marco en forma de L invertida de la figura E9.6a al movimiento del terreno horizontal.

Solución Suponiendo que los dos elementos son axialmente rígidos, los grados de libertad son u_1 y u_2 (figura E9.6a). Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (13.1.1) y (13.1.2), donde el vector de influencia $\iota = \langle 1 \quad 0 \rangle^T$ (figura 9.4.4) y las matrices de masa y rigidez (a partir del ejemplo 9.6) son

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

Las fuerzas sísmicas efectivas son

$$\mathbf{p}_{\mathrm{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\ddot{u}_g(t) = -\begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) = -\begin{Bmatrix} 3m \\ 0 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g(t) \tag{b}$$

La fuerza en el grado de libertad vertical es cero debido a que el movimiento del terreno es horizontal.

Modo	Análisis estático de la estructura	Análisis dinámico del sistema de 1GDL	Contribución modal a la respuesta dinámica
1	Fuerzas $\mathbf{s}_1$ r_1^{st}	$A_1(t)$ ω_1, ζ_1 $\ddot{u}_g(t)$	$r_1(t) = r_1^{st} A_1(t)$
2	Fuerzas $\mathbf{s}_2$ r_2^{st}	$A_2(t)$ ω_2, ζ_2 $\ddot{u}_g(t)$	$r_2(t) = r_2^{st} A_2(t)$
• • •	• • •	• • •	• • •
N	Fuerzas $\mathbf{s}_N$ r_N^{st}	$A_N(t)$ ω_N, ζ_N $\ddot{u}_g(t)$	$r_N(t) = r_N^{st} A_N(t)$
Respuesta total			$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t)$

Figura 13.1.1 Explicación conceptual del análisis modal.

Las frecuencias y los modos naturales del sistema (a partir del ejemplo 10.3) son

$$\omega_1 = 0.6987\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad \omega_2 = 1.874\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{c}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

Al sustituir para **m** y ι en la ecuación (13.1.5) se obtienen las cantidades del primer modo:

$$L_1 = \phi_1^T \mathbf{m}\iota = \langle 1 \quad 2.097 \rangle \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 3m$$

$$M_1 = \phi_1^T \mathbf{m}\phi_1 = \langle 1 \quad 2.097 \rangle \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} = 7.397m$$

$$\Gamma_1 = \frac{L_1}{M_1} = \frac{3m}{7.397m} = 0.406$$

Con cálculos similares para el segundo modo resultan $L_2 = 3m$, $M_2 = 5.048m$, y $\Gamma_2 = 0.594$.

La sustitución de Γ_n, **m** y ϕ_n en la ecuación (13.1.6) da

$$\mathbf{s}_1 = \Gamma_1 \mathbf{m} \phi_1 = 0.406 \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} 1.218 \\ 0.851 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

$$\mathbf{s}_2 = \Gamma_2 \mathbf{m} \phi_2 = 0.594 \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} 1.782 \\ -0.851 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

Entonces la ecuación (13.1.4) se especifica como

$$m \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} 1.218 \\ 0.851 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 1.782 \\ -0.851 \end{Bmatrix} \tag{g}$$

Esta expansión modal de la distribución espacial de las fuerzas efectivas se muestra en la figura E13.1. Observe que las fuerzas en dirección de los grados de libertad verticales en los dos modos se cancelan entre sí debido a que la fuerza efectiva del sismo en este grado de libertad es cero.

Si se sustituye para Γ_n y ϕ_n en la ecuación (13.1.10), resultan los desplazamientos del primer modo

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_1 = \Gamma_1 \phi_1 D_1(t) = 0.406 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} D_1(t) = \begin{Bmatrix} 0.406 \\ 0.851 \end{Bmatrix} D_1(t) \tag{h}$$

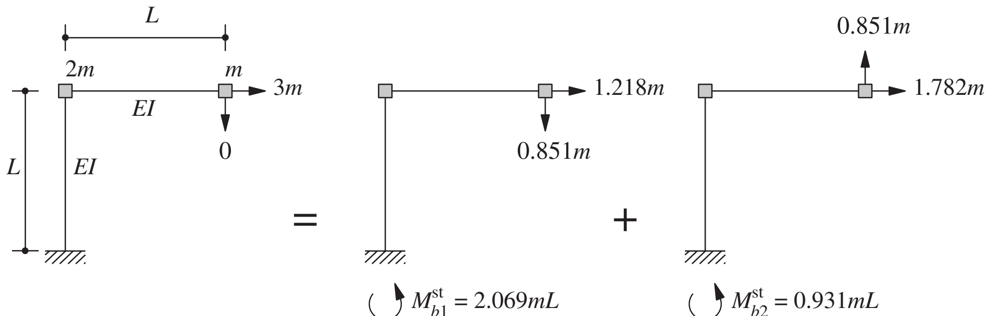


Figura E13.1

y los desplazamientos del segundo modo

$$\mathbf{u}_2(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_2 = \Gamma_2\phi_2 D_2(t) = 0.594 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.431 \end{Bmatrix} D_2(t) = \begin{Bmatrix} 0.594 \\ -0.851 \end{Bmatrix} D_2(t) \qquad \text{(i)}$$

La combinación de las ecuaciones (h) e (i) da los desplazamientos totales:

$$u_1(t) = 0.406D_1(t) + 0.594D_2(t) \qquad u_2(t) = 0.851D_1(t) - 0.851D_2(t) \qquad \text{(j)}$$

El momento flexionante M_b inducido por el sismo en la base de la columna, debido al n-ésimo modo (a partir de la ecuación 13.1.13), es

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{\text{st}} A_n(t) \qquad \text{(k)}$$

Los análisis estáticos del marco para las fuerzas $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ dan M_{b1}^{st} y M_{b2}^{st} como se muestra en la figura E13.1. Al sustituir M_{bn}^{st} y al combinar las contribuciones modales se obtiene el momento flexionante total:

$$M_b(t) = \sum_{n=1}^{2} M_{bn}(t) = 2.069mLA_1(t) + 0.931mLA_2(t) \qquad \text{(l)}$$

Las tres cantidades de respuesta que se consideraron han sido expresadas en términos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, así como otras cantidades de respuesta pueden ser expresadas de esta misma forma. Estas respuestas del n-ésimo modo del sistema de un grado de libetad a la aceleración dada del terreno $\ddot{u}_g(t)$ pueden determinarse mediante métodos numéricos de tiempo paso a paso (capítulo 5).

13.1.7 Análisis de la respuesta a la rotación en la base

Cuando la excitación es una rotación en la base, el procedimiento de análisis modal es aplicable después de realizar una ligera modificación. Como se muestra en la sección 9.4.3, el movimiento de una estructura debido a la aceleración rotacional $\ddot{\theta}_g(t)$ de la base (figura 9.4.6a) está controlada por la ecuación (13.1.1), con

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\mathbf{m}\iota\ddot{\theta}_g(t) \qquad (13.1.18)$$

donde ι es el vector de los desplazamientos estáticos en todos los grados de libertad debidos a la rotación unitaria en la base, $\ddot{\theta}_g = 1$. Para el sistema de la figura 9.4.6a este vector de influencia es $\iota = \langle h_1 \quad h_2 \quad x_3 \rangle^T$. Con ι determinado, la respuesta estructural debida a la rotación en la base se calcula mediante los procedimientos de las secciones 13.1.1 a 13.1.5 con $\ddot{u}_g(t)$ sustituido por $\ddot{\theta}_g(t)$.

13.2 EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES CON PLANTA SIMÉTRICA

En esta sección el análisis modal de la sección 13.1 se especifica para los edificios de varios niveles con diafragmas de piso rígidos y plantas que tienen dos ejes ortogonales de simetría sometidos a un movimiento horizontal del terreno en dirección de uno de esos ejes. A continuación se repiten las ecuaciones de movimiento para este sistema (ecuación 9.4.4):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) \qquad (13.2.1)$$

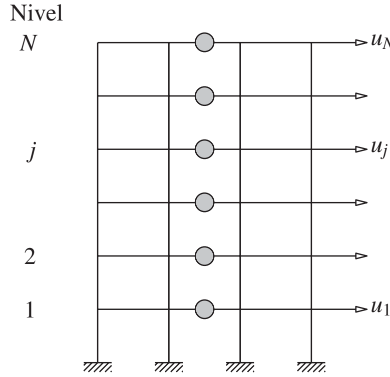


Figura 13.2.1 Grados de libertad dinámicos de un marco con varios niveles: desplazamientos laterales respecto del terreno.

donde **u** es el vector de los desplazamientos de nivel laterales en relación con el terreno (figura 13.2.1); **m** es una matriz diagonal con elementos $m_{jj} = m_j$, la masa concentrada en el j-ésimo nivel; **k** es la matriz de rigidez lateral del edificio definida en la sección 9.4.2, y cada elemento de **1** es la unidad. El procedimiento de análisis modal desarrollado en la sección 13.1 es aplicable al problema de un edificio de varios niveles, puesto que sus ecuaciones gobernantes son iguales a la ecuación (13.1.1) con el vector de influencia $\iota = \mathbf{1}$. Por conveniencia se presenta el procedimiento de análisis con referencia a un solo marco (figura 13.2.1), aunque puede aplicarse a un edificio con varios marcos (vea la sección 9.4.2).

13.2.1 Expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas

Al sustituir $\iota = \mathbf{1}$ en las ecuaciones (13.1.4) y (13.1.5) se obtiene la expansión modal de la distribución espacial de las fuerzas sísmicas efectivas:

$$\mathbf{m1} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \qquad (13.2.2)$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{L_n^h}{M_n} \qquad L_n^h = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn} \qquad M_n = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2 \qquad (13.2.3)$$

En la ecuación (13.2.2) la contribución del n-ésimo modo a **m1** es $\mathbf{s}_n$, un vector de fuerzas laterales s_{jn} en los diferentes niveles:

$$\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_n \qquad s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} \qquad (13.2.4)$$

Ejemplo 13.2

Un marco de cortante de dos niveles tiene las propiedades de masa y rigidez mostradas en la figura E13.2a. Determine la expansión modal de la distribución de la fuerza sísmica efectiva asociada con la aceleración horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Solución Las matrices de rigidez y masa (a partir del ejemplo 9.1) son

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

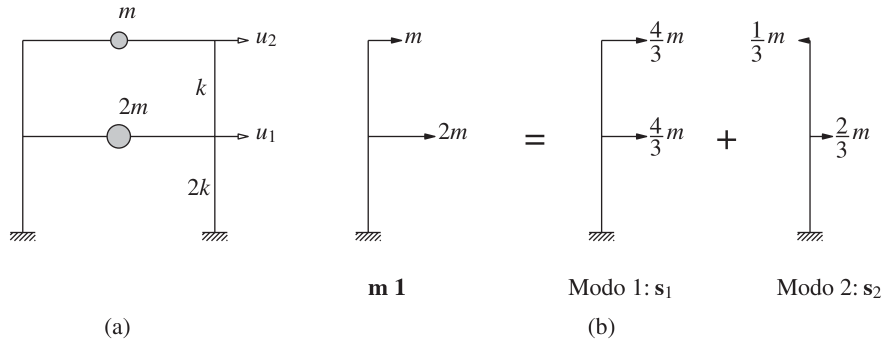


Figura E13.2 (a) Marco de cortante de dos niveles; (b) expansión modal de **m1**.

donde $k = 24EI_c/h^3$, y las frecuencias y modos naturales (a partir del ejemplo 10.4) son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Las propiedades modales M_n, L_n^h y Γ_n se calculan a partir de la ecuación (13.2.3). Para el primer modo: $M_1 = 2m\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m(1)^2 = 3m/2$; $L_1^h = 2m\left(\frac{1}{2}\right) + m(1) = 2m$; $\Gamma_1 = L_1^h/M_1 = \frac{4}{3}$. De manera similar, para el segundo modo: $M_2 = 3m$, $L_2^h = -m$, y $\Gamma_2 = -\frac{1}{3}$. Al sustituir para Γ_n, **m** y ϕ_n en la ecuación (13.2.4), se obtiene

$$\mathbf{s}_1 = \frac{4}{3}m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{4}{3}m\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_2 = -\frac{1}{3}m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3}m\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La expansión modal de **m1** se muestra en la figura E13.2b.

13.2.2 Respuestas modales

La ecuación diferencial que controla la n-ésima coordenada modal es la ecuación (13.1.7) con Γ_n definida por la ecuación (13.2.3). Si se usa esta Γ_n, la ecuación (13.1.10) proporciona la contribución $\mathbf{u}_n(t)$ del n-ésimo modo a los desplazamientos laterales $\mathbf{u}(t)$. En particular, el desplazamiento lateral del j-ésimo nivel del edificio es

$$u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t) \qquad (13.2.5)$$

La distorsión, o deformación, en el entrepiso j está dada por la diferencia entre los desplazamientos de los niveles superior e inferior:

$$\Delta_{jn}(t) = u_{jn}(t) - u_{j-1,n}(t) = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})D_n(t) \qquad (13.2.6)$$

Las fuerzas estáticas equivalentes $\mathbf{f}_n(t)$ para el n-ésimo modo (a partir de la ecuación 13.1.11) son

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t) \qquad f_{jn}(t) = s_{jn} A_n(t) \qquad (13.2.7)$$

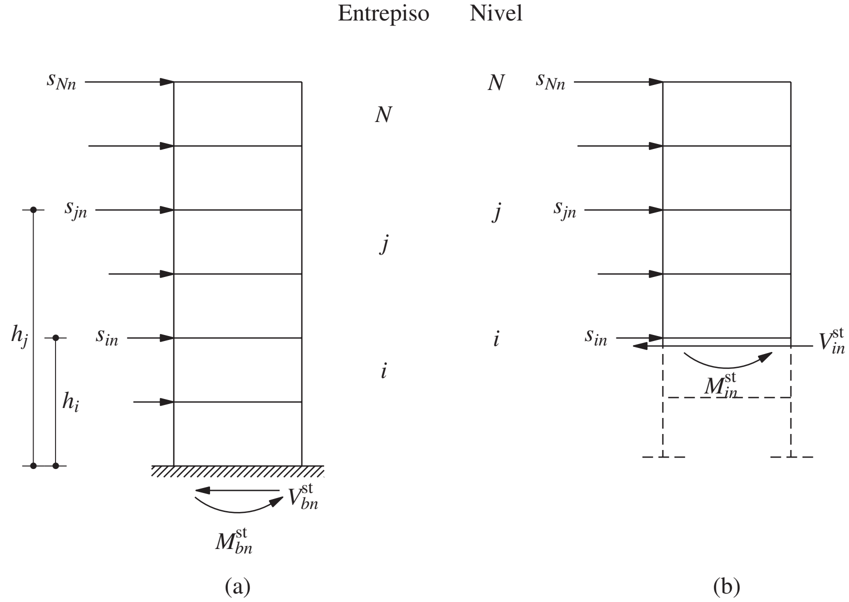


Figura 13.2.2 Cálculo de las respuestas estáticas modales de las fuerzas en cada entrepiso, a partir del vector de fuerza $\mathbf{s}_n$: (a) cortante y momento de volteo en la base; (b) cortante en el i-ésimo entrepiso y momento de volteo en el i-ésimo nivel.

donde f_{jn} es la fuerza lateral en el j-ésimo nivel. Entonces, la respuesta $r_n(t)$ debida al n-ésimo modo está dada por la ecuación (13.1.13), que se repite aquí por conveniencia:

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.2.8}$$

La respuesta estática modal r_n^{st} se determina mediante un análisis estático del edificio debido a las fuerzas externas $\mathbf{s}_n$ (figura 13.2.2). Al aplicar estas fuerzas a la estructura, la dirección de las fuerzas está controlada por el signo algebraico de ϕ_{jn}. Por lo tanto, todas estas fuerzas para el modo fundamental actuarán en la misma dirección, como se muestra en la figura 13.2.2a, pero para modos a partir del segundo y superiores, éstas cambiarán de dirección para los niveles superiores en la estructura.

En la tabla 13.2.1 se presentan las respuestas estáticas modales para seis cantidades de respuesta: el cortante V_i en el i-ésimo entrepiso, el momento de volteo M_i en el i-ésimo nivel, el cortante V_b basal, el momento de volteo M_b en la base, los desplazamientos del nivel u_j y las distorsiones de entrepiso Δ_j. Las primeras cuatro ecuaciones provienen del análisis estático del problema en la figura 13.2.2, que también proporciona las respuestas estáticas modales para las fuerzas internas (momentos flexionantes, cortantes, etcétera) en los elementos estructurales: vigas, columnas, muros, etcétera. Los resultados para u_j y Δ_j se obtienen al comparar las ecuaciones (13.2.5) y (13.2.6) con la ecuación (13.2.8). Las partes de las ecuaciones para V_{bn}^{st} y M_{bn}^{st} se obtienen al sustituir la ecuación (13.2.4) para s_{jn}, la ecuación (13.2.3) para L_n^h y al definir M_n^* y h_n^*:

$$M_n^* = \Gamma_n L_n^h = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} \qquad h_n^* = \frac{L_n^\theta}{L_n^h} \tag{13.2.9a}$$

TABLA 13.2.1 RESPUESTAS ESTÁTICAS MODALES

Respuesta, r	Respuesta estática modal, r_n^{st}
V_i	$V_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} s_{jn}$
M_i	$M_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} (h_j - h_i) s_{jn}$
V_b	$V_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} s_{jn} = \Gamma_n L_n^h \equiv M_n^*$
M_b	$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} h_j s_{jn} = \Gamma_n L_n^\theta \equiv h_n^* M_n^*$
u_j	$u_{jn}^{\text{st}} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\phi_{jn}$
Δ_j	$\Delta_{jn}^{\text{st}} = (\Gamma_n/\omega_n^2)(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n})$

donde

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn} \tag{13.2.9b}$$

y h_j es la altura del j-ésimo nivel por encima de la base. Observe que M_n^* y h_n^* son independientes de la manera en que se normaliza el modo, a diferencia de M_n, L_n^h y Γ_n. En la sección 13.2.5 se presentan las interpretaciones físicas significativas de M_n^* y h_n^*.

13.2.3 Respuesta total

La combinación de las contribuciones a la respuesta de todos los modos proporciona la respuesta al sismo del edificio de varios niveles:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.2.10}$$

donde la ecuación (13.2.8) ha sido sustituida por $r_n(t)$, la respuesta del n-ésimo modo.

El procedimiento del análisis modal también puede proporcionar las aceleraciones en cada nivel, aunque éstas no son necesarias para calcular las fuerzas inducidas por un sismo en la estructura. Las aceleraciones en cada nivel pueden calcularse a partir de

$$\ddot{u}_j^t(t) = \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \phi_{jn} \ddot{D}_n(t) \tag{13.2.11}$$

utilizando los valores de $\ddot{D}_n$ disponibles en cada paso de tiempo del procedimiento numérico de tiempo paso a paso, que se empleó en la solución de la ecuación (13.1.8) para $D_n(t)$.

13.2.4 Resumen

La respuesta de un edificio de N niveles con planta simétrica alrededor de dos ejes ortogonales a un movimiento sísmico del terreno en dirección de un eje de simetría puede calcularse como una función del tiempo mediante el procedimiento que acaba de desarrollarse, y que se resume a continuación paso por paso:

1. Defina de manera numérica la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ en cada intervalo de tiempo Δt.
2. Defina las propiedades estructurales.
   a. Determine la matriz de masa **m** y la matriz de rigidez lateral **k** (sección 9.4).
   b. Estime las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n (capítulo 11).
3. Determine las frecuencias naturales ω_n (periodos naturales $T_n = 2\pi/\omega_n$) y los modos naturales de vibración ϕ_n (capítulo 10).
4. Determine los componentes modales $\mathbf{s}_n$ (ecuación 13.2.4) de la distribución de la fuerza sísmica efectiva.
5. Calcule la contribución a la respuesta del n-ésimo modo mediante los siguientes pasos, que se repiten para todos los modos, $n = 1, 2, \ldots, N$:
   a. Realice el análisis estático del edificio sometido a fuerzas laterales $\mathbf{s}_n$ para determinar r_n^{st}, la respuesta estática modal para cada cantidad de respuesta deseada r (tabla 13.2.1).
   b. Determine la respuesta de pseudo-aceleración $A_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$, usando métodos numéricos de tiempo paso a paso (capítulo 5).
   c. Determine $r_n(t)$ a partir de la ecuación (13.2.8).
6. Combine las contribuciones modales $r_n(t)$ para determinar la respuesta total usando la ecuación (13.2.10).

Como se mostrará más adelante, sólo los modos más bajos contribuyen de manera significativa a la respuesta. Por lo tanto, deben implementarse sólo los pasos 3, 4 y 5 para estos modos, y como consecuencia la sumatoria modal de la ecuación (13.2.10) se truncará.

Ejemplo 13.3

Deduzca las ecuaciones para **(a)** los desplazamientos en los niveles y **(b)** los cortantes por entrepiso para el marco de cortante del ejemplo 13.2 sometido al movimiento del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Solución Los pasos del 1 al 4 del resumen del procedimiento ya se han aplicado en el ejemplo 13.2.

(a) *Desplazamientos en los niveles*. Si se sustituyen Γ_n y ϕ_{jn} del ejemplo 13.2 en la ecuación (13.2.5), resultan los desplazamientos de los niveles debidos a cada modo:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_1 = \frac{4}{3}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} D_1(t) \qquad \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_2 = -\frac{1}{3}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_2(t) \tag{a}$$

La combinación de las contribuciones de los dos modos proporciona los desplazamientos de cada nivel:

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = \tfrac{2}{3}D_1(t) + \tfrac{1}{3}D_2(t) \tag{b}$$

$$u_2(t) = u_{21}(t) + u_{22}(t) = \tfrac{4}{3}D_1(t) - \tfrac{1}{3}D_2(t) \tag{c}$$

(b) *Cortantes de entrepiso*. El análisis estático del marco para las fuerzas externas de piso $\mathbf{s}_n$ da V_{in}^{st}, $i = 1$ y 2, como se muestra en la figura E13.3. Al sustituir estos resultados en la ecuación (13.2.8) se obtiene

$$V_{11}(t) = \tfrac{8}{3}mA_1(t) \qquad V_{21}(t) = \tfrac{4}{3}mA_1(t) \tag{d}$$

$$V_{12}(t) = \tfrac{1}{3}mA_2(t) \qquad V_{22}(t) = -\tfrac{1}{3}mA_2(t) \tag{e}$$

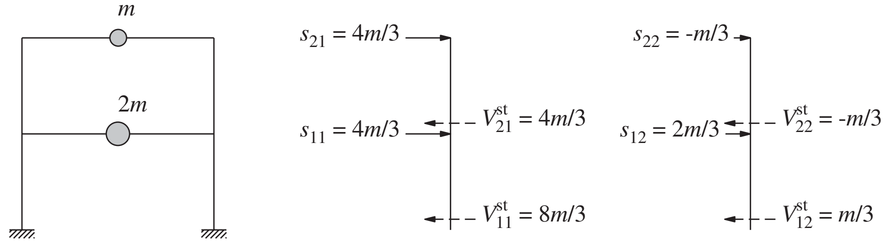


Figura E13.3

La combinación de las contribuciones de los dos modos proporciona los cortantes de entrepiso

$$V_1(t) = V_{11}(t) + V_{12}(t) = \tfrac{8}{3}mA_1(t) + \tfrac{1}{3}mA_2(t) \tag{f}$$

$$V_2(t) = V_{21}(t) + V_{22}(t) = \tfrac{4}{3}mA_1(t) - \tfrac{1}{3}mA_2(t) \tag{g}$$

Los desplazamientos de cada nivel y los cortantes de entrepiso se han expresado en términos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$. Estas respuestas del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a la $\ddot{u}_g(t)$ prescrita pueden determinarse mediante los métodos numéricos de tiempo paso a paso (capítulo 5).

Ejemplo 13.4

Deduzca las ecuaciones de **(a)** los desplazamientos de cada nivel y **(b)** las fuerzas en los elementos para el marco de dos niveles de la figura E13.4a, debidos al movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Solución La ecuación (9.3.4) con $\mathbf{p}_t(t) = -\mathbf{m}_{tt}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$ controla el vector de desplazamiento $\mathbf{u}_t = \langle u_1 \quad u_2 \rangle$; donde $\mathbf{m}_{tt}$ y $\mathbf{k}_{tt}$, que se determinaron en el ejemplo 9.9, son

$$\mathbf{m}_{tt} = m\begin{bmatrix} 2 & \\ & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{k}}_{tt} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 54.88 & -17.51 \\ -17.51 & 11.61 \end{bmatrix} \tag{a}$$

para los que $h = 10$ pies. Las frecuencias y los modos naturales del sistema, determinados en el ejemplo 10.5, son

$$\omega_1 = 2.198\sqrt{\frac{EI}{mh^3}} \qquad \omega_2 = 5.850\sqrt{\frac{EI}{mh^3}} \tag{b}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -1.292 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Por lo tanto, los pasos del 1 al 3 de la sección 13.2.4 ya se han implementado.

(a) *Desplazamientos por nivel y rotaciones de los nudos*. Los desplazamientos de cada nivel están dados por la ecuación (13.2.5), donde los Γ_n se calculan a partir de la ecuación (13.2.3): $M_1 = 2m(0.3871)^2 + m(1)^2 = 1.300m$, $L_1^h = 2m(0.3871) + m(1) = 1.774m$ y $\Gamma_1 = 1.774m/1.300m = 1.365$. Del mismo modo, $M_2 = 4.337m$, $L_2^h = -1.583m$ y $\Gamma_2 = -0.365$. Al sustituir esto en la ecuación (13.2.5) con $n = 1$, se obtienen los desplazamientos por nivel debidos al primer modo:

$$u_1(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_1 = 1.365\begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix} D_1(t) = \begin{Bmatrix} 0.5284 \\ 1.365 \end{Bmatrix} D_1(t) \tag{d}$$

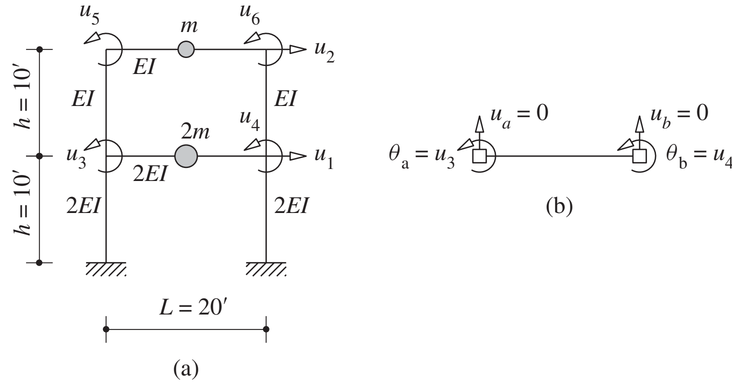


Figura E13.4

Las rotaciones en los nudos asociadas con estos desplazamientos de cada nivel se determinan a partir de la ecuación (d) del ejemplo 9.9 mediante la sustitución de $\mathbf{u}_1$ de la ecuación (d) para $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u}_{01}(t) = \begin{Bmatrix} u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -0.4426 & -0.2459 \\ -0.4426 & -0.2459 \\ 0.9836 & -0.7869 \\ 0.9836 & -0.7869 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5284 \\ 1.365 \end{Bmatrix} D_1(t)$$

$$= \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} -0.5696 \\ -0.5696 \\ -0.5544 \\ -0.5544 \end{Bmatrix} D_1(t) \tag{e}$$

Del mismo modo, se determinan los desplazamientos por nivel $\mathbf{u}_2(t)$ y las rotaciones en los nudos $\mathbf{u}_{02}(t)$ debidos al segundo modo:

$$\mathbf{u}_2(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0.4716 \\ -0.3651 \end{Bmatrix} D_2(t)$$

$$\mathbf{u}_{02}(t) = \begin{Bmatrix} u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{Bmatrix}_2 = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} -0.1189 \\ -0.1189 \\ 0.7511 \\ 0.7511 \end{Bmatrix} D_2(t) \tag{f}$$

La combinación de las contribuciones de los dos modos proporciona los desplazamientos de cada nivel y las rotaciones en los nudos:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \qquad \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}_{01}(t) + \mathbf{u}_{02}(t) \tag{g}$$

(b) *Fuerzas en los elementos*. En vez de implementar el paso 5 del procedimiento (sección 13.2.4), se ilustrará el cálculo de las fuerzas en los elementos a partir de los desplazamientos del terreno y las rotaciones en los nudos empleando los coeficientes de rigidez de las vigas (apéndice 1). Por ejemplo, el momento flexionante en el extremo izquierdo de la viga del primer piso (figura E13.4b) es

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \tag{h}$$

Los desplazamientos verticales u_a y u_b son iguales a cero porque se supone que las columnas son axialmente rígidas; las rotaciones en los nudos $\theta_a = u_3$ y $\theta_b = u_4$, donde u_3 y u_4 se conocen a partir de las ecuaciones (e), (f) y (g); por lo tanto,

$$\theta_a(t) = -\frac{0.5696}{h} D_1(t) - \frac{0.1189}{h} D_2(t) \qquad \theta_b(t) = \theta_a(t) \tag{i}$$

Al sustituir u_a, u_b, θ_a y θ_b en la ecuación (*h*), al remplazar *EI* por 2*EI*, y al utilizar $D_n(t) = A_n(t)/\omega^2{}_n$, se obtiene

$$M_a(t) = mh[-0.7077 A_1(t) - 0.0209 A_2(t)] \qquad M_b(t) = M_a(t) \tag{j}$$

Las ecuaciones para las fuerzas en todas las vigas y columnas pueden obtenerse de manera similar.

Al comparar los dos términos de la ecuación (j) para $M_a(t)$ con la ecuación (13.2.8) se observa que $M_{a1}^{st} = -0.7077mh$ y $M_{a2}^{st} = -0.0209mh$. Estas respuestas estáticas modales podrían haberse obtenido mediante el análisis estático de la estructura debido a $\mathbf{s}_n$, determinado a partir de la ecuación (13.2.4).

Las cantidades diferentes de respuesta se han expresado en términos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$; estas respuestas del *n*-ésimo modo del sistema de 1GDL a una $\ddot{u}_g(t)$ dada pueden determinarse mediante métodos numéricos de tiempo paso a paso (capítulo 5).

13.2.5 Masa modal y altura modal efectivas

En esta sección se presentan las interpretaciones físicas de M_n^* y h_n^*, de la ecuación (13.2.9a). El cortante basal debido al *n*-ésimo modo (figura 13.2.3a) se obtiene al especificar la ecuación (13.2.8) para V_b:

$$V_{bn}(t) = V_{bn}^{st} A_n(t) \tag{13.2.12a}$$

que después de sustituir para V_{bn}^{st} a partir de la tabla 13.2.1 se convierte en

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t) \tag{13.2.12b}$$

En contraste con la ecuación (13.2.12b), el cortante basal de un sistema de un solo nivel (figura 6.2.1a) con masa concentrada *m* está dado por la ecuación (6.7.3). Al definir la frecuencia natural de este sistema como ω_n y su fracción de amortiguamiento como ζ_n (iguales a las propiedades de vibración del *n*-ésimo modo del edificio con varios niveles) la ecuación (6.7.3) se convierte en

$$V_b(t) = mA_n(t) \tag{13.2.13}$$

Si se comparan las ecuaciones (13.2.12b) y (13.2.13), puede verse que si la masa de este sistema de 1GDL fuera M_n^* (figura 13.2.3b), su cortante basal sería igual a V_{bn}, el cortante basal para el *n*-ésimo modo de un sistema de varios niveles con su masa distribuida entre los diferentes niveles. Por lo tanto M_n^* se llama la *masa modal efectiva del cortante basal* o, por razones de brevedad, la *masa modal efectiva*.

La ecuación (13.2.13) implica que la masa total *m* de un sistema de 1GDL produce un cortante basal equivalente. Esto es así porque la masa y, por consiguiente, la fuerza estática equivalente se concentran en un solo lugar. En contraste, sólo la parte M_n^* de la masa de un edificio de varios niveles es necesaria para producir el cortante basal debido al *n*-ésimo modo, porque la masa del edificio se distribuye entre los diferentes niveles (figura

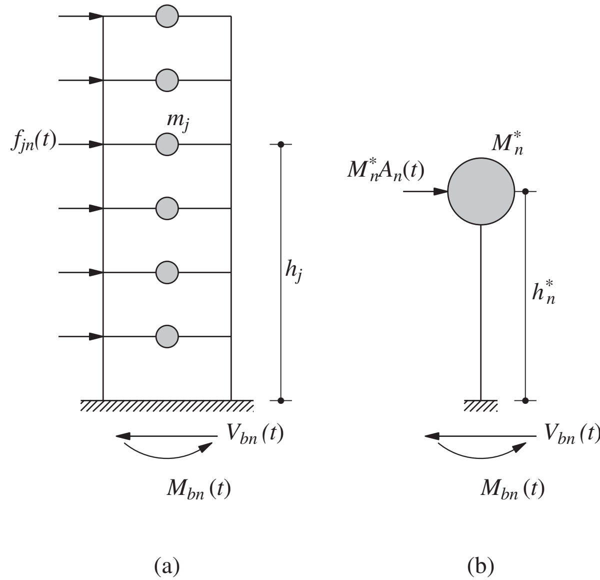


Figura 13.2.3 (a) Fuerzas estáticas equivalentes y cortante basal en el n-ésimo modo; (b) sistema de un solo nivel con masa modal efectiva y altura modal efectiva.

13.2.3a) y las fuerzas estáticas equivalentes (ecuación 13.1.11) varían con la altura como $m_j\phi_{jn}$ (ecuación 13.2.4). Esta parte depende de la distribución de la masa del edificio en toda su altura y en la forma del modo, como lo indican las ecuaciones (13.2.9a) y (13.2.3). La intuición podría sugerir que la suma de las masas modales efectivas M_n^* para todos los modos es igual a la masa total del edificio (vea la deducción 13.1):

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{13.2.14}$$

Ahora se comparan las ecuaciones del momento de volteo en la base para los sistemas con varios y con un solo nivel. El momento de volteo en la base de un edificio con varios niveles debido a su n-ésimo modo se obtiene al especificar la ecuación (13.2.8) para M_b:

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.2.15a}$$

que, después de sustituir para M_{bn}^{st} a partir de la tabla 13.2.1, se convierte en

$$M_{bn}(t) = h_n^* V_{bn}(t) \tag{13.2.15b}$$

En contraste, el momento de volteo en la base para un sistema de un solo nivel con masa concentrada m a una altura h por encima de la base está dado por la ecuación (6.7.3), que se repite aquí por conveniencia:

$$M_b(t) = hV_b(t) \tag{13.2.16}$$

La comparación de las ecuaciones (13.2.15b) y (13.2.16) indica que si la masa de este sistema de 1GDL fuera M_n^* y estuviera concentrada a una altura h_n^* (figura 13.2.3b), su momento de volteo en la base sería igual a M_{bn}, el momento de volteo en la base del n-ésimo modo para un edificio de varios pisos con masa distribuida entre los diferentes niveles. Por lo tan-

to, h_n^* se llama la *altura modal efectiva del momento en la base* o, por razones de brevedad, la *altura modal efectiva*. También puede interpretarse como la altura de la resultante de las fuerzas $\mathbf{s}_n$ (figura 13.2.2a) o de las fuerzas $f_{jn}(t)$ (figura 13.2.3a).

La ecuación (13.2.16) implica que la altura total h de un sistema con una sola masa produce el mismo momento de volteo en la base que la estructura completa. Esto es así debido a que la masa de la estructura y, por consiguiente, la fuerza estática equivalente se concentra a una altura h por encima de la base. En contraste, la *altura modal efectiva* h_n^* es menor que la altura total del edificio debido a que la masa del edificio y, por lo tanto, las fuerzas estáticas equivalentes se distribuyen entre los diferentes niveles de piso; h_n^* depende de la distribución de la masa en la altura del edificio y de la forma del modo (ecuaciones 13.2.9 y 13.2.3). La suma de los momentos alrededor de la base de las masas modales efectivas M_n^* situadas a las alturas efectivas h_n^* es igual al momento de las masas de cada nivel alrededor de la base (vea la deducción 13.2):

$$\sum_{n=1}^{N} h_n^* M_n^* = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \tag{13.2.17}$$

Para algunos de los modos superiores al modo fundamental, la altura modal efectiva puede ser negativa. Un valor negativo de h_n^* implica que el cortante basal modal estático V_{bn}^{st} y el momento de volteo modal estático en la base M_{bn}^{st} para el n-ésimo modo tienen signos algebraicos opuestos; por definición, tanto M_{b1}^{st} como V_{b1}^{st} para el primer modo son positivos.

Deducción 13.1

Al premultiplicar ambos lados de la ecuación (13.2.2) por $\mathbf{1}^T$ da

$$\mathbf{1}^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n (\mathbf{1}^T \mathbf{m} \phi_n)$$

Si se observa que $\mathbf{m}$ es una matriz diagonal con $m_{jj} = m_j$, ésta puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^{N} m_j = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n L_n^h$$

Lo anterior proporciona una comprobación para la ecuación (13.2.14), puesto que el n-ésimo término del lado derecho es M_n^* (tabla 13.2.1).

Deducción 13.2

Mediante la sustitución de $\mathbf{s} = \mathbf{mh}$ en las ecuaciones (12.8.2) y (12.8.3) se obtiene una expansión modal del vector de fuerza $\mathbf{mh}$ donde $\mathbf{h} = \langle h_1 \quad \text{h}_2 \quad \ldots \quad h_N \rangle^T$:

$$\mathbf{mh} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^\theta}{M_n} \mathbf{m} \phi_n$$

Si se premultiplican ambos lados por $\mathbf{1}^T$, resulta

$$\mathbf{1}^T \mathbf{mh} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^\theta}{M_n} \mathbf{1}^T \mathbf{m} \phi_n$$

Observe que **m** es una matriz diagonal con $m_{jj} = m_j$, por lo que puede reescribirse como

$$\sum_{j=1}^{N} m_j h_j = \sum_{n=1}^{N} \frac{L_n^\theta}{M_n} L_n^h = \sum_{n=1}^{N} h_n^* M_n^*$$

donde se ha empleado la ecuación (13.2.9). Esto proporciona una comprobación para la ecuación (13.2.17).

Ejemplo 13.5

Determine las masas y las alturas modales efectivas para el marco de cortante de dos niveles del ejemplo 13.2. La altura de cada nivel es h.

Solución En el ejemplo 13.2 se presentaron **m**, **k**, ω_n y ϕ_n para este sistema y se calcularon L_n^h y M_n para cada uno de los dos modos. Estos valores se enlistan a continuación, junto con los nuevos cálculos para M_n^* y h_n^*. Para el primer modo: $L_1^h = 2m$, $M_1 = 3m/2$, $M_1^* = (L_1^h)^2/M_1 = \frac{8}{3}m$, $L_1^\theta = h(2m)\frac{1}{2} + 2h(m)1 = 3hm$ y $h_1^* = L_1^\theta/L_1^h = 3hm/2m = 1.5h$ De manera similar, para el segundo modo: $L_2^h = -m$, $M_2 = 3m$, $M_2^* = (L_2^h)^2/M_2 = \frac{1}{3}m$, $L_2^\theta = h(2m)(-1) + 2h(m)$ 1 $= 0$ y $h_2^* = L_2^\theta/L_2^h = 0$.

Observe que $M_1^* + M_2^* = 3m$, la masa total de la estructura, lo que confirma que se satisface la ecuación (13.2.14); también observe que la altura efectiva para el segundo modo es cero, lo que implica que el momento de volteo en la base $M_{b2}(t)$, debido a ese modo, será cero en todo t. Ésta es una ilustración de un resultado más general que se desarrolla en el ejemplo 13.6.

Ejemplo 13.6

Demuestre que el momento de volteo en la base de un edificio de varios niveles, debido al segundo modo y superiores, es igual a cero si la forma del primer modo es lineal (es decir, los desplazamientos de cada nivel son proporcionales a las alturas de los niveles por encima de la base).

Solución La ecuación (13.2.15) proporciona la contribución del n-ésimo modo al momento de volteo en la base. Un primer modo lineal implica que $\phi_{j1} = h_j/h_N$, donde h_j es la altura del j-ésimo nivel por encima de la base y h_N es la altura total del edificio. Si se sustituye $h_j = h_N\phi_{j1}$ en (13.2.9b), resulta

$$L_n^\theta = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn} = h_N \phi_1^T \mathbf{m} \phi_n$$

y esto es cero para toda $n \neq 1$, debido a la propiedad de ortogonalidad de los modos. Por lo tanto, para toda $n \neq 1$, $h_n^* = 0$ debido a la ecuación (13.2.9a) y $M_{bn}(t) = 0$ debido a la ecuación (13.2.15).

13.2.6 Ejemplo: marco de cortante de cinco niveles

En esta sección el procedimiento del análisis sísmico resumido en la sección 13.2.4 se aplica al marco de cortante de cinco niveles de la figura 12.8.1, sometido al movimiento del terreno de El Centro, que se muestra en la figura 6.1.4. Los resultados presentados se acompañan con comentarios de interpretación que deben ayudar a desarrollar una comprensión del comportamiento de la respuesta de los edificios con varios niveles.

Propiedades del sistema. La masa concentrada $m_j = m = 100$ kips/g en cada nivel, la rigidez lateral de cada entrepiso es $k_j = k = 31.54$ kips/pulg y la altura de cada entrepiso

es de 12 pies. La fracción de amortiguamiento para todos los modos naturales es $\zeta_n = 5\%$. La matriz de masa **m**, la matriz de rigidez **k**, las frecuencias naturales y los modos naturales de este sistema se presentan en la sección 12.8. Para las k y m dadas, los periodos naturales son $T_n = 2.0, 0.6852, 0.4346, 0.3383$ y 0.2966 s. (Estos periodos naturales, que son mucho mayores que para los edificios típicos de cinco niveles, se eligieron para acentuar la contribución a la respuesta estructural del segundo al quinto modos). Así, los pasos 1, 2 y 3 del procedimiento de análisis (sección 13.2.4) ya se han completado.

Expansión modal de m1. Para implementar el paso 4 del procedimiento del análisis (sección 13.2.4), las propiedades modales M_n, L_n^h y L_n^θ se calculan a partir de las ecuaciones (13.2.3) y (13.2.9b) utilizando los modos conocidos ϕ_n (tabla 13.2.2). Los Γ_n se

TABLA 13.2.2 PROPIEDADES MODALES

Modo	M_n	L_n^h	L_n^θ / h
1	1.000	1.067	3.750
2	1.000	−0.336	0.404
3	1.000	0.177	0.135
4	1.000	−0.099	0.059
5	1.000	0.045	0.023

calculan a partir de la ecuación (13.2.3) y se sustituyen en la ecuación (13.2.4), junto con los valores para m_j y ϕ_{jn}, para obtener los vectores $\mathbf{s}_n$ que se muestran en la figura 13.2.4. Observe que la dirección de las fuerzas $\mathbf{s}_n$ está controlada por el signo algebraico de ϕ_{jn} (figura 12.8.2). Por consiguiente, estas fuerzas para el modo fundamental actúan en la misma dirección, pero para los modos superiores cambian de dirección a medida que los niveles son superiores. La contribución del modo fundamental a la distribución de fuerza $\mathbf{s} = \mathbf{m1}$ de las fuerzas sísmicas efectivas es la más grande, y las contribuciones modales a estas fuerzas disminuyen poco a poco para los modos superiores.

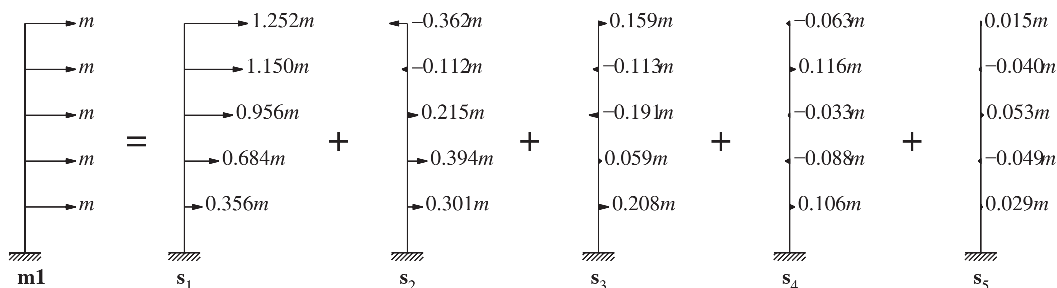


Figura 13.2.4 Expansión modal de m1.

Respuestas estáticas modales. La tabla 13.2.3 proporciona los resultados para cuatro cantidades de respuesta (el cortante basal V_b, el cortante en el quinto piso V_5, el

TABLA 13.2.3 RESPUESTAS ESTÁTICAS MODALES

Modo	V_{bn}^{st}/m	V_{5n}^{st}/m	M_{bn}^{st}/mh	u_{5n}^{st}
1	4.398	1.252	15.45	0.127
2	0.436	−0.362	−0.525	−0.004
3	0.121	0.159	0.092	0.0008
4	0.037	−0.063	−0.022	−0.0002
5	0.008	0.015	0.004	0.00003

momento de volteo en la base M_{bn} y el desplazamiento del techo u_5) obtenidos mediante las ecuaciones de la tabla 13.2.1 y los valores de s_{jn}, ϕ_{5n} y ω_{2n} conocidos (paso 5a de la sección 13.2.4). Observe que las respuestas estáticas modales son más grandes para el primer modo y disminuyen progresivamente para los modos superiores. Las masas modales efectivas $M_n^* = V_{bn}^{st}$ y las alturas modales efectivas $h_n^* = M_{bn}^{st}/V_{bn}^{st}$ se muestran de manera esquemática en la figura 13.2.5; observe que las h_n^* se grafican sin sus signos algebraicos. Observe que $\Sigma M_n^* = 5m$, lo que confirma que se cumple con la ecuación (13.2.14). Tenga en cuenta también que $\Sigma h_n^* M_n^* = 15mh$; esto es igual a $\Sigma h_j m_j = 15mh$, con lo que se confirma que se satisface la ecuación (13.2.17).

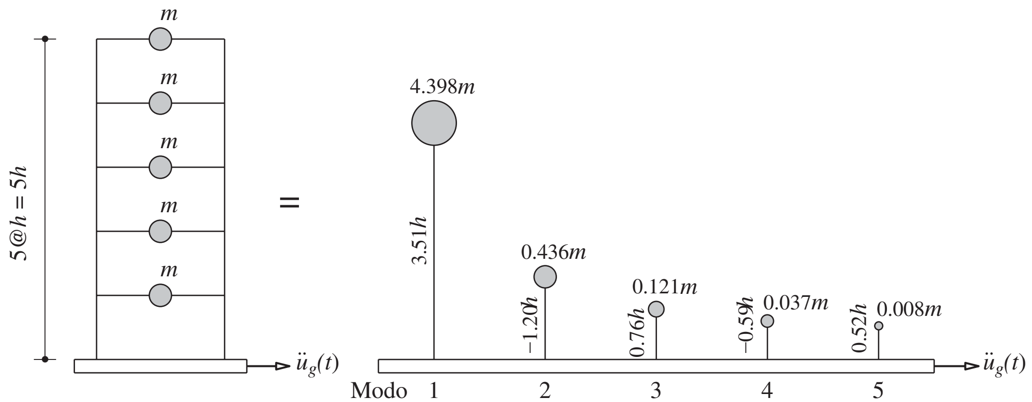


Figura 13.2.5 Masas y alturas modales efectivas.

Excitación sísmica. La aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ está definida por sus valores numéricos en los instantes de tiempo equiespaciados a cada Δt. Este paso de tiempo $\Delta t = 0.01$ s se elige lo suficientemente pequeño para definir $\ddot{u}_g(t)$ de manera precisa y para determinar con exactitud la respuesta de los sistemas de 1GDL con periodos naturales T_n, el menor de los cuales es de 0.2966 s.

Respuesta de los sistemas de 1GDL. Se determina la respuesta de deformación $D_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL con periodo natural T_n y fracción de amortiguamiento ζ_n, al movimiento del terreno (paso 5b de la sección 13.2.4). Se ejecutó el método de la aceleración lineal en el tiempo paso a paso (capítulo 5) para obtener los valores discretos de D_n en cada Δt. Sin embargo, por conveniencia, estos valores discretos se siguen indicando como

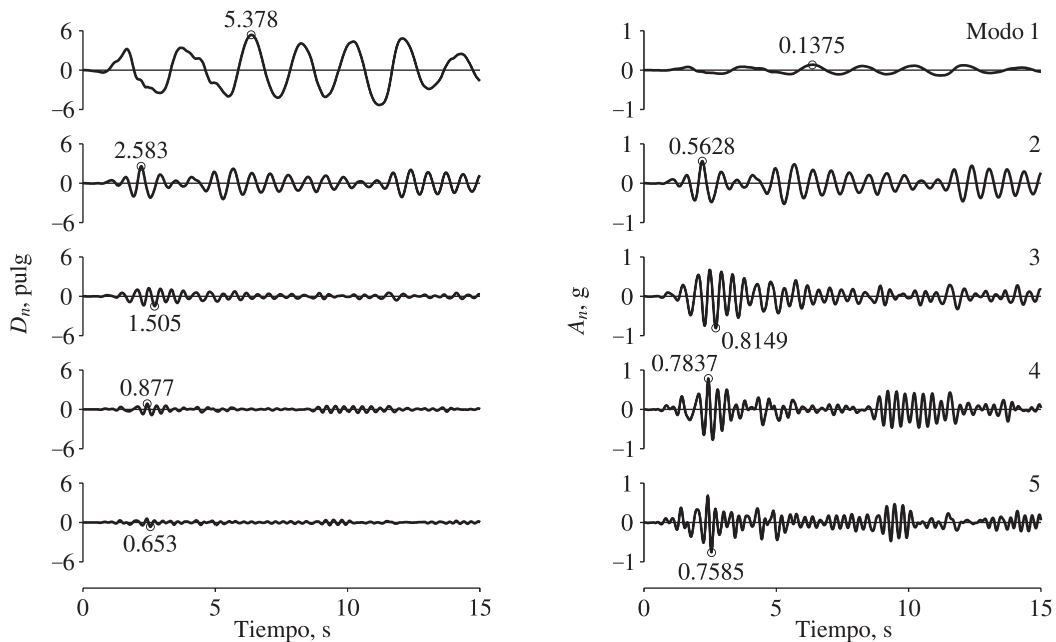


Figura 13.2.6 Respuestas de desplazamiento $D_n(t)$ y pseudo-aceleración A_n(t) de sistemas modales de 1GDL.

$D_n(t)$. En cada instante de tiempo la pseudo-aceleración se calcula a partir de $A_n(t) = \omega^2_n D_n(t)$. Estos cálculos se implementan para los sistemas de 1GDL correspondientes a cada uno de los cinco modos de la estructura y los resultados se presentan en la figura 13.2.6.

Respuestas modales. El paso 5c de la sección 13.2.4 se implementa para determinar la contribución del n-ésimo modo a las cantidades de respuesta seleccionadas: V_b, V_5, M_{bn} y u_5. Las respuestas estáticas modales (tabla 13.2.3) se multiplican por A_n (figura 13.2.6) en cada paso de tiempo para obtener los resultados presentados en las figuras 13.2.7 y 13.2.8.

Estos resultados dan una primera impresión de los valores relativos de las contribuciones a la respuesta para los distintos modos. Las respuestas estáticas modales (tabla 13.2.3) habían sugerido que la respuesta sería más grande en el modo fundamental y tendería a disminuir en los modos superiores. Tal es el caso de este ejemplo para el desplazamiento del techo, el cortante basal y el momento de volteo en la base, pero no para la fuerza cortante en el quinto entrepiso. La forma en la que las respuestas modales relativas dependen de la cantidad de respuesta y de las propiedades del edificio se analiza en el capítulo 18 (lo encontrará en inglés en el sitio web del libro).

Respuestas totales. Las respuestas totales, determinadas mediante la combinación de las contribuciones modales $r_n(t)$ (paso 6 de la sección 13.2.4) de acuerdo con la ecuación (13.2.10), se muestran en las figuras 13.2.7 y 13.2.8. Los resultados presentados indican que no es necesario incluir las contribuciones de todos los modos en el cálculo de la respuesta de un edificio de varios niveles; puede ser suficiente incluir pocos modos infe-

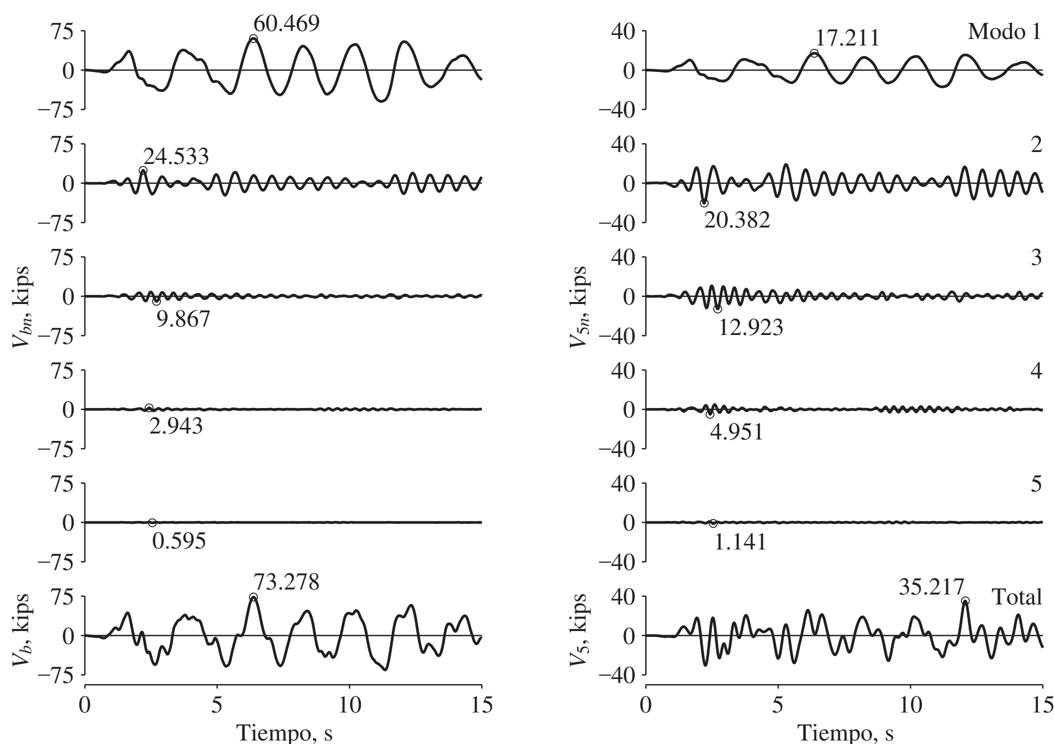


Figura 13.2.7 Cortante basal y en el quinto entrepiso: contribuciones modales, $V_{bn}(t)$ y $V_{5n}(t)$, y respuestas totales, $V_b(t)$ y $V_5(t)$.

riores y en consecuencia las sumas modales pueden truncarse. En este ejemplo particular, la contribución de los modos cuarto y quinto podría despreciarse; los resultados seguirían siendo precisos para su uso en el diseño estructural. La cantidad de modos que debe incluirse depende del movimiento sísmico del terreno y de las propiedades del edificio. Este tema se aborda en el capítulo 18 (en inglés en el sitio web).

Antes de abandonar este ejemplo se harán tres observaciones adicionales que serán muy útiles en la parte B de este capítulo. En primer lugar, como se vio en el capítulo 6, los máximos de D_n(t) y $A_n(t)$, indicados en la figura 13.2.6, pueden determinarse a partir del espectro de respuesta para el movimiento del terreno. Este hecho permitirá determinar el valor máximo de la contribución del n-ésimo modo a cualquier cantidad de respuesta directamente del espectro de respuesta. En segundo lugar, la contribución del n-ésimo modo a cada cantidad de respuesta alcanza su valor máximo al mismo tiempo que $A_n(t)$. En tercer lugar, el valor máximo de la respuesta total ocurre en un instante de tiempo diferente a cuando se alcanzan las respuestas modales máximas individuales. Por otra parte, los valores máximos de las respuestas totales para las cuatro cantidades de respuesta se producen en diferentes instantes de tiempo debido a que los valores relativos de las contribuciones modales varían con la cantidad de respuesta.

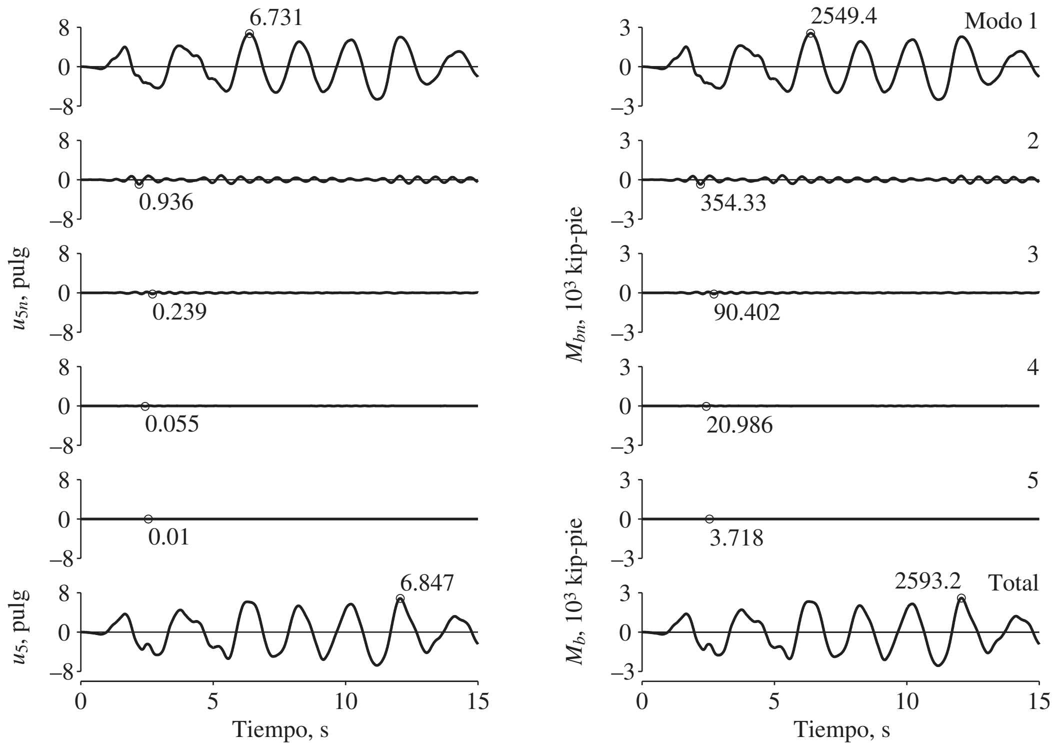


Figura 13.2.8 Desplazamiento del techo y momento de volteo en la base: contribuciones modales, $u_{5n}(t)$ y $M_{bn}(t)$, y respuestas totales, $u_5(t)$ y $M_b(t)$.

13.2.7 Ejemplo: marco de cuatro niveles con un apéndice

En esta sección se aborda el análisis sísmico y el estudio de la respuesta de un edificio de cuatro niveles con un apéndice ligero (un penthouse, una pequeña construcción para instalaciones mecánicas, un espectacular publicitario, o apéndices similares). Este ejemplo se presenta porque destaca ciertas características especiales de la respuesta representativas de un sistema con dos frecuencias naturales cercanas.

Propiedades del sistema. Las masas concentradas en los cuatro primeros pisos son $m_j = m$, la masa del apéndice $m_5 = 0.01m$ y $m = 100$ kips/g. La rigidez lateral de cada uno de los primeros cuatro entrepisos es $k_j = k$, la rigidez del apéndice $k_5 = 0.0012k$ y $k = 22.599$ kips/pulg. La altura de cada entrepiso y del apéndice es de 12 pies. La fracción de amortiguamiento para todos los modos naturales es $\zeta_n = 5\%$. Se determinará la respuesta de este sistema para el movimiento del terreno de El Centro. El procedimiento de análisis y su aplicación son idénticos a los de la sección 13.2.6; por lo tanto, sólo se presenta un resumen de los resultados.

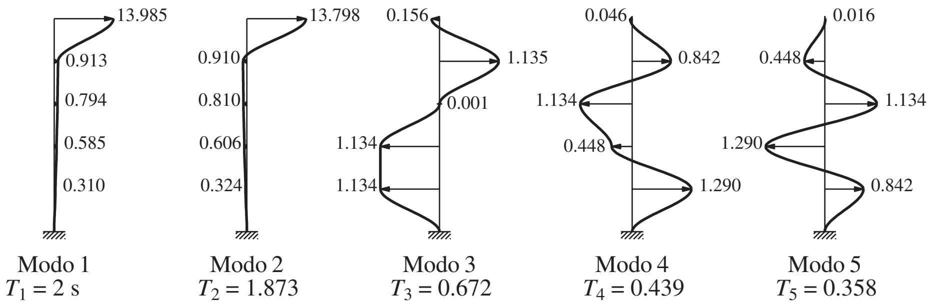


Figura 13.2.9 Periodos y modos naturales de vibración de un edificio con un apéndice.

TABLA 13.2.4 RESPUESTAS ESTÁTICAS MODALES

	Modo				
	1	2	3	4	5
V_{bn}^{st}/m	1.951	1.633	0.333	0.078	0.015
V_{5n}^{st}/m_5	9.938	−8.979	0.046	−0.007	0.0001

Resumen de resultados. Los periodos naturales T_n y los modos naturales ϕ_n de este sistema se presentan en la figura 13.2.9. Observe que T_1 y T_2 son cercanos y los modos correspondientes muestran grandes deformaciones en el apéndice. La tabla 13.2.4 proporciona las respuestas estáticas modales para el cortante basal V_b y el cortante en el apéndice V_5. Observe que las V_{5n}^{st} para los dos primeros modos son similares en magnitud y tienen el mismo signo algebraico; las V_{5n}^{st} para los dos primeros modos también tienen una magnitud similar, pero signos opuestos. En la figura 13.2.10 se muestran las respuestas $D_n(t)$ y $A_n(t)$ de los sistemas de 1GDL correspondientes a los cinco modos del sistema. Observe que $D_n(t)$, y también $A_n(t)$, para los dos primeros modos están en fase debido a que los dos periodos naturales son cercanos; los valores máximos son similares debido a los periodos semejantes y a los amortiguamientos idénticos en los dos modos.

En la figura 13.2.11 se presentan las contribuciones modales al cortante basal y al cortante en el apéndice junto con la respuesta total. Observe que las contribuciones a la respuesta de los dos primeros modos son similares en magnitud debido a que las respuestas estáticas modales son aproximadamente iguales y las $A_n(t)$ son similares. En el caso del cortante basal, las dos respuestas estáticas modales tienen el mismo signo algebraico, lo que implica que las dos contribuciones modales están en fase [debido a que $A_1(t)$ y $A_2(t)$ lo están] y, por lo tanto, el cortante basal combinado es mucho mayor que las respuestas modales individuales. En contraste, las respuestas estáticas modales del cortante en el apéndice son de signo algebraico opuesto, lo que indica que las dos contribuciones modales están en esencia fuera de fase y, por consiguiente, el cortante en el apéndice combinado es mucho más pequeño que las respuestas modales individuales. Sin embargo, es muy grande, siendo casi igual a su propio peso. Como resultado, se ha observado un daño significativo en los apéndices en la parte superior de las estructuras casi intactas durante los sismos. En las figuras 13.2.12 y 13.2.13 se muestran dos ejemplos.

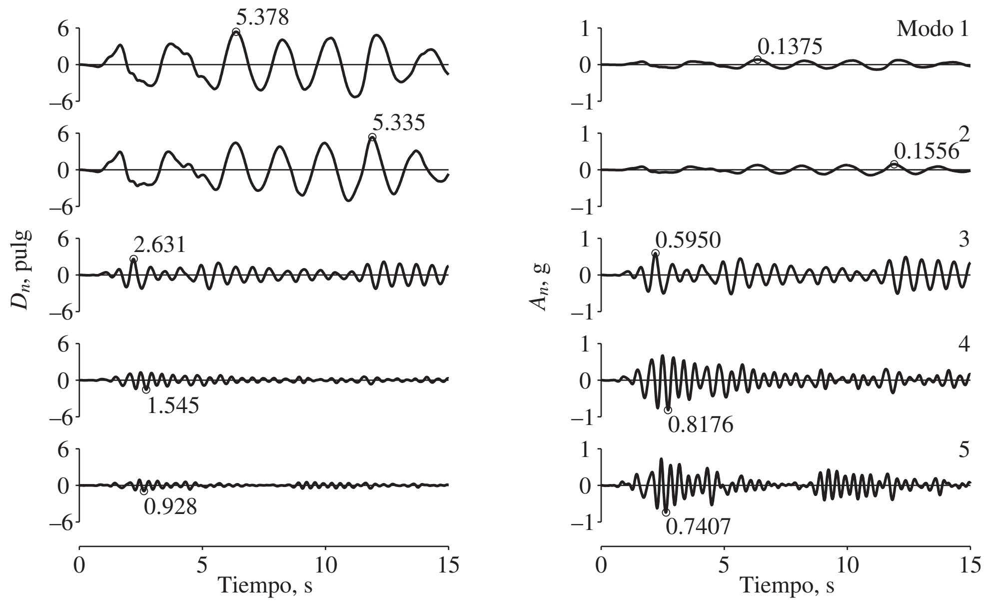


Figura 13.2.10 Respuestas de desplazamiento $D_n(t)$ y pseudo-aceleración $A_n(t)$ de los sistemas modales de 1GDL.

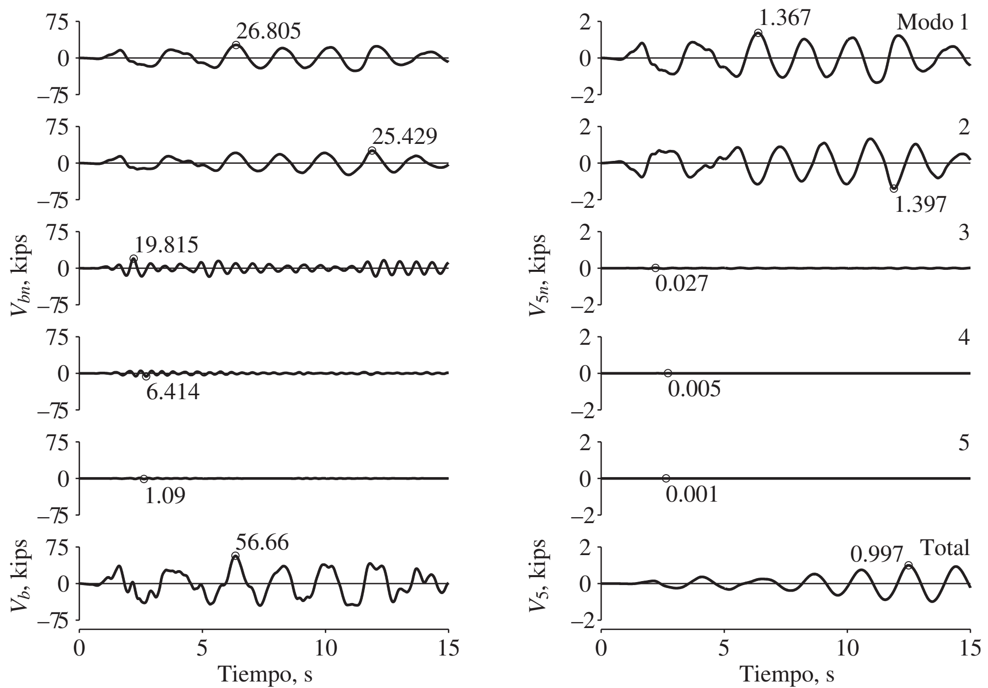


Figura 13.2.11 Cortantes basales y en el apéndice: contribuciones modales, $V_{bn}(t)$ y $V_{5n}(t)$, y respuestas totales, $V_b(t)$ y $V_5(t)$



Figura 13.2.12 Edificio Hill en Anchorage, Alaska, después del sismo de Prince William Sound, el 27 de marzo de 1964, con una magnitud de 9.2. Con excepción del daño al muro del penthouse (acercamiento), el edificio quedó casi intacto. (Tomada de la colección Steinbrugge, Servicio de Información Nacional de Ingeniería Sísmica, Universidad de California, Berkeley).



Figura 13.2.13 La Torre de Tokio, con 1091 pies de altura, se comportó bien durante el sismo de Tohoku, Japón, el 11 de marzo de 2011, con una magnitud de 9.0; a excepción de la parte superior que se flexionó de forma permanente. Se muestra la torre antes y después del sismo, con un segundo acercamiento a la flexión cerca de la punta. (Cortesía de C. D. James y C. Bodnar-Anderson, Servicio de Información Nacional de Ingeniería Sísmica de la Universidad de California, Berkeley).

13.3 EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES CON PLANTA ASIMÉTRICA

En esta sección el análisis modal de la sección 13.1 se especifica para los edificios de varios niveles con plantas simétricas alrededor del eje x, pero asimétricas respecto al eje y, sometidos al movimiento del terreno $\ddot{u}_{gy}(t)$ en la dirección y. La ecuación (9.6.8b) controla el movimiento de los $2N$ grados de libertad del sistema. Si los diafragmas de piso tienen el mismo radio de giro r (es decir, $I_{OJ} = r^2 m_j$), la ecuación (9.6.8b) se especifica como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r^2\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_y \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{yy} & \mathbf{k}_{y\theta} \\ \mathbf{k}_{\theta y} & \mathbf{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r^2\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \quad (13.3.1)$$

El procedimiento general de análisis desarrollado en la sección 13.1 es aplicable a edificios de planta asimétrica porque la ecuación (13.3.1) tiene la misma forma que la ecuación (13.1.1).

13.3.1 Expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas

Las fuerzas sísmicas efectivas $\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$ están definidas por el lado derecho de la ecuación (13.3.1):

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = - \begin{Bmatrix} \mathbf{m1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \equiv -\mathbf{s}\ddot{u}_{gy}(t) \quad (13.3.2)$$

La distribución espacial $\mathbf{s}$ de estas fuerzas sísmicas efectivas puede expandirse como la sumatoria de las distribuciones de fuerza inercial modal $\mathbf{s}_n$ (sección 12.8):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{m1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{s}_n = \sum_{n=1}^{2N} \Gamma_n \begin{Bmatrix} \mathbf{m}\phi_{yn} \\ r^2\mathbf{m}\phi_{\theta n} \end{Bmatrix} \quad (13.3.3)$$

En esta ecuación, ϕ_{yn} incluye las traslaciones y $\phi_{\theta n}$ las rotaciones de los N niveles alrededor de un eje vertical en el n-ésimo modo de (es decir, $\phi_n^T = \langle \phi_{yn}^T \quad \phi_{\theta n}^T \rangle$):

$$\Gamma_n = \frac{L_n^h}{M_n} \quad (13.3.4)$$

donde

$$L_n^h = \langle \phi_{yn}^T \quad \phi_{\theta n}^T \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{m1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \phi_{yn}^T \mathbf{m1} = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jyn} \quad (13.3.5)$$

y

$$M_n = \langle \phi_{yn}^T \quad \phi_{\theta n}^T \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \\ & r^2\mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{yn} \\ \phi_{\theta n} \end{Bmatrix}$$

o

$$M_n = \phi_{yn}^T \mathbf{m} \phi_{yn} + r^2 \phi_{\theta n}^T \mathbf{m} \phi_{\theta n} = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jyn}^2 + r^2 \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{j\theta n}^2 \quad (13.3.6)$$

donde j indica el número de nivel y m_j la masa del nivel. La ecuación (13.3.5) difiere de la ecuación (13.2.3b) para los sistemas de planta simétrica porque ϕ_{yn} no es necesariamente igual a ϕ_n. Las ecuaciones (13.3.4) a (13.3.6) para Γ_n pueden deducirse premultiplicando

ambos lados de la ecuación (13.3.3) por ϕ_r^T, y usando la propiedad de ortogonalidad de los modos. En la ecuación (13.3.3) la contribución del n-ésimo modo a la distribución espacial de las fuerzas sísmicas efectivas es

$$\mathbf{s}_n = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{yn} \\ \mathbf{s}_{\theta n} \end{Bmatrix} = \Gamma_n \begin{Bmatrix} \mathbf{m}\phi_{yn} \\ r^2\mathbf{m}\phi_{\theta n} \end{Bmatrix} \tag{13.3.7}$$

El j-ésimo elemento de estos subvectores proporciona la fuerza lateral s_{jyn} y el par de torsión $s_{j\theta n}$ en el j-ésimo nivel:

$$s_{jyn} = \Gamma_n m_j \phi_{jyn} \qquad s_{j\theta n} = \Gamma_n r^2 m_j \phi_{j\theta n} \tag{13.3.8}$$

Al premultiplicar cada ecuación submatricial en la ecuación (13.3.3) por $\mathbf{1}^T$, pueden deducirse dos resultados interesantes:

$$\sum_{n=1}^{2N} M_n^* = \sum_{j=1}^{N} m_j \qquad \sum_{n=1}^{2N} I_{On}^* = 0 \tag{13.3.9}$$

donde

$$M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} \qquad I_{On}^* = r^2\Gamma_n \mathbf{1}^T \mathbf{m}\phi_{\theta n} \tag{13.3.10}$$

Aunque esta ecuación de M_n^* para los sistemas con planta asimétrica parece ser igual que la ecuación (13.2.9a) para los sistemas de planta simétrica, éstas pueden no ser idénticas porque las formas de modo ϕ_{yn} y ϕ_n en los dos casos no son necesariamente las mismas. Más adelante se verá que M_n^* es la masa modal efectiva cortante basal para el n-ésimo modo y también la respuesta estática modal al cortante basal. En cuanto a los edificios de planta simétrica, la ecuación (13.3.9a) implica que la suma de las masas modales efectivas de todos los modos es igual a la masa total del edificio. Como se verá más adelante, I_{On}^* es la respuesta estática modal para el par de torsión en la base; su suma para todos los modos es igual a cero de acuerdo con la ecuación (13.3.9b).

Ejemplo 13.7

Determine la expansión modal para la distribución de las fuerzas sísmicas efectivas del sistema del ejemplo 10.6, sometido a un movimiento del terreno en la dirección y. También calcule las respuestas estáticas modales para el cortante basal y el par de torsión en la base, y verifique la ecuación (13.3.9)

Solución Los grados de libertad son el desplazamiento lateral u_y y la rotación u_θ del techo. Con referencia a estos grados de libertad, las frecuencias y los modos naturales se determinaron en el ejemplo 10.6:

$$\omega_1 = 5.878 \qquad \omega_2 = 6.794 \text{ rad/seg}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} -0.5228 \\ 0.0493 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.5131 \\ -0.0502 \end{Bmatrix}$$

Si se especifican las ecuaciones (13.3.6), (13.3.5) y (13.3.4) para un sistema de una sola planta con techo de masa m y radio de giro r, resulta

$$M_n = m(\phi_{yn}^2 + r^2\phi_{\theta n}^2) \qquad L_n^h = m\phi_{yn} \qquad \Gamma_n = \frac{L_n^h}{M_n} \tag{a}$$

Para este sistema, $m = 1.863$ kip-s^2/pie y $r^2 = (b^2 + d^2)/12 = (30^2 + 20^2)/12 = 108.\overline{3}$ pies^2 (vea el ejemplo 10.6). En la ecuación (a) con $n = 1$, al sustituir los valores conocidos de m, r, ϕ_{y1} y $\phi_{\theta 1}$, se obtiene $M_1 = 1.863\left[(-0.5228)^2 + 108.\overline{3}(0.0493)^2\right] = 1.0$, $L_1^h = 1.863(-0.5228) = -0.974$

y $\Gamma_1 = -0.974$. De manera similar, en la ecuación (a) con $n = 2$, al sustituir m, r, ϕ_{y2} y $\phi_{\theta 2}$, se obtiene $M_2 = 1.0$, $L_2^h = -0.956$ y $\Gamma_2 = -0.956$.

La expansión modal de la distribución de fuerza sísmica efectiva se obtiene de la ecuación (13.3.3), al especificarla para un sistema de un solo nivel:

$$\begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{2} \Gamma_n \begin{Bmatrix} m\phi_{yn} \\ r^2 m\phi_{\theta n} \end{Bmatrix} \tag{b}$$

Si se sustituyen los valores numéricos de Γ_n, ϕ_{yn}, $\phi_{\theta n}$ y r, resulta

$$m\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix} 0.509 \\ -5.203 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} 0.491 \\ 5.203 \end{Bmatrix}$$

Esta expansión modal se muestra en la planta estructural de la figura E13.7.

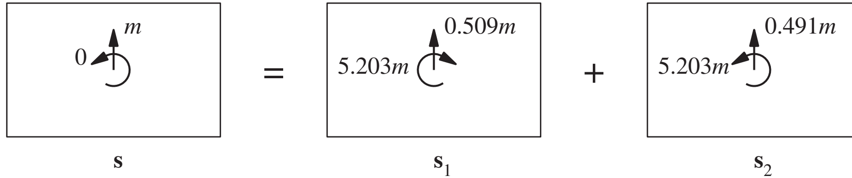


Figura E13.7 Expansión modal del vector de fuerza efectiva mostrada en la vista de planta del edificio.

El análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $\mathbf{s}_n$ (figura E13.7) proporciona las respuestas estáticas modales del cortante y el par de torsión basales: $V_{b1}^{st} = 0.509\,m$ y $V_{b2}^{st} = 0.491\,m$; $T_{b1}^{st} = -5.203\,m$ y $T_{b2}^{st} = 5.203\,m$.

Al especificar la ecuación (13.3.10) para un sistema de un solo nivel, se obtiene

$$M_n^* = \frac{(L_n^h)^2}{M_n} \qquad I_{On}^* = \Gamma_n r^2 m\phi_{\theta n} \tag{c}$$

Si se sustituyen los valores numéricos para Γ_n, L_n^h, M_n, r, m y $\phi_{\theta n}$, resulta

$$M_1^* = 0.509\,m \qquad I_{O1}^* = -5.203\,m \qquad M_2^* = 0.491\,m \qquad I_{O2}^* = 5.203\,m$$

Observe que estos datos muestran que $M_1^* + M_2^* = m$ e $I_{O1}^* + I_{O2}^* = 0$, lo cual proporciona una confirmación numérica de la ecuación (13.3.9) para este sistema de un nivel ($N = 1$). Observe que, como se esperaba, $V_{bn}^{st} = M_n^*$ y $T_{bn}^{st} = I_{On}^*$.

13.3.2 Respuestas modales

Desplazamientos. La ecuación diferencial que controla la n-ésima coordenada modal es la ecuación (13.1.7), con $\ddot{u}_g(t)$ sustituida por $\ddot{u}_{gy}(t)$, y Γ_n está definida por las ecuaciones (13.3.4) a (13.3.6). Si se usa este Γ_n, la ecuación (13.1.10) proporciona la contribución $\mathbf{u}_n(t)$ del n-ésimo modo al desplazamiento $\mathbf{u}(t)$. El desplazamiento lateral $\mathbf{u}_{yn}$ y los desplazamientos torsionales $\mathbf{u}_{\theta n}$ son

$$\mathbf{u}_{yn}(t) = \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_{yn} D_n(t) \qquad \mathbf{u}_{\theta n}(t) = \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_{\theta n} D_n(t) \tag{13.3.11}$$

En particular, los desplazamientos laterales y torsionales del j-ésimo piso son

$$u_{jyn}(t) = \Gamma_n \phi_{jyn} D_n(t) \qquad u_{j\theta n}(t) = \Gamma_n \phi_{j\theta n} D_n(t) \tag{13.3.12}$$

Fuerzas del edificio. Las fuerzas estáticas equivalentes $\mathbf{f}_n(t)$ asociadas con los desplazamientos $\mathbf{u}_n(t)$ incluyen las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{yn}(t)$ y los pares de torsión $\mathbf{f}_{\theta n}(t)$. Estas fuerzas están dadas por una generalización de la ecuación (13.1.11):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{yn}(t) \\ \mathbf{f}_{\theta n}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{yn} \\ \mathbf{s}_{\theta n} \end{Bmatrix} A_n(t) \tag{13.3.13}$$

La fuerza lateral y el par de torsión en el j-ésimo nivel son

$$f_{jyn}(t) = s_{jyn} A_n(t) \qquad f_{j\theta n}(t) = s_{j\theta n} A_n(t) \tag{13.3.14}$$

Entonces, la respuesta r debida al n-ésimo modo está dada por la ecuación (13.1.13), que se repite aquí por conveniencia:

$$r_n(t) = r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.3.15}$$

La respuesta estática modal r_n^{st} se determina mediante el análisis estático del edificio debido a las fuerzas externas $\mathbf{s}_{yn}$ y $\mathbf{s}_{\theta n}$. Al aplicar estas fuerzas a la estructura, la dirección de las fuerzas está controlada por el signo algebraico de ϕ_{jyn} y $\phi_{j\theta n}$. En particular, para el modo fundamental, todas las fuerzas laterales actúan en la misma dirección, del mismo modo que todos los pares de torsión (figura 13.3.1). Sin embargo, para modos superiores al primero, las fuerzas laterales o los pares, o ambos, cambiarán su dirección a medida que se consideran niveles superiores.

En la tabla 13.3.1 se presentan las respuestas estáticas modales para ocho cantidades de respuesta: el cortante V_i y el par de torsión T_i en el i-ésimo entrepiso, el momento de volteo M_i en el i-ésimo nivel, el cortante basal V_b, el par de torsión en la base T_b, y el momento de volteo basal M_b, las traslaciones por nivel u_{jy} y las rotaciones por nivel $u_{j\theta}$. Las ecuaciones para las fuerzas se determinan mediante el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{s}_{yn}$ y a los pares $\mathbf{s}_{\theta n}$ (figura 13.3.1); y los resultados para u_j y $u_{j\theta}$ se obtienen al escribir las ecuaciones (13.3.12) de manera similar a la ecuación (13.3.15).

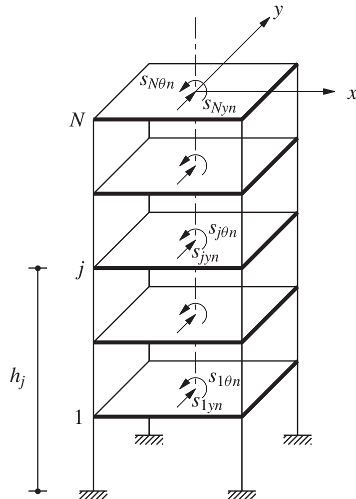


Figura 13.3.1 Fuerzas externas s_{jyn} y $s_{j\theta n}$ para el n-ésimo modo.

TABLA 13.3.1 RESPUESTAS ESTÁTICAS MODALES

Respuesta, r	Respuesta estática modal, r_n^{st}
V_i	$V_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} s_{jyn}$
M_i	$M_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} (h_j - h_i) s_{jyn}$
T_i	$T_{in}^{\text{st}} = \sum_{j=i}^{N} s_{j\theta n}$
V_b	$V_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} s_{jyn} = \Gamma_n L_n^h = M_n^*$
M_b	$M_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} h_j s_{jyn} = \Gamma_n L_n^\theta = h_n^* M_n^*$
T_b	$T_{bn}^{\text{st}} = \sum_{j=1}^{N} s_{j\theta n} = I_{On}^*$
u_{jy}	$u_{jyn}^{\text{st}} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\phi_{jyn}$
$u_{j\theta}$	$u_{j\theta n}^{\text{st}} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\phi_{j\theta n}$

Las partes de las ecuaciones para V_{bn}^{st}, M_{bn}^{st} y T_{bn}^{st} se obtienen al sustituir la ecuación (13.3.8) para s_{jyn} y $s_{j\theta n}$, la ecuación (13.3.5) para L_n^h, la ecuación (13.3.10) para M_n^* e I_{On}^*, y la ecuación (13.2.9a) para h_n^* con ϕ_{jn} sustituido por ϕ_{jyn} en la ecuación (13.2.9b).

Al especificar la ecuación (13.3.15) para V_b, M_b y T_b, y al sustituir V_{bn}^{st}, M_{bn}^{st} y T_{bn}^{st} a partir de la tabla 13.3.1, se obtiene

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t) \qquad T_{bn}(t) = I_{On}^* A_n(t) \qquad M_{bn}(t) = h_n^* M_n^* A_n(t) \tag{13.3.16}$$

Por las razones mencionadas en la sección 13.2.5, M_n^* se llama la *masa modal efectiva* y h_n^* la *altura modal efectiva*.

Fuerzas del marco. Además de las fuerzas generales de cada piso del edificio, se desea determinar las fuerzas de los elementos (momentos flexionantes, fuerzas cortantes, etcétera) en los elementos estructurales (vigas, columnas, muros, etcétera) en cada marco del edificio. Para este propósito, los desplazamientos laterales $\mathbf{u}_{in}$ del i-ésimo marco asociados con los desplazamientos $\mathbf{u}_n$ en los grados de libertad de los niveles del edificio se determinan a partir de la ecuación (9.5.21). Si se sustituye la ecuación (9.5.22) para $\mathbf{a}_{xi}$ y $\mathbf{a}_{yi}$, $\mathbf{u}_n^T = \langle \mathbf{u}_{yn}^T \quad \mathbf{u}_{\theta n}^T \rangle$ y la ecuación (13.3.11) para $\mathbf{u}_{yn}$ y $\mathbf{u}_{\theta n}$, se llega a

$$\mathbf{u}_{in}(t) = \Gamma_n(-y_i \phi_{\theta n}) D_n(t) \qquad \mathbf{u}_{in}(t) = \Gamma_n(\phi_{yn} + x_i \phi_{\theta n}) D_n(t) \tag{13.3.17}$$

La primera ecuación es para los marcos orientados en la dirección x y la segunda para los marcos en la dirección y. En cada instante de tiempo, las fuerzas internas en los elementos del marco i pueden determinarse a partir de estos desplazamientos y rotaciones de nudo (vea el ejemplo 13.4) usando las propiedades de rigidez del elemento (apéndice 1).

De manera alternativa, las fuerzas estáticas equivalentes $\mathbf{f}_{in}$ pueden definirse para el i-ésimo marco con la matriz de rigidez lateral $\mathbf{k}_{xi}$ si el marco está orientado en la dirección

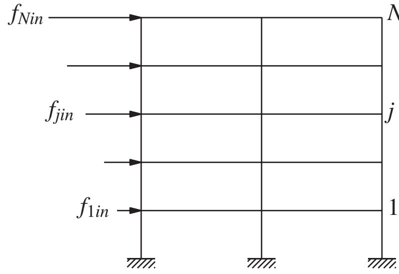


Figura 13.3.2 Fuerzas estáticas equivalentes para el i-ésimo marco asociado con la respuesta del edificio en su n-ésimo modo natural.

x o $\mathbf{k}_{yi}$ para un marco en la dirección y. Así,

$$\mathbf{f}_{in}(t) = \mathbf{k}_{xi}\mathbf{u}_{in}(t) = (\Gamma_n/\omega_n^2)\mathbf{k}_{xi}(-y_i\phi_{\theta n})A_n(t) \tag{13.3.18a}$$

$$\mathbf{f}_{in}(t) = \mathbf{k}_{yi}\mathbf{u}_{in}(t) = (\Gamma_n/\omega_n^2)\mathbf{k}_{yi}(\phi_{yn} + x_i\phi_{\theta n})A_n(t) \tag{13.3.18b}$$

donde las ecuaciones (13.3.17) y (13.1.12) se utilizan para obtener la segunda parte de estas ecuaciones. En cada instante de tiempo, las fuerzas de los elementos se determinan mediante el análisis estático del i-ésimo marco sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{in}(t)$ mostradas en la figura 13.3.2.

13.3.3 Respuesta total

La combinación de las contribuciones de todos los modos a la respuesta proporciona la respuesta total del edificio con planta asimétrica a la excitación sísmica:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{2N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{2N} r_n^{\text{st}} A_n(t) \tag{13.3.19}$$

donde la ecuación (13.3.15) se ha sustituido por $r_n(t)$, la respuesta del n-ésimo modo.

13.3.4 Resumen

La historia de la respuesta de un edificio de N niveles con planta asimétrica alrededor del eje y a un movimiento sísmico del terreno en la dirección y puede calcularse mediante el procedimiento que se acaba de desarrollar, el cual se resume enseguida paso a paso:

1. Defina en forma numérica la aceleración del terreno $\ddot{u}_{gy}(t)$ en cada paso de tiempo Δt.
2. Defina las propiedades estructurales.
   a. Determine las matrices de masa y rigidez a partir de las ecuaciones (13.3.1) y (9.5.26).
   b. Estime las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n (capítulo 11).
3. Determine las frecuencias naturales ω_n (periodos naturales $T_n = 2\pi/\omega_n$) y los modos naturales de vibración (capítulo 10).
4. Determine los componentes modales $\mathbf{s}_n^T = \langle \mathbf{s}_{yn}^T \quad \mathbf{s}_{\theta n}^T \rangle$— (definidos por las ecuaciones 13.3.7 y 13.3.8) de la distribución de fuerza efectiva.

5. Calcule la contribución a la respuesta del n-ésimo modo mediante los siguientes pasos, que se repiten para todos los modos, $n = 1, 2,..., 2N$:

a. Realice el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{s}_{yn}$ y los pares de torsión $\mathbf{s}_{\theta n}$ para determinar r_n^{st}, la respuesta estática modal para cada cantidad de respuesta r deseada (tabla 13.3.1).

b. Determine la respuesta de deformación $D_n(t)$ y la respuesta de pseudo-aceleración $A_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_{gy}(t)$, usando los métodos numéricos de tiempo paso a paso (capítulo 5).

c. Determine $r_n(t)$ a partir de la ecuación (13.3.15). Esta ecuación también puede usarse para determinar las fuerzas de los elementos en el i-ésimo marco, dado que las respuestas estáticas modales se deducen de estas cantidades de respuesta. De manera alternativa, estas fuerzas internas pueden determinarse mediante el análisis estático del marco sometido a las fuerzas laterales de la ecuación (13.3.18).

6. Combine las contribuciones modales $r_n(t)$ para determinar la respuesta total usando la ecuación (13.3.19).

En el análisis modal sólo es necesario incluir los modos de respuesta con contribuciones significativas. El sistema considerado tiene movimientos laterales-torsionales acoplados en $2N$ modos o N pares de modos. Para muchos edificios, ambos modos en un par tienen frecuencias naturales similares y la magnitud de las respuestas es semejante (vea el ejemplo 13.8). Por lo general, sólo unos cuantos pares de los modos inferiores contribuyen de manera significativa a la respuesta. Por lo tanto, los pasos 3, 4, y 5 deben implementarse sólo para estos pares modales y como consecuencia la sumatoria modal del paso 6 puede truncarse.

Extensión para edificios con planta arbitraria. El procedimiento que se acaba de resumir sirve para el análisis sísmico de edificios con varios niveles y una planta asimétrica alrededor de un eje, por ejemplo el eje y, pero simétrica con respecto al otro eje, el eje x, sometidos al movimiento del terreno en la dirección y. Este procedimiento puede extenderse para los edificios de varios pisos con planta arbitraria que no tienen eje de simetría. En este caso, el sistema con $3N$ grados de libertad dinámicos está controlado por la ecuación (9.6.7) y responderá con los movimientos acoplados lateral en x, lateral en y y torsional, al ser excitado por el movimiento del terreno en las direcciones x o y.

Ejemplo 13.8

Determine la respuesta del sistema de los ejemplos 13.7 y 10.6 con fracciones de amortiguamiento modal $\zeta_n = 5\%$ para el movimiento del terreno de El Centro actuando en dirección del eje y. Las cantidades de respuesta de interés son los desplazamientos por nivel, el cortante basal y el par de torsión en la base del edificio, así como el cortante basal de los marcos A y B.

Solución Los pasos 1 al 4 del procedimiento de análisis (sección 13.3.4) ya se han aplicado en los ejemplos 10.6 y 13.7.

Paso 5a: las respuestas estáticas modales del cortante y el par de torsión basales son (a partir del ejemplo 13.7): $V_{b1}^{st} = 0.509m$ y $V_{b2}^{st} = 0.491m$; $T_{b1}^{st} = -5.203m$ y $T_{b2}^{st} = 5.203m$. Las respuestas estáticas modales para el desplazamiento lateral u_y y la rotación u_θ del techo se obtienen al especificar las ecuaciones de la tabla 13.3.1 para este sistema de un solo nivel:

$$u_{yn}^{st} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\phi_{yn} \qquad u_{\theta n}^{st} = \frac{\Gamma_n}{\omega_n^2}\phi_{\theta n} \tag{a}$$

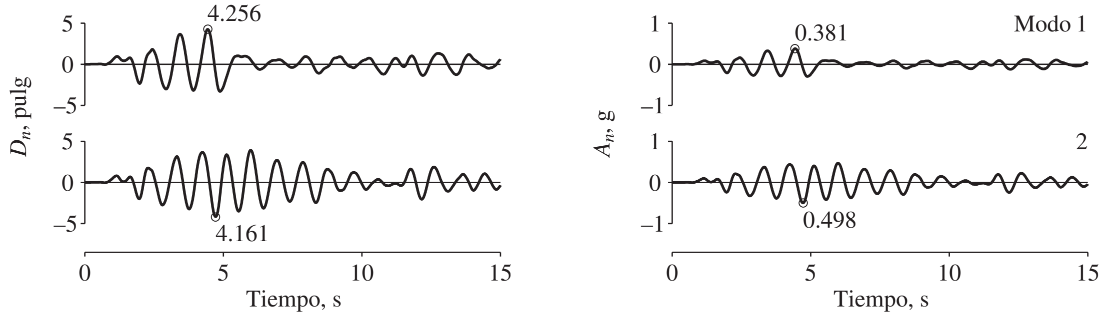


Figura E13.8a Respuestas de desplazamiento $D_n(t)$ y pseudo-aceleración $A_n(t)$ de los sistemas modales de 1GDL.

Si se sustituyen los valores numéricos para Γ_n, ϕ_{yn} y $\phi_{\theta n}$ (a partir del ejemplo 13.7) para el primer modo en la ecuación (a), resultan $u^{st}{}_{y1} = 0.509/\omega_1^2$ y $u_{\theta 1}^{st} = -0.0480/\omega_1^2$. De manera similar, para el segundo modo, $u_{y2}^{st} = 0.491/\omega_2^2$ y $u_{\theta 2}^{st} = 0.0480/\omega_2^2$. Observe que las respuestas estáticas modales u_{yn}^{st} y V_{bn}^{st} para los dos modos son similares en magnitud y tienen el mismo signo algebraico; $u_{\theta n}^{st}$ y T_{bn}^{st} para los dos modos también son similares en magnitud (idénticos para un sistema de un solo nivel) pero tienen signos opuestos.

Paso 5b: el análisis de respuesta para el primer modo del sistema de 1GDL ($T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/5.878 = 1.069$ s y $\zeta_1 = 5\%$) y para el segundo modo del sistema de 1GDL ($T_2 = 2\pi/\omega_2 = 2\pi/6.794 = 0.9248$ s y $\zeta_2 = 5\%$) al movimiento del terreno de El Centro proporciona las $D_n(t)$ y $A_n(t)$ que se muestran en la figura E13.8a. Observe que las $D_n(t)$, y también las $A_n(t)$, para los dos modos son similares y están aproximadamente en fase debido a que sus periodos naturales son semejantes.

Paso 5c: si se sustituyen V_{bn}^{st} y T_{bn}^{st} a partir del paso 5a en la ecuación (13.3/.5), resultan las contribuciones del n-ésimo modo al cortante basal y el par de torsión en la base:

$$V_{b1}(t) = 0.509mA_1(t) \qquad T_{b1}(t) = -5.203mA_1(t) \tag{b}$$

$$V_{b2}(t) = 0.491mA_2(t) \qquad T_{b2}(t) = 5.203mA_2(t) \tag{c}$$

La figura E13.8b muestra los $V_{bn}(t)$ y $T_{bn}(t)$ calculados a partir de las ecuaciones (b) y (c) usando $m = 1.863$ kip-s^2/pie y la $A_n(t)$ de la figura E13.8a.

Si se sustituyen u_{yn}^{st} y $u_{\theta n}^{st}$ a partir del paso 5a de la ecuación (13.3.15), resultan las contribuciones del n-ésimo modo a los desplazamientos del techo:

$$u_{y1}(t) = 0.509D_1(t) \qquad u_{\theta 1}(t) = -0.0480D_1(t) \tag{d}$$

$$u_{y2}(t) = 0.491D_2(t) \qquad u_{\theta 2}(t) = 0.0480D_2(t) \tag{e}$$

donde $D_n(t)$ tiene unidades de pies. En la figura E13.8c se muestra $u_{yn}(t)$ y $(b/2)u_{\theta n}(t)$ calculados a partir de las ecuaciones (d) y (e) utilizando la $D_n(t)$ de la figura E13.8a.

La fuerza lateral para el marco A está dada por la ecuación (13.3.18b) especificada para un marco de un nivel:

$$f_{An}(t) = k_A \left[u_{yn}(t) + x_A u_{\theta n}(t)\right] \tag{f}$$

Si se sustituyen $k_A = 75$ kips/pie, $x_A = 1.5$ pies, $u_{yn}(t)$ y $u_{\theta n}(t)$ a partir de las ecuaciones (d) y (e), resultan

$$f_{A1}(t) = 32.80D_1(t) \text{ kips} \qquad f_{A2}(t) = 42.19D_2(t) \text{ kips}$$

donde $D_n(t)$ tiene unidades de pies. El cortante basal de un marco de un solo nivel es igual a la

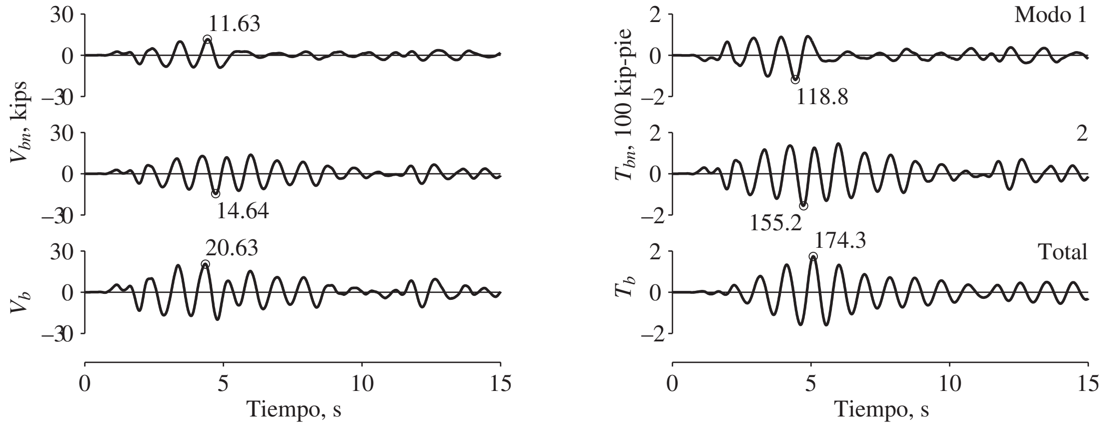


Figura E13.8b Cortante y par de torsión basales: contribuciones modales, $V_{bn}(t)$ y $T_{bn}(t)$, y respuestas totales, $V_b(t)$ y $T_b(t)$.

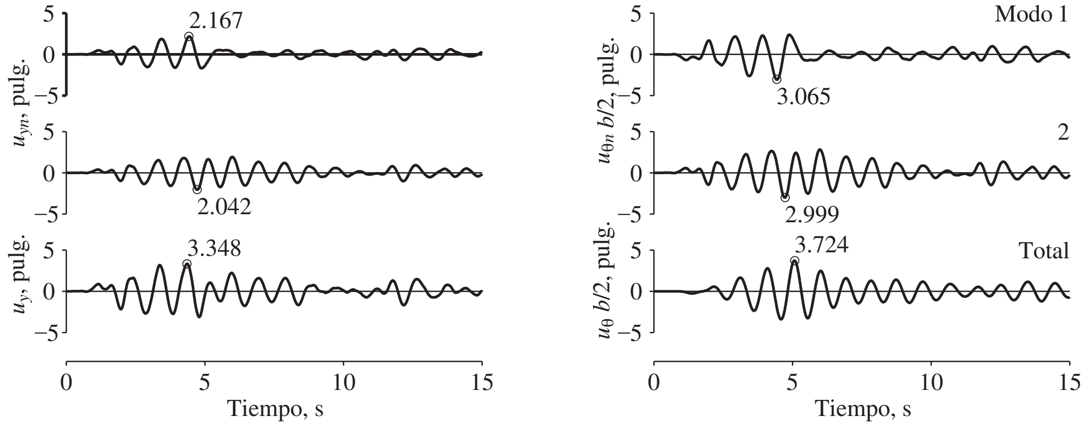


Figura E13.8c Desplazamiento lateral y $b/2$ veces la rotación del techo: contribuciones modales, $u_{yn}(t)$ y $(b/2)u_{\theta n}(t)$, y respuestas totales, $u_y(t)$ y $(b/2)u_\theta(t)$.

fuerza lateral, por lo que el cortante basal debido a los dos modos es

$$V_{bA1}(t) = 32.80D_1(t) \qquad V_{bA2}(t) = 42.19D_2(t) \tag{g}$$

Estos cortantes basales se calculan utilizando la $D_n(t)$ que se conoce a partir de la figura E13.8a y se muestra en la figura E13.8d. Observe que los cortantes basales para el marco A por sí solo y para el edificio son idénticos debido a que el sistema sólo tiene el marco A en la dirección y y esta estructura soporta toda la fuerza.

La fuerza lateral de marco B está dada por la ecuación (13.3.18a) especificada para un marco de un nivel:

$$f_{Bn}(t) = k_B\,[-y_B u_{\theta n}(t)] \tag{h}$$

Al sustituir para $k_B = 40$ kips/pie, $y_B = 10$ pies y $u_{\theta n}$(t) a partir de las ecuaciones (d) y (e), se obtiene

$$f_{B1}(t) = 19.2D_1(t) \qquad f_{B2}(t) = -19.2D_2(t)$$

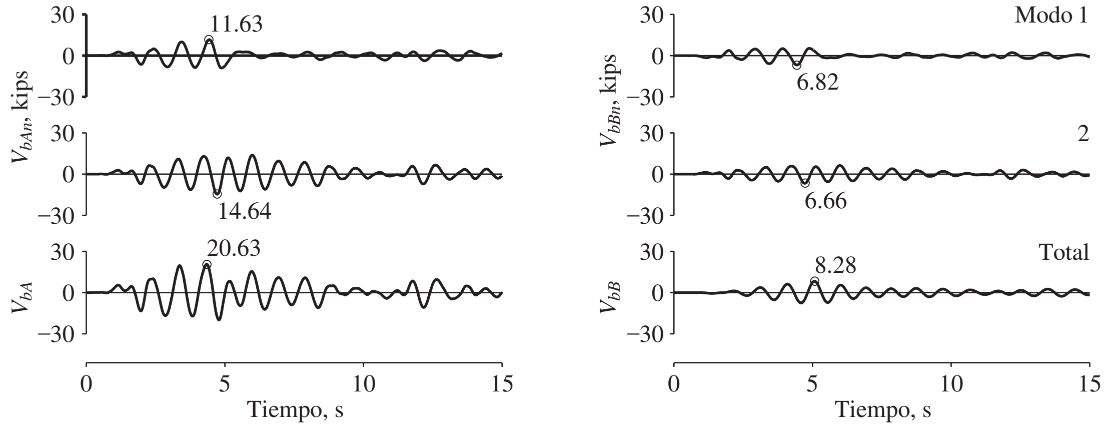


Figura E13.8d Cortantes basales de los marcos *A* y *B*: contribuciones modales, V_{bAn} y V_{bBn}, y respuestas totales, V_{bA} y V_{bB}.

donde $D_n(t)$ tiene unidades de pies. El cortante basal debido a los dos modos es

$$V_{bB1}(t) = 19.2D_1(t) \qquad V_{bB2}(t) = -19.2D_2(t)$$

Estos cortantes basales del marco *B* se calculan utilizando la $D_n(t)$ que se conoce a partir de la figura E13.8a y se muestra en la figura E13.8d.

Las figuras E13.8b a d muestran que los dos modos contribuyen de manera similar a la respuesta de este sistema de un solo nivel. Esto es típico de los sistemas con planta asimétrica donde los pares de modos en una estructura con un eje de simetría (o tripletas de modos si el sistema no tiene eje de simetría) pueden tener contribuciones similares a la respuesta.

Paso 6: la combinación de las contribuciones modales proporciona la respuesta total para este sistema de dos grados de libertad:

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$$

En las figuras E13.8b a d se muestran los valores combinados del desplazamiento lateral, la rotación, el cortante y el par de torsión basales para el edificio, así como el cortante basal para los marcos *A* y *B*. Observe que la respuesta combinada alcanza su valor máximo en un instante de tiempo diferente de los momentos en que se alcanzan los máximos modales.

Comentarios de interpretación. Observe que las contribuciones modales al desplazamiento lateral (y al cortante basal) son similares en magnitud debido a que las respuestas estáticas modales son aproximadamente iguales y las $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son semejantes para los dos modos (figura E13.8a). Las contribuciones modales están aproximadamente en fase porque la $D_n(t)$, así como la $A_n(t)$, para los dos modos están más o menos en fase y las dos respuestas estáticas modales tienen el mismo signo algebraico. Por consiguiente, el pico de la respuesta total es mucho más grande que los picos de las respuestas modales. En contraste, las contribuciones modales a la rotación del techo (y al par de torsión basal), si bien son similares en magnitud, están fuera de fase y las dos respuestas estáticas modales tienen un signo opuesto. Por lo tanto, el pico de la respuesta total es sólo un poco mayor que los picos de las respuestas modales.

Considere otro sistema de un nivel y planta asimétrica, similar al analizado en el ejemplo 13.8 (figura 9.5.1) pero con un menor *e*, por ejemplo $e = 0.5$ en vez de 1.5 pies. Los dos periodos naturales ahora serán mucho más cercanos que para la estructura analizada en el ejemplo 13.8 y la $D_n(t)$, al igual que la A_n(t), para los dos modos estará esencialmente en fase. Para tal sistema, las contribuciones modales al desplazamiento lateral (y al cortante basal)

estarán en fase debido a que las respuestas estáticas modales tendrán el mismo signo; los dos picos modales se superpondrán casi directamente, y el pico de la respuesta total será mucho más grande que los picos de las respuestas modales. Por otra parte, las contribuciones modales a la rotación del techo (y al par de torsión basal) estarán en esencia en fase opuesta, porque las respuestas estáticas modales tendrán signos contrarios; los dos picos modales se anularán entre sí y, entonces, el pico de la respuesta total será mucho más pequeño que los picos de las respuestas modales.

Ejemplo 13.9

Identifique los efectos de la asimetría en planta sobre la respuesta sísmica del sistema de un nivel del ejemplo 13.8; para ello, compare su respuesta con la del sistema de un nivel y planta simétrica definido en la sección 9.5.3.

Solución La respuesta del sistema de planta simétrica al movimiento del terreno en la dirección y se controla por la segunda de las tres ecuaciones diferenciales (9.5.20). Al dividir esta ecuación entre m y al introducir el amortiguamiento, se obtiene la ecuación ya conocida para un sistema de 1GDL:

$$\ddot{u}_y + 2\zeta_y\omega_y\dot{u}_y + \omega_y^2 u_y = -\ddot{u}_{gy}(t) \tag{a}$$

donde $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$. Como se mencionó en la sección 9.5.3, la componente y del movimiento del terreno sólo producirá la respuesta lateral en la dirección y sin ninguna torsión alrededor de un eje vertical o desplazamientos en la dirección x. El desplazamiento lateral en la dirección y es

$$u_y(t) = D(t, \omega_y, \zeta_y) \tag{b}$$

y el cortante basal asociado para el marco A es

$$V_{bA} = mA(t, \omega_y, \zeta_y) \tag{c}$$

donde $D(t, \omega_y, \zeta)$ y $A(t, \omega_y, \zeta)$ indican las respuestas de deformación y de pseudo-aceleración,

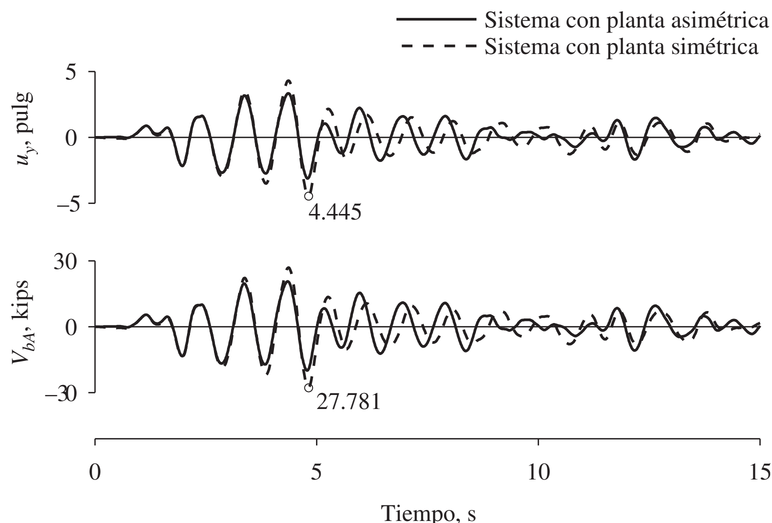


Figura E13.9 Respuestas de los sistemas con planta asimétrica y simétrica.

respectivamente, de un sistema de 1GDL con la frecuencia natural ω_y y la fracción de amortiguamiento ζ a la aceleración del terreno $\ddot{u}_{gy}(t)$. Los marcos *B* y *C* no experimentarían ninguna fuerza.

Para el sistema de planta simétrica asociado con el ejemplo 13.8, $\omega_y = 6.344$ (vea el ejemplo 10.7) y la fracción de amortiguamiento es la misma, $\zeta = 5\%$. La respuesta de este sistema de 1GDL se calcula a partir de las ecuaciones (a) a (c) y se muestra en la figura E13.9, en la que también se compara con la respuesta del sistema de planta asimétrica (ejemplo 13.8). Resulta claro que la asimetría en planta tiene el efecto de (1) modificar el desplazamiento lateral y el cortante basal de un marco, y (2) provocar la torsión en el sistema y las fuerzas en los marcos *B* y *C* que no existen si la planta del edificio es simétrica. En este caso particular, el cortante basal del marco *A* se reduce a causa de la asimetría en planta, pero esto no siempre es así, puesto que depende del periodo natural de la estructura, las características del movimiento del terreno y la ubicación del marco en la planta del edificio.

13.4 RESPUESTA TORSIONAL DE EDIFICIOS CON PLANTA SIMÉTRICA

En esta sección se analiza la respuesta torsional de los edificios de varios niveles con plantas nominalmente simétricas alrededor de dos ejes ortogonales. Tales estructuras pueden someterse a movimientos de torsión "accidentales" por dos razones principales: por lo general el edificio no es simétrico *en su totalidad* y las variaciones espaciales en el movimiento del terreno pueden provocar la rotación (alrededor del eje vertical) de la base del edificio, lo que inducirá al movimiento torsional de éste, incluso si su planta es simétrica en su totalidad.

Considere en primer lugar el análisis de la respuesta torsional de un edificio con una planta simétrica en su totalidad debido a la rotación de su base. Para una excitación rotacional dada $\ddot{u}_{g\theta}(t)$, las ecuaciones de control (9.6.9c) pueden resolverse mediante el procedimiento del análisis modal, considerando sólo los modos de vibración torsionales del edificio. Este procedimiento podría desarrollarse en la dirección de las líneas de la sección 13.3. Sin embargo, no se presenta por dos razones: (1) es sencillo y (2) en la práctica de la ingeniería estructural, los edificios no se analizan para la excitación rotacional. Por lo tanto, en esta breve sección se presentan los resultados de dicho análisis y se comparan con las torsiones registradas en los edificios durante un sismo.

Considere el edificio que se muestra en la figura 13.4.1, ubicado en Pomona, California. Este edificio con un marco de concreto reforzado y dos niveles, tiene un sótano parcial y una estructura de penthouse ligera. Para todos los efectos prácticos y códigos de diseño, el edificio tiene una planta nominalmente simétrica, como lo indica su planta de construcción en la figura 13.4.2. El sistema de resistencia a las fuerzas laterales en el edificio consta de columnas periféricas interconectadas por vigas longitudinales y transversales, pero las columnas de las esquinas externas en forma de L, así como las columnas interiores del edificio no están diseñadas en específico para resistir sismos. El sistema de piso está formado por una losa de concreto con 6 pulg de espesor. El edificio también incluye muros en el núcleo de escaleras (muros de concreto en el sótano y de mampostería en los pisos superiores). Los cimientos de las columnas y los muros interiores están apoyados sobre pilotes.

Los canales de un acelerógrafo situados como se muestra en la figura 13.4.3 registraron el movimiento del edificio durante el sismo de Upland (28 de febrero de 1990), incluyendo tres canales de movimiento horizontal en tres distintas posiciones: el techo, el segundo nivel y el sótano. Las aceleraciones máximas del sótano fueron de 0.12g y 0.13g en el direcciones *x* y *y*, respectivamente.



Figura 13.4.1 Edificio First Federal Savings, una construcción de concreto reforzado con dos niveles (y un sótano parcial) en Pomona, California. (Cortesía de California Strong Motion Instrumentation Program).

En el techo estos movimientos se incrementaron a 0.24g en la dirección x y 0.22g en la dirección y. El edificio no sufrió ningún daño estructural durante el sismo.

Algunos de los movimientos registrados se muestran en la figura 13.4.4. Éstos incluyen las aceleraciones de traslación en x para dos sitios en el sótano del edificio y en dos lugares al nivel del techo. Al superponer los movimientos en dos sitios del techo en la figura 13.4.5 resulta claro que este edificio experimentó alguna torsión; de lo contrario, estos dos movimientos habrían sido idénticos. Si se supone que la base es rígida, su aceleración de giro se calcula como la diferencia entre los dos registros de traslación en el sótano del edificio dividida por la distancia que existe entre las dos ubicaciones. Esta aceleración de rotación en la base se multiplica por $b/2$, donde la dimensión de la planta del edificio $b = 109.75$ pies, y se grafica en la figura 13.4.6. El valor máximo de $(b/2)\ddot{u}_{g\theta}(t)$ es 0.029g, comparado con la aceleración máxima de 0.12g en la dirección x.

La respuesta torsional del edificio al movimiento rotacional del sótano, figura 13.4.6, se determina mediante la solución de la ecuación modal (9.6.9c) con fracciones de amortiguamiento modal del 5%. Éstas se estimaron a partir de los movimientos registrados en el techo y el sótano con algunos de los procedimientos mencionados en la parte A del capítulo 11. En la figura 13.4.7 se presenta la historia de la respuesta de la fuerza cortante en una columna seleccionada del edificio. Ésta es sólo una parte de las fuerzas en los elementos debidas al movimiento de torsión real del edificio durante el sismo, como se demostrará a continuación.

Los valores aproximados de las fuerzas en los elementos debidas a la torsión registrada pueden determinarse en cada instante de tiempo mediante el análisis estático del edificio sometido a los pares de torsión inerciales $I_{Oj}\ddot{u}^t_{j\theta}(t)$ al nivel de cada uno de los pisos ($j = 1, 2, \ldots, N$), donde I_{Oj} es el momento de inercia de la masa del j-ésimo nivel alrededor del eje

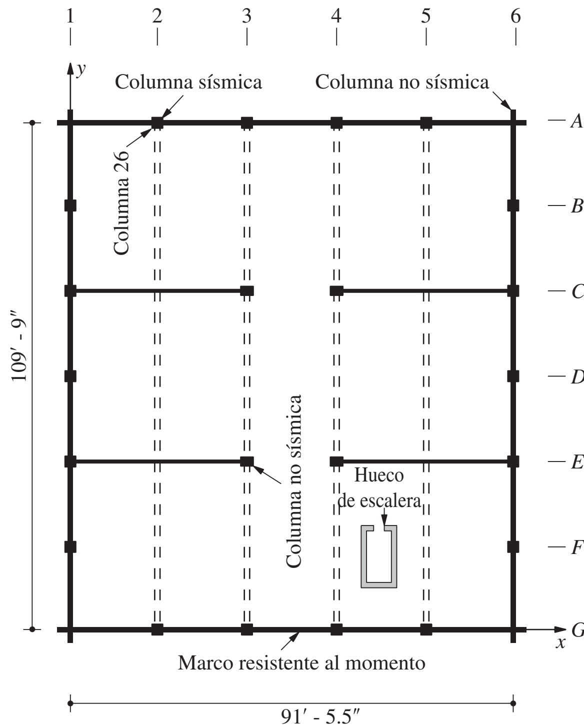


Figura 13.4.2 Planta estructural del edificio First Federal Savings.

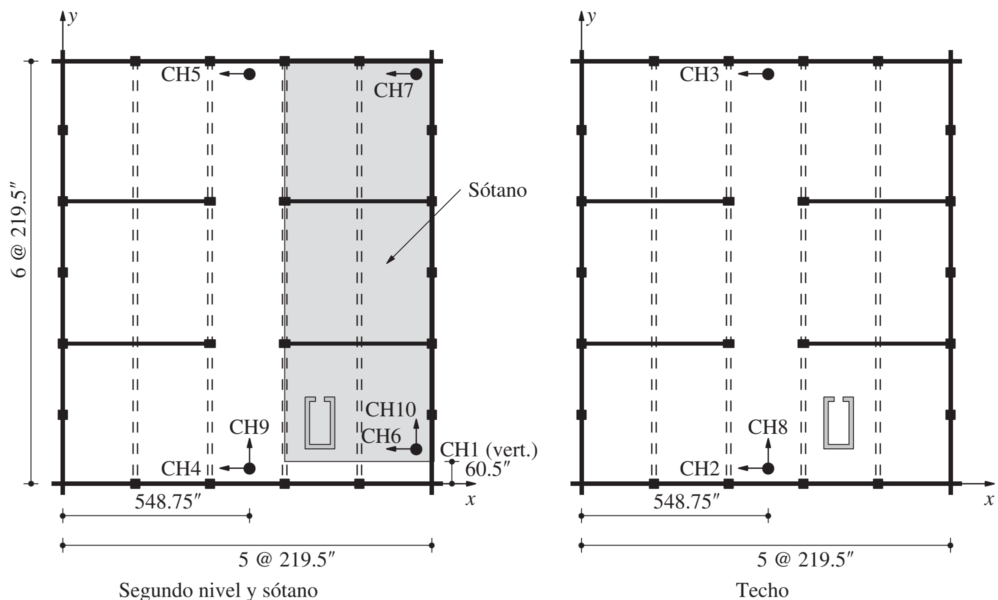


Figura 13.4.3 Canales del acelerógrafo (CH) en el edificio de First Federal Savings.

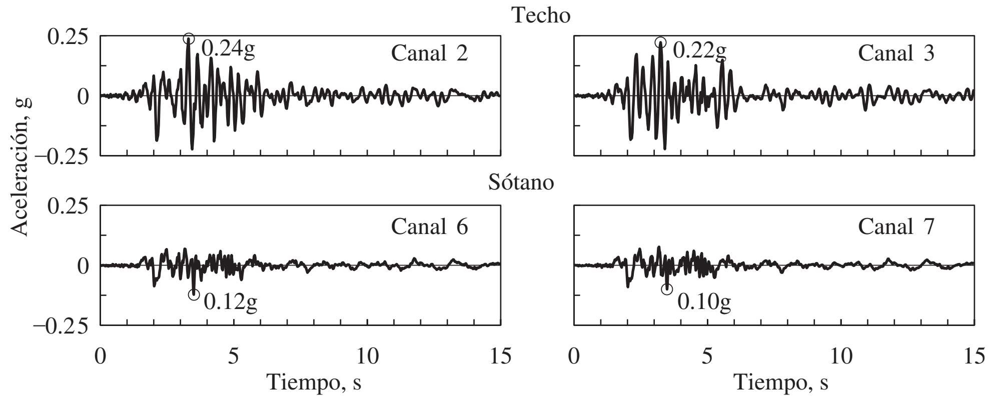


Figura 13.4.4 Movimientos registrados en el edificio First Federal Savings durante el sismo de Upland del 28 de febrero de 1990.

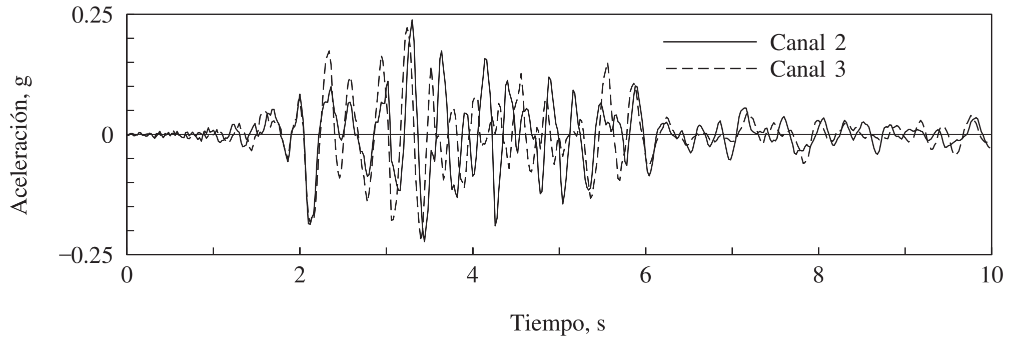


Figura 13.4.5 Movimientos registrados en dos ubicaciones en el techo del edificio First Federal Savings durante el sismo de Upland del 28 de febrero de 1990.

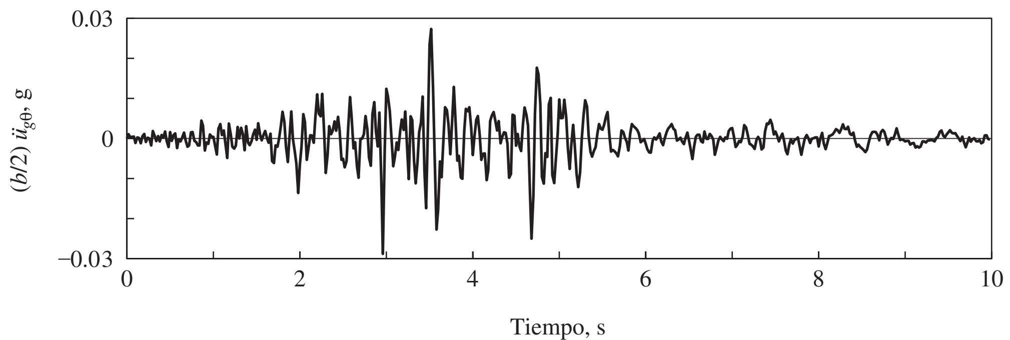


Figura 13.4.6 Aceleración rotacional del sótano multiplicada por $b/2$ (tomada de De la Llera y Chopra, 1994).

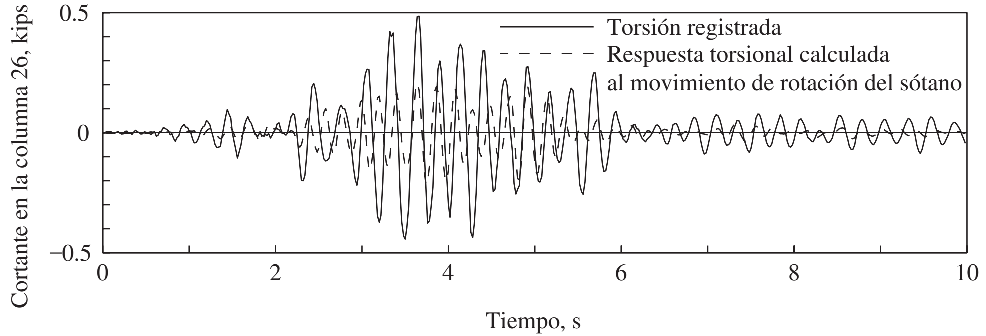


Figura 13.4.7 Comparación de la fuerza cortante (componente *x*) en la columna 26, debida a (1) la torsión registrada del edificio y (2) la respuesta torsional calculada del edificio al movimiento de rotación del sótano (tomada de De la Llera y Chopra, 1994).

vertical que pasa por *O*, el centro de masa (CM) del piso, y $\ddot{u}^t_{j\theta}$ es la aceleración torsional del diafragma del *j*-ésimo nivel. Al utilizar estas fuerzas inerciales como fuerzas estáticas equivalentes, se incluyen las fuerzas de amortiguamiento, y esto es una fuente de aproximación (vea el último párrafo de la sección 1.8.2). En la figura 13.4.7 también se presentan los resultados de estos análisis estáticos para la fuerza cortante en la misma columna.

Esta figura muestra que la fuerza máxima debida al movimiento rotacional del sótano es aproximadamente el 45% de la fuerza máxima debida al movimiento torsional real del edificio. El 55% restante de la fuerza surge, en parte, porque este edificio no es simétrico en su totalidad debido a varios factores, siendo el más evidente el núcleo de escaleras mostrado en la figura 13.4.2 y porque el sótano, que es menor que la mitad de la planta, no tiene una ubicación simétrica.

El movimiento torsional de los edificios con planta nominalmente simétrica, como el edificio de la figura 13.4.1, suele llamarse *torsión accidental*. Tal movimiento contribuye a una pequeña fracción de las fuerzas sísmicas totales en la estructura. Para el edificio y el sismo considerado, la torsión accidental aportó el 4% de la fuerza total (resultados que no se presentan aquí), pero en la respuesta al sismo de otros edificios se han identificado contribuciones más grandes. La respuesta estructural asociada con la torsión accidental no es susceptible de cálculo en el diseño estructural por dos razones: (1) el movimiento rotacional en la base no está definido, y (2) no resulta práctico identificar y analizar el efecto de cada fuente de asimetría en un edificio con una planta nominalmente simétrica. Por lo tanto, los códigos de construcción incluyen una disposición de diseño simple para tener en cuenta la torsión accidental en edificios simétricos y asimétricos; en este último caso se considera en forma adicional a la torsión surgida de la asimetría en planta (sección 13.3). Las investigaciones han demostrado que existen deficiencias en esta disposición de los códigos.

13.5 ANÁLISIS DE RESPUESTA PARA LA EXCITACIÓN MULTISOPORTE

En esta sección el procedimiento de análisis modal de la sección 13.1 se extiende a los sistemas de VGDL excitados por movimientos prescritos $\ddot{u}_{gl}(t)$ en los distintos apoyos ($l = 1, 2, \ldots, N_g$) de la estructura. En la sección 9.7 se demostró que las ecuaciones de control son

las mismas que la ecuación (13.1.1), con las fuerzas sísmicas efectivas

$$\mathbf{p}_{\text{ef}}(t) = -\sum_{l=1}^{N_g} \mathbf{m}\iota_l \ddot{u}_{gl}(t) \tag{13.5.1}$$

en vez de la ecuación (13.1.2). La ecuación modal (13.1.7) se convierte ahora en

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\sum_{l=1}^{N_g} \Gamma_{nl}\ddot{u}_{gl}(t) \tag{13.5.2}$$

donde

$$\Gamma_{nl} = \frac{L_{nl}}{M_n} \qquad L_{nl} = \phi_n^T \mathbf{m}\iota_l \qquad M_n = \phi_n^T \mathbf{m}\phi_n \tag{13.5.3}$$

La solución de la ecuación (13.5.2) puede escribirse como una generalización de la ecuación (13.1.9):

$$q_n(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \Gamma_{nl} D_{nl}(t) \tag{13.5.4}$$

donde $D_{nl}(t)$ es la respuesta de deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a la aceleración $\ddot{u}_{gl}(t)$ del apoyo.

La respuesta de desplazamiento de la estructura, ecuación (9.7.2), contiene dos partes:

1. Los desplazamientos dinámicos se obtienen al combinar las ecuaciones (13.1.3) y (13.5.4):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{l=1}^{N_g}\sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl}\phi_n D_{nl}(t) \tag{13.5.5}$$

2. Los desplazamientos cuasi-estáticos $\mathbf{u}^s$ están dados por la ecuación (9.7.11).

La combinación de las dos partes proporciona los desplazamientos totales en los grados de libertad estructurales:

$$\mathbf{u}^t(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \iota_l u_{gl}(t) + \sum_{l=1}^{N_g}\sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl}\phi_n D_{nl}(t) \tag{13.5.6}$$

Las fuerzas en los elementos estructurales pueden obtenerse a partir de los desplazamientos estructurales $\mathbf{u}^t(t)$ y de los desplazamientos en los apoyos prescritos $\mathbf{u}_g(t)$ sin análisis dinámicos adicionales empleando cualquiera de los dos procedimientos mencionados en la sección 9.10. En el primer método, las fuerzas en los elementos se calculan a partir de los desplazamientos nodales conocidos utilizando las propiedades de rigidez de los elementos. Por lo general, este método es el recomendado para la aplicación computacional de los cálculos de fuerza en excitaciones a varios apoyos. Sin embargo, resulta útil generalizar el segundo método que se basa en las fuerzas estáticas equivalentes. El resto de esta sección está dedicado a dicho desarrollo.

Las fuerzas estáticas equivalentes en el grado de libertad estructural están dadas por el último término del lado izquierdo de la ecuación (9.7.1):

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}\mathbf{u}^t + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g \tag{13.5.7}$$

Si se sustituye la ecuación (9.7.2) para $\mathbf{u}^t$ y se usa la ecuación (9.7.7), resulta

$$\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}(t) \tag{13.5.8}$$

Estas fuerzas dependen sólo de los desplazamientos dinámicos, ecuación (13.5.5). Por lo tanto,

$$\mathbf{f}_S(t) = \sum_{l=1}^{N_g}\sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl}\mathbf{k}\phi_n D_{nl}(t) \tag{13.5.9}$$

que puede escribirse en términos de la matriz de masa empleando la ecuación (10.2.4):

$$\mathbf{f}_S(t) = \sum_{l=1}^{N_g}\sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl}\mathbf{m}\phi_n A_{nl}(t) \tag{13.5.10}$$

donde

$$A_{nl}(t) = \omega_n^2 D_{nl}(t) \tag{13.5.11}$$

es la respuesta de pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a la aceleración $\ddot{u}_{gl}(t)$ del apoyo.

Las fuerzas estáticas equivalentes a lo largo del grado de libertad del apoyo también están dadas por el último término del lado izquierdo de la ecuación (9.7.1):

$$\mathbf{f}_{Sg} = \mathbf{k}_g^T\mathbf{u}^t + \mathbf{k}_{gg}\mathbf{u}_g \tag{13.5.12}$$

Si se sustituye la ecuación (9.7.2) para $\mathbf{u}^t$ y se utiliza la ecuación (9.7.3) para las fuerzas cuasi-estáticas $\mathbf{p}_g^s(t)$ del apoyo, resulta

$$\mathbf{f}_{Sg}(t) = \mathbf{k}_g^T\mathbf{u}(t) + \mathbf{p}_g^s(t) \tag{13.5.13}$$

Observe que las fuerzas $\mathbf{f}_g^S$ del apoyo dependen de los desplazamientos en los grados de libertad estructurales, así como de los desplazamientos del apoyo, y ya no pueden obtenerse mediante la estática del vector de fuerza $\mathbf{f}_S$. Esto es diferente de la sección 13.1, donde para una estructura excitada en su único apoyo, o excitada por un movimiento idéntico en todos los apoyos, el cortante basal podría determinarse a partir de $\mathbf{f}_S$. Mediante el uso de las ecuaciones (9.7.11) y (13.5.5), las fuerzas en los soportes pueden expresarse como

$$\mathbf{f}_{Sg}(t) = \sum_{l=1}^{N_g}\left(\mathbf{k}_g^T\iota_l + \mathbf{k}_{gg}^l\right)u_{gl}(t) + \sum_{l=1}^{N_g}\sum_{n=1}^{N}\Gamma_{nl}\mathbf{k}_g^T\phi_n D_{nl}(t) \tag{13.5.14}$$

donde $\mathbf{k}_{gg}^l$ es la l-ésima columna de $\mathbf{k}_{gg}$.

Las fuerzas en los elementos en cada instante de tiempo se evaluaron mediante un análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $\mathbf{f}_S(t)$ y $\mathbf{f}_{Sg}(t)$, dadas por las ecuaciones (13.5.10) y (13.5.14), respectivamente. Aunque este procedimiento se presentó con el fin de mostrar que el concepto de fuerza estática equivalente puede generalizarse para estructuras alteradas mediante la excitación multisoporte, como se mencionó con anterioridad, en el análisis computacional suele ser preferible evaluar las fuerzas en los elementos directamente a partir de los desplazamientos nodales, utilizando las propiedades de rigidez de los elementos.

Ejemplo 13.10

En el puente continuo con dos claros del ejemplo 9.10, el apoyo A experimenta un movimiento vertical $u_g(t)$; el apoyo B describe el mismo movimiento que A, pero lo hace t s después;

y el apoyo C se somete al mismo movimiento $2t'$s después que el soporte A. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: el desplazamiento de las dos masas; los momentos flexionantes en el punto medio de cada claro; y el momento flexionante en el apoyo central. Exprese los resultados en términos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, las respuestas de desplazamiento y pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$. Compare los resultados anteriores con la respuesta del puente si todos los apoyos se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$.

Solución

1. *Evalúe las frecuencias y los modos naturales*. El problema de valores característicos que debe resolverse es

$$\mathbf{k}\phi = \omega^2 \mathbf{m}\phi$$

donde las ecuaciones (c) y (e) del ejemplo 9.10 dan

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 78.86 & 30.86 \\ 30.86 & 78.86 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{a}$$

La solución del problema de valores característicos da

$$\omega_1 = 6.928\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad \omega_2 = 10.47\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \tag{b}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

2. *Determine* $\Gamma_{nl} = L_{nl}/M_n$.

$$L_{nl} = \phi_n^T \mathbf{m}\iota_l \qquad l = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2$$

Si se sustituye para ϕ_n y $\mathbf{m}$ a partir de las ecuaciones (c) y (a), respectivamente, y para ι_l a partir de la ecuación (g) del ejemplo 9.10, resulta

$$\mathbf{L} = [L_{nl}] = \begin{bmatrix} -0(5000m & 0 & 0(5000m \\ 0(3125m & 1(375m & 0(3125m \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ modo 1} \\ \leftarrow \text{ modo 2} \end{matrix} \tag{d}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \ddot{u}_{g1} & \ddot{u}_{g2} & \ddot{u}_{g3} \end{matrix}$$

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m}\phi_n \qquad n = 1ᶜ2$$

Al sustituir ϕ_n y $\mathbf{m}$ resulta $M_n = 2m$, $n = 1, 2$. Entonces $\Gamma_{nl} = L_{nl}/M_n$ da

$$\Gamma = [\Gamma_{nl}] = \begin{bmatrix} -0(25000 & 0 & 0(25000 \\ 0(15625 & 0(6875 & 0(15625 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ modo 1} \\ \leftarrow \text{ modo 2} \end{matrix} \tag{e}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \ddot{u}_{g1} & \ddot{u}_{g2} & \ddot{u}_{g3} \end{matrix}$$

3. *Determine la respuesta del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a* $\ddot{u}_{gl}(t)$. Dados $\ddot{u}_{g1}(t) = \ddot{u}_g(t), \ddot{u}_{g2}(t) = \ddot{u}_g(t - t'), \ddot{u}_{g3}(t) = \ddot{u}_g(t - 2t')$. Entonces

$$D_{n1}(t) = D_n(t) \qquad D_{n2}(t) = D_n(t - t') \qquad D_{n3}(t) = D_n(t - 2t') \tag{f}$$

$$A_{n1}(t) = A_n(t) \qquad A_{n2}(t) = A_n(t - t') \qquad A_{n3}(t) = A_n(t - 2t') \tag{g}$$

4. *Determine la respuesta de desplazamiento*. En la ecuación (13.5.6) con $N = 2$ y $N_g = 3$, al sustituir Γ_{nl}, ϕ_n y D_{nl} a partir de las ecuaciones (e), (c) y (f), respectivamente, y para ι_l a

partir de la ecuación (g) del ejemplo 9.10, se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u_1^t(t) \\ u_2^t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.40625 \\ -0.09375 \end{Bmatrix} u_g(t) + \begin{Bmatrix} 0.6875 \\ 0.6875 \end{Bmatrix} u_g(t-t') + \begin{Bmatrix} -0.09375 \\ 0.40625 \end{Bmatrix} u_g(t-2t')$$

$$-0.25 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_1(t) + 0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_1(t-t') + 0.25 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_1(t-2t')$$

$$+ 0.15625 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_2(t) + 0.6875 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_2(t-t') + 0.15625 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_2(t-2t') \qquad \text{(h)}$$

5. *Calcule las fuerzas estáticas equivalentes*. En la ecuación (13.5.10) con $N = 2$ y $N_g = 3$, al sustituir para $\mathbf{m}$, ϕ_n, Γ_{nl} y $A_{nl}(t)$ a partir de las ecuaciones (a), (c), (e) y (g), respectivamente, se obtiene

$$\mathbf{f}_S(t) = -0.25 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_1(t) + 0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_1(t-t') + 0.25 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_1(t-2t')$$

$$+ 0.15625 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_2(t) + 0.6875 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_2(t-t') + 0.15625 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} mA_2(t-2t') \qquad \text{(i)}$$

6. *Calcule las fuerzas estáticas equivalentes en los apoyos*. En la ecuación (13.5.12), al sustituir para $\mathbf{k}g$ y $\mathbf{k}_{gg}$ a partir de la ecuación (d) del ejemplo 9.10 y $\mathbf{u}^t(t)$ de la ecuación (h), se obtiene

$$\mathbf{f}_{Sg}(t) = \begin{Bmatrix} -0.125 \\ 0 \\ 0.125 \end{Bmatrix} mA_1(t) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} mA_1(t-t') + \begin{Bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ -0.125 \end{Bmatrix} mA_1(t-2t')$$

$$+ \begin{Bmatrix} -0.0488 \\ -0.2148 \\ -0.0488 \end{Bmatrix} mA_2(t) + \begin{Bmatrix} -0.2149 \\ -0.9454 \\ -0.2149 \end{Bmatrix} mA_2(t-t') + \begin{Bmatrix} -0.0488 \\ -0.2148 \\ -0.0488 \end{Bmatrix} mA_2(t-2t')$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1.5 \\ -3.0 \\ 1.5 \end{Bmatrix} \frac{EI}{L^3} u_g(t) + \begin{Bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{Bmatrix} \frac{EI}{L^3} u_g(t-t') + \begin{Bmatrix} 1.5 \\ -3 \\ 1.5 \end{Bmatrix} u_g(t-2t') \qquad \text{(j)}$$

donde la ecuación (b) se utilizó para expresar EI/L^3 en términos de ω_n y la ecuación (13.5.11) para expresar D_{nl} en términos de A_{nl}. Las fuerzas estáticas equivalentes dadas por las ecuaciones (i) y (j) se muestran en la figura E13.10. Observe que, en cada instante de tiempo, estas fuerzas definidas por las ecuaciones (i) y (j) se encuentran en equilibrio.

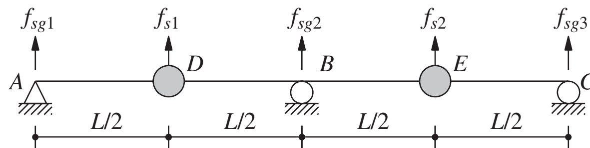


Figura E13.10

7. *Calcule los momentos flexionantes*. Los momentos flexionantes M_D, M_E y M_B en las ubicaciones de la masa izquierda, la masa derecha y el soporte B, respectivamente, se obtienen mediante

el análisis estático del sistema sometido a las fuerzas que se muestran en la figura E13.10:

$$\begin{aligned} M_D &= mL\Big(-0.0625A_1(t) + 0A_1(t-t') + 0.0625A_1(t-2t')\Big) \\ &\quad + mL\Big(-0.0244A_2(t) - 0.1074A_2(t-t') - 0.0244A_2(t-2t')\Big) \\ &\quad + \frac{EI}{L^2}\Big(0.75u_g(t) - 1.50u_g(t-t') + 0.75u_g(t-2t')\Big) \end{aligned} \tag{k}$$

$$\begin{aligned} M_E &= mL\Big(0.0625A_1(t) + 0A_1(t-t') - 0.0625A_1(t-2t')\Big) \\ &\quad + mL\Big(-0.0244A_2(t) - 0.1074A_2(t-t') - 0.0244A_2(t-2t')\Big) \\ &\quad + \frac{EI}{L^2}\Big(0.75u_g(t) - 1.50u_g(t-t') + 0.75u_g(t-2t')\Big) \end{aligned} \tag{l}$$

$$\begin{aligned} M_B &= mL\Big(0.0293A_2(t) + 0.1289A_2(t-t') + 0.0293A_2(t-2t')\Big) \\ &\quad + \frac{EI}{L^2}\Big(1.5u_g(t) - 3.0u_g(t-t') + 1.5u_g(t-2t')\Big) \end{aligned} \tag{m}$$

Observe que el primer modo no contribuye a M_B, puesto que B es un punto de inflexión para este modo.

8. *Movimientos idénticos en los apoyos*. Si todos los apoyos se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$, el movimiento de la estructura está dado por la ecuación (13.1.15), donde Γ_n está definida por la ecuación (13.1.5) con $\iota = \mathbf{1}$. Para este sistema

$$\Gamma_1 = 0 \qquad \Gamma_2 = 1$$

Cuando se sustituyen estos datos, la ecuación (13.1.15) da

$$\mathbf{u}(t) = \Gamma_2\phi_2 D_2(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} D_2(t) \tag{n}$$

Observe que el primer modo, que es antisimétrico, no está alterado por la excitación simétrica y toda la respuesta se debe al segundo modo.

Las fuerzas estáticas equivalentes están dadas por la ecuación (13.1.11):

$$\mathbf{f}_S(t) = \Gamma_2\mathbf{m}\phi_2 A_2(t) = m\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} A_2(t) \tag{o}$$

Las fuerzas en los apoyos pueden obtenerse mediante el análisis estático del puente sometido a las fuerzas externas de la ecuación (o). En forma alternativa, las fuerzas en los apoyos están dadas por la ecuación (j), especificada mediante la sustitución de $A_2(t) = A_2(t-t') = A_2(t-2t')$ y $u_g(t) = u_g(t-t') = u_g(t-2t')$. Cualquiera de estos métodos da

$$\mathbf{f}_{Sg}(t) = \begin{Bmatrix} -0.3125 \\ -1.3750 \\ -0.3125 \end{Bmatrix} mA_2(t) \tag{p}$$

Los momentos flexionantes, determinados mediante el análisis estático de la estructura debido a las fuerzas de la ecuación (o), son

$$M_D = -0.15625mLA_2(t) \qquad M_E = -0.15625mLA_2(t) \qquad M_B = 0.1875mLA_2(t) \tag{q}$$

9. *Comparación*. Si los movimientos en los apoyos son idénticos, las fuerzas cuasi-estáticas $\mathbf{p}_g^s(t)$ en la ecuación (13.5.13) son iguales a cero, no existe ningún componente cuasi-estático en los momentos flexionantes y todas las fuerzas en los apoyos y las fuerzas internas pueden calcularse directamente (por estática) a partir de las fuerzas estáticas equivalentes en los grados de libertad estructurales. Por el contrario, si los movimientos en los apoyos son diferentes, el cálculo de aquéllas es más complicado. En particular, deben incluirse las fuerzas cuasi-estáticas asociadas con los diferentes desplazamientos de los apoyos, y las fuerzas en los apoyos no pueden obtenerse sólo a partir de las fuerzas estáticas equivalentes en el grado de libertad estructural.

13.6 IDEALIZACIÓN ESTRUCTURAL Y RESPUESTA SÍSMICA

Con el desarrollo de los procedimientos del análisis sísmico presentados en este capítulo y la disponibilidad de las computadoras modernas, ahora es posible determinar la respuesta elástico lineal de una idealización (modelo matemático) de cualquier estructura a un movimiento del terreno prescrito. La coincidencia de la respuesta calculada con la respuesta real de una estructura durante un sismo depende principalmente de la calidad de la idealización estructural.

Para ilustrar este concepto se consideran de nuevo los periodos naturales y las fracciones de amortiguamiento para el edificio de la Biblioteca Millikan. Estos datos presentados en el capítulo 11 se basan en pruebas de vibración forzada de baja amplitud y en los sismos de Lytle Creek y San Fernando, que causaron aceleraciones aproximadas del techo de 0.05g y 0.31g, respectivamente. Estos resultados demostraron que, con el aumento de los niveles de movimiento, los periodos naturales se alargan y las fracciones de amortiguamiento aumentan. Se cree que la pérdida de rigidez indicada por este cambio de periodo se debe a la formación de grietas y otros tipos de degradaciones de los elementos no estructurales durante las respuestas sísmicas de nivel superior, sobre todo en el sismo de San Fernando. Para reproducir este cambio de periodo y para describir el comportamiento de una estructura a través del intervalo completo de amplitudes de deformación sería necesario realizar una idealización estructural no lineal cuyas propiedades de rigidez y amortiguamiento variaran con el nivel de deformación.

Sin embargo, si la estructura no experimenta ningún daño estructural, por lo general es posible calcular buenas estimaciones de la respuesta durante el sismo a partir de un modelo lineal equivalente con amortiguamiento viscoso. Si los periodos naturales calculados y los modos y las fracciones de amortiguamiento estimados representan las propiedades de la estructura durante el sismo, el procedimiento del análisis modal (secciones 13.1 a 13.3) predecirá con precisión la respuesta “lineal”. Esto se ha demostrado mediante numerosos análisis de movimientos registrados en estructuras durante la ocurrencia sísmica; un ejemplo de ello es la respuesta del edificio de la Biblioteca Millikan durante el sismo de San Fernando (figuras 11.1.3 y 11.1.4). Mediante el uso de los periodos naturales y las fracciones de amortiguamiento de este edificio, determinados a partir de los movimientos registrados y los procedimientos de identificación de sistemas (tabla 11.1.1), se demostró que la respuesta de desplazamiento de este edificio al movimiento en el sótano calculado mediante el análisis modal coincidió casi a la perfección con los desplazamientos (en relación con el terreno) mostrados en la figura 11.1.5, los cuales se determinaron a partir de las aceleraciones registradas en el techo y en el sótano.

Sin embargo, la situación habitual es diferente porque los periodos y los modos naturales se calculan a partir de una idealización de la estructura. Lo que determina la precisión de la respuesta es la calidad de esta idealización. Por lo tanto, sólo aquellos elementos estructurales y no estructurales que contribuyen a la masa y a la rigidez de la estructura en

las amplitudes de movimiento esperadas durante el sismo deben incluirse en la idealización estructural, y sus propiedades de rigidez deben determinarse utilizando supuestos realistas. Del mismo modo, como se indicó en el capítulo 11, la selección de los valores de amortiguamiento para el análisis de una estructura debe basarse en los datos disponibles de respuestas sísmicas registradas en estructuras similares.

PARTE B: ANÁLISIS CON EL ESPECTRO DE RESPUESTA

13.7 RESPUESTA MÁXIMA A PARTIR DEL ESPECTRO DE RESPUESTA SÍSMICA

El procedimiento del análisis de la historia de la respuesta presentado en la parte A proporciona una respuesta estructural $r(t)$ como una función del tiempo, pero el diseño estructural suele basarse en los valores máximos de las fuerzas y las deformaciones que se presentan durante la respuesta inducida por un sismo. ¿Puede la respuesta máxima determinarse directamente a partir del espectro de respuesta al movimiento del terreno sin llevar a cabo un análisis de la historia la respuesta? Para los sistemas de 1GDL la respuesta a esta pregunta es sí (capítulo 6). Sin embargo, para los sistemas de VGDL la respuesta es un sí con reservas. Las respuestas máximas de los sistemas de VGDL pueden calcularse a partir del espectro de respuesta, pero el resultado no es exacto (ya que no es idéntico al resultado del análisis de la historia de la respuesta; sin embargo, la estimación obtenida es lo suficientemente precisa para las aplicaciones de diseño estructural). En la parte B se presenta este tipo de procedimientos del análisis del espectro de respuesta para estructuras excitadas por un solo componente del movimiento del terreno; por lo tanto, se excluye la acción simultánea de los otros dos componentes y no se considera la excitación de varios soportes. No obstante, estos casos más generales han sido resueltos por los investigadores, y los lectores interesados pueden consultar los libros publicados.

13.7.1 Respuestas modales máximas

El valor máximo r_{no} de la contribución del n-ésimo modo $r_n(t)$ a la respuesta $r(t)$ puede obtenerse a partir del espectro de respuesta al sismo o espectro de diseño. Esto se hace evidente con la ecuación (13.1.13), al recordar que el valor máximo de $A_n(t)$ está disponible a partir del espectro de pseudo-aceleración como su ordenada $A(T_n, \zeta_n)$, indicada como A_n por razones de brevedad. Por lo tanto,

$$r_{no} = r_n^{\text{st}} A_n \tag{13.7.1}$$

El signo algebraico de r_{no} es el mismo que el de r_n^{st} porque A_n es positivo por definición. A pesar de que tiene un signo algebraico, r_{no}[†] se referirá como la *respuesta modal máxima* porque corresponde al valor máximo de $A_n(t)$. Este signo algebraico debe retenerse porque puede ser importante, como se verá en la sección 13.7.2. Todas las cantidades de respuesta $r_n(t)$ asociadas con un modo particular, por ejemplo el n-ésimo modo, alcanzan sus valores

[†]La notación r_{no} no debe confundirse con el uso de un subíndice o en el capítulo 6 para indicar el máximo (en el tiempo) del valor absoluto de la cantidad de respuesta, que es positivo por definición.

máximos en el mismo instante de tiempo que $A_n(t)$ alcanza su pico (vea las figuras 13.2.6 a 13.2.8, 13.2.10, 13.2.11 y E13.8a a d).

13.7.2 Reglas de combinación modal

¿Cómo se combinan las respuestas modales máximas r_{no} ($n = 1, 2, ..., N$) para determinar el valor máximo $r_o \equiv \text{máx}_t |r(t)|$ de la respuesta total? No será posible determinar el valor exacto de r_o a partir de r_{no} porque, en general, las respuestas modales $r_n(t)$ alcanzan sus picos en diferentes instantes de tiempo y la respuesta combinada $r(t)$ alcanza su máximo en un instante que también es distinto. Este fenómeno puede observarse en la figura 13.2.7b, donde se presentan los resultados para el cortante en el entrepiso superior de un marco de cinco niveles. Las respuestas modales individuales $V_{5n}(t)$, $n = 1, 2, ..., 5$, se muestran junto con la respuesta total $V_5(t)$.

Al combinar las respuestas modales máximas r_{no} es necesario introducir aproximaciones determinadas a partir del espectro de respuesta del sismo, porque no se dispone de información de cuándo se producen estos valores modales máximos. El supuesto de que todos los picos modales se producen al mismo tiempo y despreciando su signo algebraico proporciona un límite superior para el valor máximo de la respuesta total:

$$r_o \leq \sum_{n=1}^{N} |r_{no}| \tag{13.7.2}$$

Este valor límite superior suele ser muy conservador, como se verá más adelante en el ejemplo de cálculo. Por lo tanto, esta regla de combinación modal de la *suma absoluta* (ABSSUM) no es popular en las aplicaciones de diseño estructural.

La regla de la *raíz cuadrada de la suma de los cuadrados* (SRSS, por sus siglas en inglés) para la combinación modal, desarrollada en la tesis de doctorado de E. Rosenblueth (1951), es

$$r_o \simeq \left(\sum_{n=1}^{N} r_{no}^2 \right)^{1/2} \tag{13.7.3}$$

La respuesta máxima en cada modo se eleva al cuadrado, los picos modales al cuadrado se suman, y la raíz cuadrada de esta suma proporciona una estimación de la respuesta máxima total. Como se verá más adelante, esta regla de combinación modal proporciona excelentes estimaciones de la respuesta para estructuras con frecuencias naturales muy separadas. Esta limitación no siempre se ha reconocido en la aplicación de esta regla a los problemas prácticos y, en ocasiones, ha sido mal aplicada a los sistemas con frecuencias naturales muy cercanas, como los sistemas de tuberías en las centrales nucleares y los edificios de varios niveles con planta asimétrica.

La regla de la *combinación cuadrática completa* (CQC, por sus siglas en inglés) para la combinación modal es aplicable a una clase más amplia de estructuras, puesto que supera las limitaciones de la regla SRSS. De acuerdo con la regla CQC,

$$r_o \simeq \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \rho_{in} r_{io} r_{no} \right)^{1/2} \tag{13.7.4}$$

Cada uno de los N^2 términos en el lado derecho de esta ecuación es el producto de las respuestas máximas en los modos i-ésimo y n-ésimo y el coeficiente de correlación ρ_{in} para

estos dos modos; ρ_{in} varía entre 0 y 1 y $\rho_{in} = 1$ para $i = n$. Así, la ecuación (13.7.4) puede reescribirse como

$$r_o \simeq \left(\sum_{n=1}^{N} r_{no}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N}}_{i \neq n} \rho_{in} r_{io} r_{no} \right)^{1/2} \tag{13.7.5}$$

para mostrar que la primera sumatoria en el lado derecho es idéntica a la regla de combinación SRSS de la ecuación (13.7.3); cada término en esta suma es obviamente positivo. La doble sumatoria incluye todos los términos cruzados ($i \neq n$), cada uno de los cuales puede ser positivo o negativo. Un término cruzado es negativo cuando las respuestas estáticas modales r_i^{st} y r_n^{st} asumen signos opuestos (para el signo algebraico de r_{no} es el mismo que el de r_n^{st} porque A_n es positiva por definición). Por lo tanto, la estimación de r_o obtenida por la regla CQC puede ser mayor o menor que la estimación proporcionada por la regla SRSS. (Puede demostrarse que la sumatoria doble entre paréntesis de la ecuación 13.7.4 siempre es positiva).

A partir de la década de 1960, continuando hasta la década de 1970 y principios de 1980, se publicaron varias formulaciones para la respuesta máxima a la excitación sísmica. Algunos de éstas son idénticas o similares a la ecuación (13.7.4) pero difieren en las expresiones matemáticas dadas para el coeficiente de correlación. Aquí se incluyen dos: una debida a E. Rosenblueth y J. Elorduy por razones históricas, porque al parecer fue el primer resultado (1969), y una segunda (1981), debida a A. Der Kiureghian porque se utiliza mucho en la actualidad.

El libro de texto de 1971, *Fundamentals of Earthquake Engineering* de N. M. Newmark y E. Rosenblueth proporciona las ecuaciones de Rosenblueth-Elorduy para el coeficiente de correlación:

$$\rho_{in} = \frac{1}{1 + \epsilon_{in}^2} \tag{13.7.6}$$

donde

$$\epsilon_{in} = \frac{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}}{\zeta_i' \omega_i + \zeta_n' \omega_n} \qquad \zeta_n' = \zeta_n + \frac{2}{\omega_n s} \tag{13.7.7}$$

y s es la duración de la fase fuerte de la excitación sísmica. Las ecuaciones (13.7.6) y (13.7.7) muestran que $\rho_{in} = \rho_{ni}$; $0 \leq \rho_{in} \leq 1$; y $\rho_{in} = 1$ para $i = n$ o para dos modos con igualdad de frecuencias y las mismas fracciones de amortiguamiento. Resulta útil especificar la ecuación (13.7.6) para los sistemas con la misma fracción de amortiguamiento en todos los modos sometidos a la excitación sísmica, con una duración s suficiente para reemplazar la ecuación (13.7.7b) por $\zeta'_n = \zeta_n$. Se sustituye $\zeta_i = \zeta_n = \zeta$ en la ecuación (13.7.7a), se introduce $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$ y se inserta la ecuación (13.7.7a) en la ecuación (13.7.6) para obtener

$$\rho_{in} = \frac{\zeta^2 (1 + \beta_{in})^2}{(1 - \beta_{in})^2 + 4\zeta^2 \beta_{in}} \tag{13.7.8}$$

La ecuación para el coeficiente de correlación debida a Der Kiureghian es

$$\rho_{in} = \frac{8\sqrt{\zeta_i \zeta_n} (\beta_{in} \zeta_i + \zeta_n) \beta_{in}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\zeta_i \zeta_n \beta_{in} (1 + \beta_{in}^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_n^2) \beta_{in}^2} \tag{13.7.9}$$

Esta ecuación también implica que $\rho_{in} = \rho_{ni}$, $\rho_{in} = 1$ para $i = n$ o para dos modos con igualdad de frecuencias y las mismas fracciones de amortiguamiento. Para los amortiguamientos

modales iguales $\zeta_i = \zeta_n = \zeta$, esta ecuación se simplifica como

$$\rho_{in} = \frac{8\zeta^2(1+\beta_{in})\beta_{in}^{3/2}}{(1-\beta_{in}^2)^2 + 4\zeta^2\beta_{in}(1+\beta_{in})^2} \tag{13.7.10}$$

En la figura 13.7.1 se muestran las ecuaciones (13.7.8) y (13.7.10) para el coeficiente de correlación ρ_{in}, graficado como una función de $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$, para cuatro valores de amortiguamiento: $\zeta = 0.02$, 0.05, 0.10 y 0.20. Observe que las dos expresiones dan valores idénticos para ρ_{in}, en especial en la vecindad de $\beta_{in} = 1$, donde ρ_{in} es el más significativo.

Esta figura también proporciona una comprensión del coeficiente de correlación. Observe que este coeficiente disminuye rápidamente a medida que las dos frecuencias naturales ω_i y ω_n se alejan entre sí. Éste es en especial el caso para los valores de amortiguamiento pequeños que son típicos de las estructuras. En otras palabras, sólo en un estrecho intervalo de β_{in} alrededor de $\beta_{in} = 1$, es que ρ_{in} tiene valores significativos, y este intervalo depende del amortiguamiento. Por ejemplo, $\rho_{in} > 0.1$ para los sistemas con amortiguamiento del 5% en el intervalo de la relación de frecuencia $1/1.35 \leq \beta_{in} \leq 1.35$. Si el amortiguamiento es del 2%, este intervalo se reduce a $1/1.13 > \beta_{in} \leq 1.13$. Para las estructuras con frecuencias naturales muy separadas los coeficientes ρ_{in} se desvanecen; como resultado, todos los términos cruzados ($i \neq n$) en la regla CQC, ecuación (13.7.5), pueden despreciarse y la regla CQC se reduce a la regla SRSS, ecuación (13.7.3). Ahora está claro que la regla SRSS es aplicable a estructuras con frecuencias naturales muy separadas de aquellos modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta.

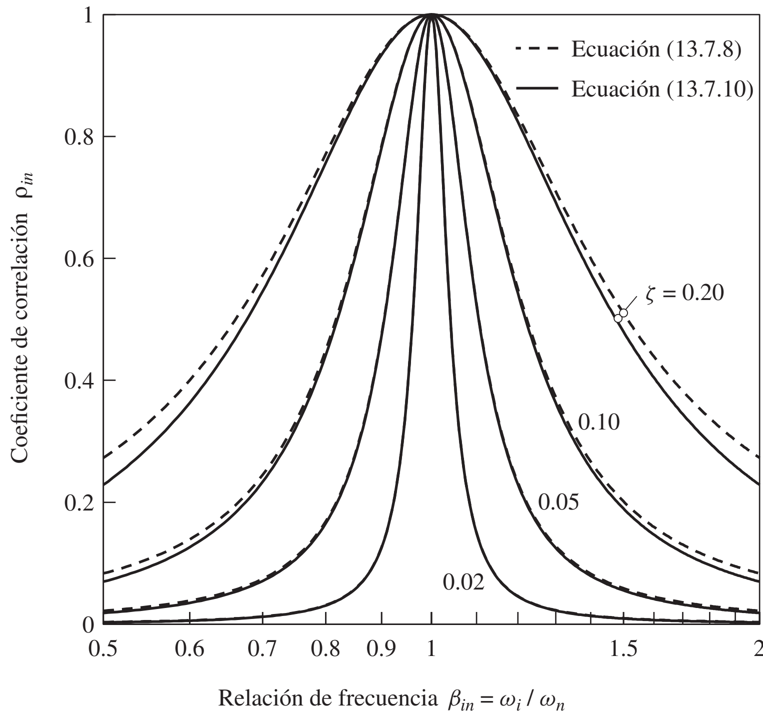


Figura 13.7.1 Variación del coeficiente de correlación ρ_{in} con la relación de frecuencia modal, $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$, dada por dos ecuaciones diferentes para cuatro valores de amortiguamiento; la escala de la abscisa es logarítmica.

Las reglas SRSS y CQC para la combinación de respuestas modales máximas se han presentado sin las deducciones correspondientes basadas en la teoría de vibraciones aleatorias, un tema que escapa al alcance de este libro. Sin embargo, es importante reconocer las implicaciones de los supuestos detrás de estas deducciones. Los supuestos indican que las reglas de combinación modal serían más exactas para las excitaciones sísmicas que contienen una banda ancha de frecuencias con duraciones largas de su fase de movimiento intensa, las cuales son varias veces más largas que los periodos fundamentales de las estructuras, que a su vez tienen amortiguamientos no tan pequeños ($\zeta_n > 0.005$). En particular, estas reglas de combinación modal serán menos precisas para los movimientos de terreno impulsivos de corta duración y no se recomiendan para los movimientos de terreno que contienen muchos ciclos de excitación esencialmente armónica.

Si se considera que las reglas de combinación modal SRSS y CQC se basan en la teoría de vibraciones aleatorias, r_o debe interpretarse como la media de los valores máximos de las respuestas a un conjunto de excitaciones sísmicas. Por lo tanto, se recomienda el uso de las reglas de combinación modal cuando la excitación está caracterizada por un espectro de respuesta (o diseño) suavizado, con base en los espectros de respuesta de muchas excitaciones sísmicas. El espectro suavizado puede ser la media o la mediana de los espectros de respuesta individuales, o puede ser uno más conservador, como el espectro medio más una desviación estándar (sección 6.9). Cuando la regla de combinación modal CQC o SRSS (según resulte apropiado de acuerdo con la proximidad de las frecuencias naturales) se usa en conjunto, por ejemplo, con el espectro medio, proporciona una estimación de la respuesta máxima que está bastante cerca de la media de los valores máximos de las respuestas a las excitaciones individuales.

Esta estimación de la respuesta máxima en general, aunque no siempre, comete errores de manera no conservadora. La magnitud del error depende de las propiedades de vibración (periodos y modos) de la estructura y de la forma del espectro. En un intervalo de edificios analizados, los investigadores han observado errores de hasta el 25%, sobre todo en la estimación de las cantidades de respuesta local, como las distorsiones de entrepiso en los pisos superiores. El error puede ser más grande o más pequeño si se usan las reglas de combinación modal para estimar la respuesta máxima a un movimiento del terreno único que se caracteriza por un espectro de respuesta irregular.

13.7.3 Interpretación del análisis del espectro de respuesta

El análisis del espectro de respuesta descrito en la sección anterior es un procedimiento para el análisis dinámico de una estructura sometida a una excitación sísmica, pero se reduce a una serie de análisis estáticos. Para cada modo considerado, el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas $\mathbf{s}_n$ proporciona la respuesta modal estática r_n^{st}, que se multiplica por la ordenada espectral A_n a fin de obtener la respuesta modal máxima r_{no} (ecuación 13.7.1). Por lo tanto, el procedimiento análisis del espectro de respuesta evita el análisis dinámico de los sistemas de 1GDL necesarios para el análisis de la historia de la respuesta (figura 13.1.1). Sin embargo, el análisis del espectro de respuesta sigue siendo un procedimiento de análisis dinámico, puesto que utiliza las propiedades de vibración (frecuencias naturales, modos naturales y fracciones de amortiguamiento modal) de la estructura y las características dinámicas del movimiento del terreno a través de su espectro de respuesta (o diseño). Sin embargo, el usuario no debe realizar ningún cálculo de la historia de la respuesta; alguien ya ha hecho esto al desarrollar el espectro de respuesta al sismo, o bien la excitación sísmica se ha caracterizado mediante un espectro de diseño suavizado.

13.8 EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES CON PLANTA SIMÉTRICA

13.8.1 Procedimiento del análisis del espectro de respuesta

En esta sección el procedimiento del análisis del espectro de respuesta de la sección 13.7 se especifica para los edificios de varios niveles con plantas que tienen dos ejes de simetría sometidos a un movimiento horizontal del terreno en dirección de uno de estos ejes. El valor máximo† de la contribución del n-ésimo modo $r_n(t)$ a una cantidad de respuesta está dado por la ecuación (13.7.1). La respuesta modal estática r_n^{st} se calcula mediante el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{s}_n$ de la ecuación (13.2.4). Las ecuaciones para de r_n^{st} para varias cantidades de respuesta están disponibles en la tabla 13.2.1. Al sustituir estas fórmulas para los desplazamientos de piso u_j, la distorsión de entrepiso Δ_j, el cortante basal V_b y el momento de volteo basal M_b en la ecuación (13.7.1), se obtiene

$$u_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n \qquad \Delta_{jn} = \Gamma_n(\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) D_n \tag{13.8.1a}$$

$$V_{bn} = M_n^* A_n \qquad M_{bn} = h_n^* M_n^* A_n \tag{13.8.1b}$$

donde $D_n \equiv D(T_n, \zeta_n)$, la ordenada del espectro de deformación correspondiente al periodo natural T_n y a la fracción de amortiguamiento ζ_n; $D_n = A_n/\omega^2{}_n$.

Las ecuaciones (13.8.1) para las respuestas modales máximas son equivalentes al análisis estático del edificio sometido a las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con la respuesta máxima del n-ésimo modo:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{s}_n A_n \qquad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n \tag{13.8.2}$$

donde $\mathbf{f}_n$ es el vector de fuerzas f_{jn} en los diferentes niveles, $j = 1, 2,..., N$ (figura 13.8.1); $\mathbf{s}_n$ está definido por la ecuación (13.2.4). El vector de fuerza $\mathbf{f}_n$ es el valor máximo de $\mathbf{f}_n(t)$, que

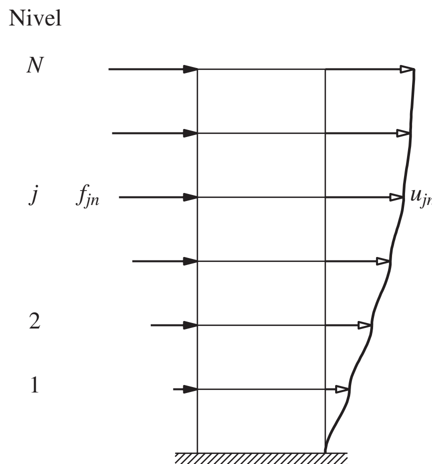


Figura 13.8.1 Valores máximos de los desplazamientos laterales y fuerzas estáticas equivalentes laterales asociadas con el n-ésimo modo.

†Por razones de brevedad, de ahora en adelante, el subíndice o se eliminará de r_o [es decir, r indicará el valor máximo de $r(t)$].

se obtiene al reemplazar $A_n(t)$ en la ecuación (13.2.7) por la ordenada espectral A_n. Debido a que sólo se requiere un análisis estático para cada modo, resulta más directo hacerlo para las fuerzas $\mathbf{f}_n$ en vez de $\mathbf{s}_n$ y después multiplicar por los últimos resultados de A_n. En contraste, el uso de la respuesta modal estática r_n^{st} se enfatizó en el análisis de la historia de la respuesta, puesto que destaca el hecho de que el análisis estático para las fuerzas $\mathbf{s}_n$ era necesario sólo una vez, a pesar de que la respuesta se calcula en muchos instantes de tiempo.

Por lo tanto, el valor máximo de la contribución del n-ésimo modo r_n a una cantidad de respuesta r se determina mediante el análisis estático del edificio debido a las fuerzas laterales $\mathbf{f}_n$; la dirección de las fuerzas f_{jn} está controlada por el signo algebraico de ϕ_{jn}. Por consiguiente, estas fuerzas para el modo fundamental actuarán en la misma dirección (figura 13.8.1), pero para los modos superiores al primero cambiarán de dirección a medida que se consideran niveles superiores. Observe que este análisis estático no es necesario para determinar los desplazamientos de los niveles o distorsiones de entrepiso; la ecuación (13.8.1a) ofrece la alternativa más conveniente. El valor máximo de la respuesta total se estima utilizando las reglas de combinación modal de la ecuación (13.7.3) o (13.7.4), según sea conveniente, incluyendo todos los modos que contribuyen de una manera significativa a la respuesta.

Resumen. A continuación se resume paso a paso el procedimiento para calcular la respuesta máxima de un edificio de N niveles, con planta simétrica alrededor de dos ejes ortogonales, a un movimiento sísmico del terreno a lo largo de un eje de simetría, caracterizado por un espectro de respuesta o espectro de diseño:

1. Defina las propiedades estructurales.
   - **a.** Determine la matriz de masa $\mathbf{m}$ y la matriz de rigidez lateral $\mathbf{k}$ (sección 9.4).
   - **b.** Estime la fracción de amortiguamiento modal ζ_n (capítulo 11).
2. Determine las frecuencias naturales ω_n (periodos naturales $T_n = 2\pi/\omega_n$) y los modos naturales de vibración ϕ_n (capítulo 10).
3. Calcule la respuesta máxima en el n-ésimo modo mediante los siguientes pasos que se repiten para todos los modos, $n = 1, 2, ..., N$:
   - **a.** Lea D_n y A_n, la deformación y la pseudo-aceleración, correspondientes al período natural T_n y a la fracción amortiguamiento ζ_n, a partir del espectro de respuesta del sismo o el espectro de diseño.
   - **b.** Calcule los desplazamientos de cada nivel y las distorsiones de entrepiso a partir de la ecuación (13.8.1a).
   - **c.** Calcule las fuerzas estáticas equivalentes laterales $\mathbf{f}_n$ a partir de la ecuación (13.8.2).
   - **d.** Calcule las fuerzas en los entrepisos (cortante y momento de volteo) y las fuerzas en los elementos (cortantes y momentos flexionantes) mediante el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas laterales $\mathbf{f}_n$.
4. Determine una estimación para el valor máximo r de cualquier cantidad de respuesta al combinar los valores modales máximos r_n de acuerdo con la regla SRSS, ecuación (13.7.3), si las frecuencias naturales están muy separadas. La regla CQC, ecuación (13.7.4), debe utilizarse si las frecuencias naturales están poco espaciadas.

Por lo general, sólo los modos inferiores contribuyen de manera significativa a la respuesta. Por lo tanto, los pasos 2 y 3 deben aplicarse sólo a estos modos y las combinaciones modales de las ecuaciones (13.7.3) y como resultado (13.7.4) se truncará.

Ejemplo 13.11

Para la estructura de dos niveles del ejemplo 13.4, que se muestra en la figura E13.11a, se desea determinar la respuesta máxima al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 escalado a una aceleración máxima del terreno de 5g. Este marco de concreto reforzado tiene las siguientes propiedades: $m = 200$ kips/g, $E = 3 \times 10^3$ ksi, $I = 1000$ pulg^4, $h = 10$ pies y $L = 20$ pies. Determine los desplazamientos laterales del marco y los momentos flexionantes en ambos extremos de cada viga y columna.

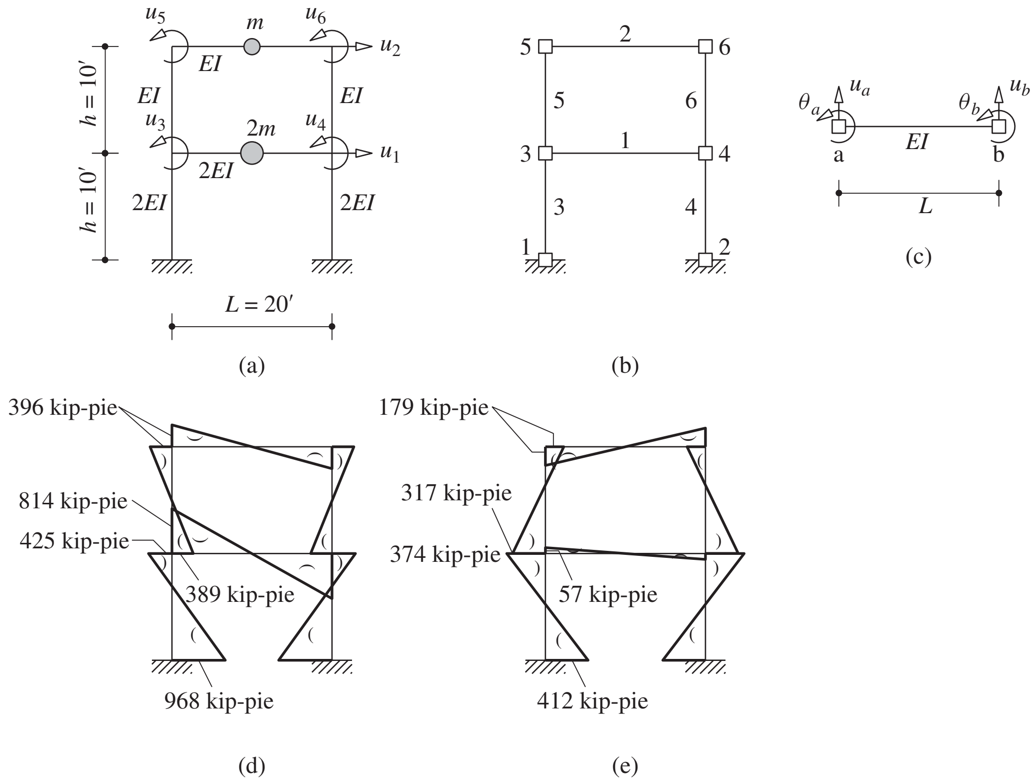


Figura E13.11

Solución Los pasos 1 y 2 del resumen ya se han implementado y los resultados están disponibles en los ejemplos 10.5 y 13.4. Al sustituir para E, I y h en la ecuación (b) del ejemplo 13.4, se obtiene ω_n y $T_n = 2\pi/\omega_n$:

$$\omega_1 = 4(023 \qquad \omega_2 = 10(71 \text{ rad}) \text{ s}$$

$$T_1 = 1(562 \qquad T_2 = 0(5868 \text{ s}$$

Paso 3a: las ordenadas espectrales correspondientes a estos periodos son $D_1 = 13.72$ pulg y $D_2 = 4.578$ pulg.

1. *Determine los desplazamientos de cada nivel.*

Paso 3b: si se usa la ecuación (13.8.1a) con los valores numéricos para Γ_n y ϕ_{jn} tomados del ejemplo 13.4 y para D_n del paso 3(a), resultan los desplazamientos máximos $\mathbf{u}_n$ debidos a los dos modos:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = 1.365 \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1 \end{Bmatrix} 13.72 = \begin{Bmatrix} 7.252 \\ 18.73 \end{Bmatrix} \text{pulg}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_2 = -0.365 \begin{Bmatrix} -1.292 \\ 1 \end{Bmatrix} 4.578 = \begin{Bmatrix} 2.159 \\ -1.672 \end{Bmatrix} \text{pulg}$$

Paso 4: mediante el uso de la regla SRSS para la combinación modal, las estimaciones de los valores máximos de los desplazamientos de cada nivel son

$$u_1 \simeq \sqrt{(7.252)^2 + (2.159)^2} = 7.566 \text{ pulg}$$

$$u_2 \simeq \sqrt{(18.73)^2 + (-1.672)^2} = 18.81 \text{ pulg}$$

2. *Determine las fuerzas en los elementos*. En lugar de aplicar los pasos 3c y 3d como se describe en el resumen, aquí se ilustra el cálculo de las fuerzas en los elementos a partir de los desplazamientos de cada nivel y las rotaciones en los nudos. Los elementos y nodos están numerados como se muestra en la figura E13.11b.

Primer modo. Las rotaciones en los nudos se obtienen de la ecuación (d) del ejemplo 9.9 con $\mathbf{u}_t$ sustituido por $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_{01} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} -0(4426 & -0(2459 \\ -0(4426 & -0(2459 \\ 0(9836 & -0(7869 \\ 0(9836 & -0(7869 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7(252 \\ 18(73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6(514 \\ -6(514 \\ -6(340 \\ -6(340 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

Todas las fuerzas en los elementos pueden calcularse a partir de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_{01}$. Por ejemplo, el momento flexionante en el extremo izquierdo de viga del primer nivel (figura E13.11c) es

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b$$

Al sustituir $E = 3 \times 10^3$ ksi, $I = 2000$ pulg^4, $L = 240$ pulg, $\theta_a = u_3$, $\theta_b = u_4$, $u_a = u_b = 0$ se obtiene $M_a = -9770$ kip-pulg $= -814$ kip-pie. Los momentos flexionantes en todos los elementos pueden calcularse de manera similar. Los resultados se resumen en la tabla E13.11 y en la figura E13.11d.

Segundo modo. Las rotaciones en los nudos $\mathbf{u}_{02}$ se obtienen a partir de la ecuación (d) del ejemplo 9.9 con $\mathbf{u}_t$ sustituido por $\mathbf{u}_2$. Los cálculos para las fuerzas en los elementos son simila-

TABLA E13.11 MOMENTOS FLEXIONANTES MÁXIMOS (KIP-PIE)

Elemento	Nodo	Modo 1	Modo 2	SRSS
Viga 1	3	−814	− 57	816
	4	−814	− 57	816
Viga 2	5	−396	179	435
	6	−396	179	435
Columna 3	3	425	374	566
	1	968	412	1052
Columna 5	5	396	−179	435
	3	389	−317	502

res a los mostrados para el primer modo, pero utilizan $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_{02}$, lo que conduce a los resultados de la tabla E13.11 y la figura E13.11e.

Paso 4: el valor máximo de cada fuerza en los elementos se calcula mediante la combinación de sus valores modales máximos por la regla SRSS. Los resultados se muestran en la tabla E13.11. Tenga en cuenta que los signos algebraicos de los momentos flexionantes se pierden en los valores totales; por lo tanto, no es significativo dibujar el diagrama de momentos flexionantes, y los momentos totales no satisfacen el equilibrio en los nudos.

13.8.2 Ejemplo: marco de cortante de cinco niveles

En esta sección se implementa el procedimiento análisis del espectro de respuesta para el marco de cortante de cinco niveles de la figura 12.8.1. La historia completa de la respuesta de esta estructura para el movimiento del terreno de El Centro se indica en la sección 13.2.6. Ahora, su respuesta máxima se estima directamente a partir del espectro de respuesta para esta excitación (es decir, sin calcular su historia de respuesta).

Las matrices de masa y rigidez, así como los periodos y modos naturales de vibración de esta estructura, se presentaron en las secciones 12.8 y 13.2.6. A partir de estos datos, se calcularon las propiedades modales M_n y $L^h{}_n$ (tabla 13.2.2). Las fracciones de amortiguamiento se estiman como $\zeta_n = 5\%$.

Ordenadas del espectro de respuesta. El espectro de respuesta al movimiento de terreno de El Centro para un amortiguamiento del 5% proporciona los valores de D_n y A_n indicados en la figura 13.8.2, correspondientes a los periodos naturales T_n. Éstos son los valores precisos para las ordenadas espectrales, los valores máximos $D_n(t)$ y $A_n(t)$ en la figura 13.2.6, eliminando así los errores posibles en la lectura de las ordenadas espectrales. Tales errores son inherentes a la aplicación práctica del procedimiento análisis del espectro de respuesta con un espectro de respuesta irregular, pero se eliminan al utilizar un espectro de diseño suavizado, como el de la figura 6.9.5.

Respuestas modales máximas. Los desplazamientos de cada nivel se determinan a partir de la ecuación (13.8.1a) usando los valores conocidos de ϕ_{jn} (sección 12.8), de L_n^h (tabla 13.2.2) y $\Gamma_n = L_n^h$ (porque $M_n = 1$) y de D_n (figura 13.8.2). Por ejemplo, los desplazamientos de cada nivel debidos al primer modo se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_1 = \Gamma_1 \phi_1 D_1 = 1.067 \begin{Bmatrix} 0.334 \\ 0.641 \\ 0.895 \\ 1.078 \\ 1.173 \end{Bmatrix} 5.378 = \begin{Bmatrix} 1.916 \\ 3.677 \\ 5.139 \\ 6.188 \\ 6.731 \end{Bmatrix} \text{pulg}$$

Estos desplazamientos se muestran en la figura 13.8.3a. Las fuerzas estáticas equivalentes para el n-ésimo modo se calculan a partir de la ecuación (13.8.2a) utilizando los valores conocidos de $\mathbf{s}_n$ (figura 13.2.4), donde $m = 100$ kips/g, y de A_n (figura 13.8.2). Por ejemplo, las fuerzas asociadas con el primer modo se calculan de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{s}_1 A_1 = \begin{Bmatrix} 0.356\,m \\ 0.684\,m \\ 0.956\,m \\ 1.150\,m \\ 1.252\,m \end{Bmatrix} 0.1375\text{g} = \begin{Bmatrix} 4.899 \\ 9.401 \\ 13.141 \\ 15.817 \\ 17.211 \end{Bmatrix} \text{kips}$$

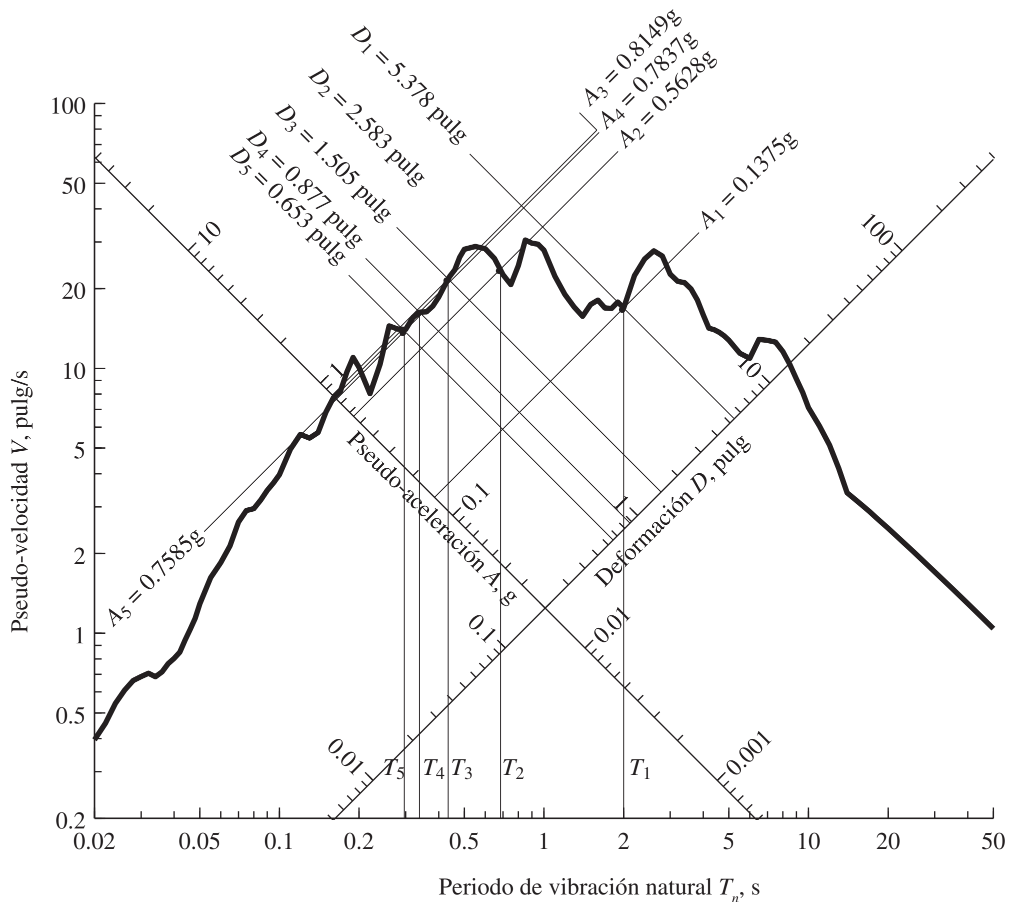


Figura 13.8.2 Espectro de respuesta al sismo con los periodos de vibración natural T_n de la estructura de ejemplo, junto con los valores espectrales D_n y A_n.

Estas fuerzas también se muestran en la figura 13.8.3a. De manera alternativa, $\mathbf{f}_n$ puede calcularse al multiplicar los valores conocidos de $\mathbf{s}_n$ (figura 13.2.4) por A_n (figura 13.8.2). Si se repiten estos cálculos para los modos $n = 2, 3, 4$ y 5, se obtienen los resultados restantes de la figura 13.8.3. Observe que todas las fuerzas estáticas equivalentes para el primer modo actúan en la misma dirección, pero para los modos superiores al primero éstas cambian de dirección a medida que se consideran niveles superiores.; la dirección de las fuerzas está controlada por el signo algebraico de ϕ_{jn} (figura 12.8.2).

Para cada modo el valor máximo de cualquier fuerza en los entrepisos o fuerza en los elementos se calcula mediante el análisis estático de la estructura sometida a las fuerzas estáticas equivalentes laterales $\mathbf{f}_n$. En la tabla 13.8.1 se resumen estos valores máximos para el cortante basal V_b, el cortante en el entrepiso superior V_5 y el momento de volteo en la base M_b. También se incluyen los datos anteriores para el desplazamiento del techo u_5. Estos valores modales máximos son exactos porque los errores en la lectura de las ordenadas espectrales ya habían sido eliminados para este ejemplo. Lo anterior es evidente al comparar los datos de la tabla 13.8.1 y los valores modales máximos obtenidos mediante

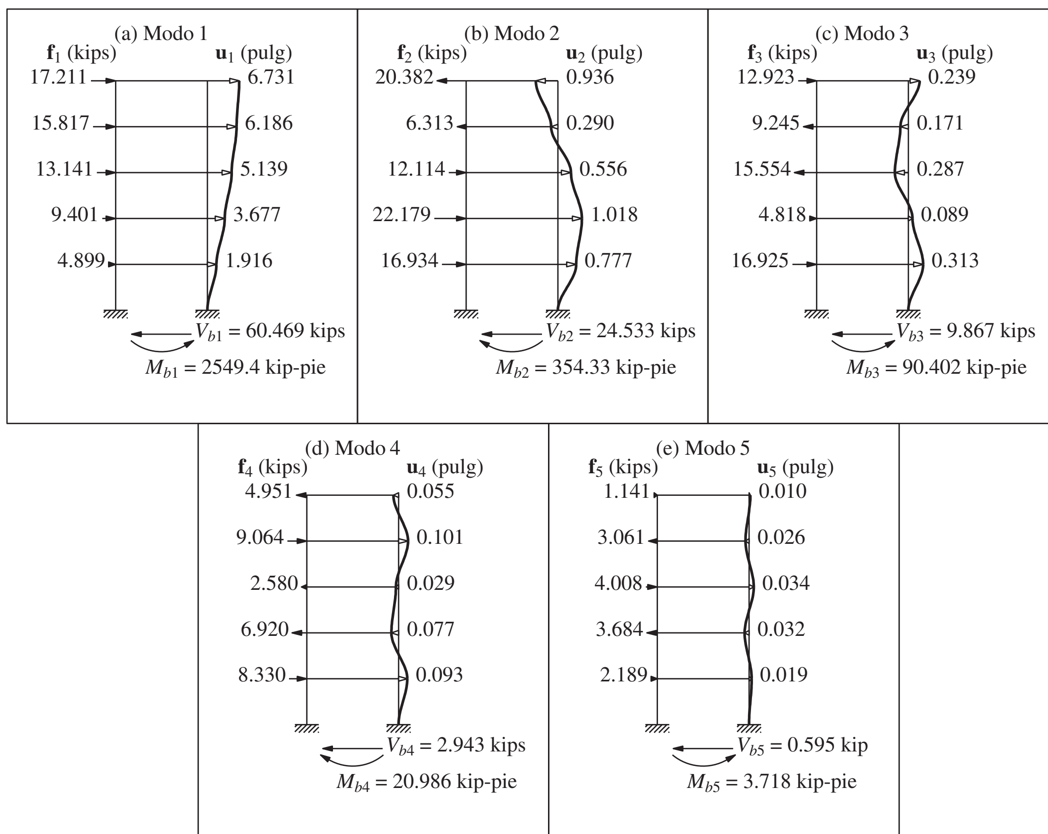


Figura 13.8.3 Valores máximos de los desplazamientos y de las fuerzas estáticas equivalentes laterales debidas a los cinco modos de vibración natural.

el análisis de la historia de la respuesta en las figuras 13.2.7 y 13.2.8. Los dos conjuntos de datos coinciden a excepción, quizá, de sus signos algebraicos, porque los valores máximos D_n y A_n son positivos por definición.

De manera alternativa, podría haberse utilizado la ecuación (13.7.1) para calcular la respuesta modal máxima. Por ejemplo, las respuestas estáticas modales M_{bn}^{st} y V_{bn}^{st} están disponibles a partir de la tabla 13.2.3 y A_n en la figura 13.8.2. Por ejemplo, los cálculos para el primer modo son

TABLA 13.8.1 RESPUESTAS MODALES MÁXIMAS

Modo	V_b (kips)	V_5 (kips)	M_b (kip-pie)	u_5 (pulg)
1	60.469	17.211	2549.4	6.731
2	24.533	−20.382	−354.33	−0.936
3	9.867	12.923	90.402	0.239
4	2.943	−4.951	−20.986	−0.055
5	0.595	1.141	3.718	0.010

$$V_{b1} = V_{b1}^{\text{st}} A_1 = [4.398(100/\text{g})]0.1375\text{g} = 60.469 \text{ kips}$$

$$M_{b1} = M_{b1}^{\text{st}} A_1 = [(15.45)(100/\text{g})12]0.1375\text{g} = 2549.4 \text{ kip-pie}$$

Como era de esperarse, estos valores son iguales a los datos de la tabla 13.8.1.

Combinación modal. El valor máximo r de la respuesta total $r(t)$ se calcula mediante la combinación de las respuestas modales máximas de acuerdo con las reglas ABSSUM, SRSS y CQC de las ecuaciones (13.7.2) a (13.7.4). Su uso se ilustra para una cantidad de respuesta, el cortante basal.

La regla ABSSUM de la ecuación (13.7.2) se especifica para el cortante basal como:

$$V_b \leq \sum_{n=1}^{5} |V_{bn}| \tag{13.8.3}$$

Si se sustituyen los valores conocidos de V_{bn} a partir de la tabla 13.8.1, resulta

$$V_b \leq 60.469 + 24.533 + 9.867 + 2.943 + 0.595 \quad \text{o} \quad V_b \leq 98.407 \text{ kips}$$

Como era de esperar, la estimación ABSSUM de 98.407 kips es mucho más grande que el valor exacto de 73.278 kips (figura 13.2.7).

La regla SRSS de la ecuación (13.7.3) se especifica para el cortante basal como:

$$V_b \simeq \left(\sum_{n=1}^{5} V_{bn}^2 \right)^{1/2} \tag{13.8.4}$$

Al sustituir los valores conocidos de V_{bn} a partir de la tabla 13.8.1, se obtiene

$$V_b \simeq \sqrt{(60.469)^2 + (24.533)^2 + (9.867)^2 + (2.943)^2 + (0.595)^2} = 66.066 \text{ kips}$$

Observe que las contribuciones de los modos más altos que el segundo son pequeñas.

La regla CQC de la ecuación (13.7.4) se especifica para el cortante basal como:

$$V_b \simeq \left(\sum_{i=1}^{5} \sum_{n=1}^{5} \rho_{in} V_{bi} V_{bn} \right)^{1/2} \tag{13.8.5}$$

En esta ecuación se requieren los coeficientes de correlación ρ_{in}, los cuales dependen de las relaciones de frecuencia $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$, calculadas a partir de las frecuencias naturales conocidas (sección 13.2.6) y repetidas en las tablas 13.8.2 por conveniencia.

TABLA 13.8.2 RELACIONES DE FRECUENCIA NATURAL β_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	ω_i (rad/s)
1	1.000	0.343	0.217	0.169	0.148	3.1416
2	2.919	1.000	0.634	0.494	0.433	9.1703
3	4.602	1.576	1.000	0.778	0.683	14.4561
4	5.911	2.025	1.285	1.000	0.877	18.5708
5	6.742	2.310	1.465	1.141	1.000	21.1810

TABLA 13.8.3 COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ρ_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	1.000	0.007	0.003	0.002	0.001
2	0.007	1.000	0.044	0.018	0.012
3	0.003	0.044	1.000	0.136	0.062
4	0.002	0.018	0.136	1.000	0.365
5	0.001	0.012	0.062	0.365	1.000

TABLA 13.8.4 TÉRMINOS INDIVIDUALES EN LA REGLA CQC: CORTANTE BASAL V_b

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	3656.476	10.172	1.615	0.306	0.049
2	10.172	601.844	10.687	1.284	0.178
3	1.615	10.687	97.354	3.943	0.365
4	0.306	1.284	3.943	8.658	0.639
5	0.049	0.178	0.365	0.639	0.354

Para cada valor β_{in} en la tabla 13.8.2, ρ_{in} se determina a partir de la ecuación (13.7.10) para $\zeta = 0.05$ y de la tabla 13.8.3. Observe que los coeficientes de correlación cruzada ρ_{in} ($i \neq n$) son pequeños porque las frecuencias naturales del marco de cortante de cinco niveles están muy separadas.

Los 25 términos en la doble sumatoria de la ecuación (13.8.5), que se calculan utilizando los valores conocidos de ρ_{in} (tabla 13.8.3) y V_{bn} (tabla 13.8.1), se presentan en la tabla 13.8.4. Al incorporar estos 25 términos y al calcular la raíz cuadrada, se obtiene $V_b \simeq 66.507$ kips. Está claro que sólo los términos con $i = n$ son significativos y los términos cruzados ($i \neq n$) son pequeños debido a que los coeficientes de correlación cruzada son pequeños. Observe que las contribuciones de los modos más altos que el segundo podrían despreciarse, lo que reduce el esfuerzo de cálculo.

Comparación de resultados del análisis del espectro de respuesta y el análisis de la historia de la respuesta. Las estimaciones de la respuesta máxima mediante el análisis del espectro de respuesta, obtenidas de las reglas ABSSUM, SRSS y CQC se resumen en la tabla 13.8.5, junto con los resultados del análisis de la historia de la respuesta de las figuras 13.2.7 a 13.2.8. En la sección anterior, se presentaron los detalles de cálculo para la estimación del cortante basal máximo mediante el análisis del espectro de respuesta; de manera similar, se obtuvieron resultados para V_5, M_b y u_5. Estos datos permiten varias observaciones. En primer lugar, la regla ABSSUM puede ser demasiado conservadora y, por lo tanto, no se utiliza. En segundo lugar, las reglas SRSS y CQC dan en esencia las mismas estimaciones de la respuesta máxima debido a que los coeficientes de correlación cruzada son pequeños para esta estructura con frecuencias naturales muy separadas. En tercer lugar, las respuestas máximas estimadas mediante las reglas SRSS o CQC son más pequeñas que los valores del ARH; sin embargo, ésta no es una tendencia general, y también es posible estimar valores más grandes cuando se utiliza un espectro de respuesta irregular para una sola excitación. En cuarto lugar, el error en las estimaciones de la respuesta máximas con la SRSS (o la CQC), expresado como un porcentaje del valor del ARH, varía con la cantidad de respuesta. Se tiene

TABLA 13.8.5 VALORES DE RESPUESTA MÁXIMOS CON EL ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA y EL ANÁLISIS DE LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

	V_b (kips)	V_5 (kips)	M_b (kip-pie)	u_5 (pulg)
ABSSUM	98.407	56.608	3018.8	7.971
SRSS	66.066	30.074	2575.6	6.800
CQC	66.507	29.338	2572.7	6.793
Análisis de la historia de la respuesta	73.278	35.217	2593.2	6.847

aproximadamente un 15% para el cortante en el entrepiso superior V_5, un 10% para el cortante basal V_b, y menos del 1% para el momento de volteo en la base M_b y el desplazamiento en el último nivel u_5. El error es más grande para V_5 porque las respuestas debidas a los modos más altos son más significativas (comparadas con las otras cantidades de respuesta consideradas) en relación con el primer modo (tabla 13.8.1). De manera similar, el error es más pequeño para M_b porque las respuestas de los modos superiores son una fracción muy pequeña de la respuesta del primer modo (tabla 13.8.1).

Ahora considere una aplicación típica del procedimiento de análisis del espectro de respuesta en la que se estima la respuesta máxima a excitaciones que se caracterizan por un espectro de diseño suavizado, por ejemplo el espectro medio (o mediano) derivado de los espectros individuales para muchos movimientos del terreno (sección 6.9). Las reglas de combinación modal son más confiables cuando se usan en conjunto con un espectro tan suavizado, debido a que la variabilidad de los errores indicados con anterioridad se “promedia” de excitación a excitación.

Observaciones. Observe que el valor de máximo r de cada cantidad de respuesta se determinó mediante la combinación de los valores máximos r_n de las contribuciones modales a la misma cantidad de respuesta. Ésta es la forma correcta de estimar el valor máximo de una cantidad de respuesta.

Por otro lado, no es correcto calcular el valor máximo combinado de una cantidad de respuesta a partir de los valores máximos combinados de otras cantidades de respuesta. Por ejemplo, se desea determinar Δ_5, la distorsión en el quinto nivel del edificio que se acaba de analizar. No es correcto determinar su valor máximo a partir de $\Delta_5 = u_5 - u_4$, donde u_5 y u_4 se determinaron al combinar sus picos modales u_{5n} y u_{4n}, respectivamente. El procedimiento correcto para determinar Δ_5 consiste en combinar los valores modales máximos, $\Delta_{5n} = u_{5n} - u_{4n}$.

Del mismo modo, es erróneo calcular el valor máximo combinado de una fuerza interna a partir de los valores máximos combinados de otras fuerzas. En particular, es incorrecto

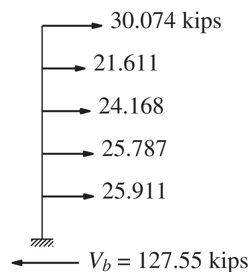


Figura 13.8.4 Procedimiento incorrecto para calcular las fuerzas internas.

determinar los cortantes por entrepiso o los momentos de volteo para cada nivel a partir de los valores máximos combinados de las fuerzas estáticas equivalentes. En la figura. 13.8.4 se muestra la combinación SRSS de los valores máximos de las fuerzas estáticas equivalentes f_{jn} para cada modo del edificio de cortante de cinco niveles (figura 13.8.3). El análisis estático de la estructura con estas fuerzas externas proporciona el cortante basal $V_b = 127.55$ kips, que es casi el doble del valor correcto de la SRSS presentado en la tabla 13.8.5. Este valor erróneo es mucho más grande debido a que los signos algebraicos de f_{jn} (figura 13.8.3) se pierden en la combinación SRSS y todas las fuerzas que se muestran en la figura 13.8.4 tienen la misma dirección.

13.8.3 Ejemplo: marco de cuatro niveles con un apéndice

En esta sección se estudia el marco de cuatro niveles con un apéndice ligero de la sección 13.2.7, donde se presentó la historia de su respuesta debida al movimiento del terreno de El Centro. En esta sección se estiman las respuestas máximas de la misma estructura mediante el procedimiento análisis del espectro de respuesta directamente a partir del espectro de respuesta al movimiento del terreno. El procedimiento del análisis y los detalles de su aplicación son idénticos a los descritos en la sección 13.8.2. Por lo tanto, sólo se presenta un resumen de los resultados.

En la tabla 13.8.6 se muestran los periodos naturales T_n y las ordenadas espectrales asociadas para un 5% de amortiguamiento junto con las respuestas modales máximas de dos

TABLA 13.8.6 VALORES ESPECTRALES Y RESPUESTAS MODALES MÁXIMAS

Modo	T_n (s)	D_n (pulg)	A_n/g	V_b (kips)	V_5 (kips)
1	2.000	5.378	0.1375	26.805	1.367
2	1.873	5.335	0.1556	25.429	−1.397
3	0.672	2.631	0.5950	19.816	0.027
4	0.439	1.545	0.8176	6.414	−0.005
5	0.358	0.928	0.7407	1.090	0.001

cantidades de respuesta: el cortante basal V_b y el cortante en el apéndice V_5. Las relaciones β_{in} de las frecuencias naturales se dan en la tabla 13.8.7. Los coeficientes de correlación calculados mediante la ecuación (13.7.10) para cada valor β_{in} se presentan en la tabla 13.8.8.

TABLA 13.8.7 RELACIONES DE FRECUENCIA NATURAL β_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	ω_i (rad/s)
1	1.000	0.936	0.336	0.219	0.179	3.142
2	1.068	1.000	0.359	0.234	0.191	3.355
3	2.974	2.785	1.000	0.653	0.532	9.344
4	4.556	4.266	1.532	1.000	0.815	14.314
5	5.589	5.233	1.879	1.227	1.000	17.558

TABLA 13.8.8 COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ρ_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	1.000	0.698	0.007	0.003	0.002
2	0.698	1.000	0.008	0.003	0.002
3	0.007	0.008	1.000	0.050	0.023
4	0.003	0.003	0.050	1.000	0.192
5	0.002	0.002	0.023	0.192	1.000

Los 25 términos en la doble sumatoria de la ecuación (13.8.5) para V_b se presentan en la tabla 13.8.9; los datos correspondientes para V_5 se presentan en la tabla 13.8.10. Todos los términos cruzados ($i \neq n$) de la tabla 13.8.9 son positivos porque todas las respuestas estáticas modales V_{bn}^{st} del cortante basal son positivas. Algunos de los términos cruzados en la tabla 13.8.10 son negativos porque no todas las respuestas estáticas modales V_{5n}^{st} para el cortante en el apéndice tienen el mismo signo algebraico; un término cruzado es negativo cuando V_{5i}^{st} y V_{5n}^{st} asumen signos opuestos. Por último, en la tabla 13.8.11 se presentan las estimaciones para los valores máximos de las dos cantidades de respuesta, obtenidas mediante los procedimientos ABSSUM, SRSS y CQC.

Estos resultados destacan varias características de las respuestas de los sistemas con dos modos que tienen frecuencias naturales cercanas y que contribuyen de manera significativa a la respuesta (por ejemplo, los dos primeros modos del edificio de cuatro niveles con un apéndice). El coeficiente de correlación cruzada para estos dos modos es 0.698 (tabla 13.8.8), lo cual es importante en relación con su valor más grande posible igual a la unidad. Como resultado, los términos cruzados 1-2 para V_5 y V_b son comparables en magnitud a los términos modales individuales (1-1 o 2-2, tablas 13.8.9 y 13.8.10). Por lo tanto, las reglas de combinación modal SRSS y CQC proporcionan estimaciones muy diferentes de las res-

TABLA 13.8.9 TÉRMINOS INDIVIDUALES EN LA REGLA CQC: CORTANTE BASAL V_b

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	718.516	475.836	3.491	0.474	0.056
2	475.836	646.646	3.850	0.510	0.059
3	3.491	3.850	392.654	6.385	0.488
4	0.474	0.510	6.385	41.144	1.341
5	0.056	0.059	0.488	1.341	1.188

TABLE 13.8.10 TÉRMINOS INDIVIDUALES EN LA REGLA CQC: CORTANTE EN EL APÉNDICE V_5

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	1.868	− 1.333	0.000	0.000	0.000
2	− 1.333	1.951	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLA 13.8.11 VALORES DE RESPUESTA MÁXIMA DEL ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA Y EL ANÁLISIS DE LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

	V_b (kips)	V_5 (kips)
ABSSUM	79.554	2.797
SRSS	42.428	1.954
CQC	52.774	1.074
Análisis de la historia de la respuesta	56.660	0.997

puestas máximas (tabla 13.8.11). La regla CQC da un cortante basal que es mayor a su valor con la regla SRSS porque todos los términos cruzados ($i \neq n$) son positivos (tabla 13.8.9). Sin embargo, el cortante del apéndice, el término cruzado significativo asociado con los dos primeros modos es negativo (tabla 13.8.10). Por lo tanto, la regla CQC proporciona un cortante en el apéndice que es más pequeño que el obtenido a partir de la regla SRSS. En la tabla 13.8.11 se muestra que sólo la regla de combinación modal CQC ofrece estimaciones de respuesta máximas cercanas a los resultados del análisis de la historia de la respuesta de la figura 13.2.11. Los errores en las estimaciones de la SRSS son demasiado grandes, y aún son mayores en los resultados de la ABSSUM.

Un examen de los resultados del análisis de la historia de la respuesta revela las razones de estos grandes errores en la regla de combinación SRSS. Observe que las respuestas $A_n(t)$ del sistema de 1GDL para los dos primeros modos están muy correlacionadas, puesto que están en fase debido a que los dos periodos naturales son cercanos (figura 13.2.10); los valores máximos de las dos $A_n(t)$ son similares porque sus periodos naturales son cercanos y sus fracciones de amortiguamiento son idénticas. Como resultado, y debido a que las respuestas estáticas modales son similares para los dos primeros modos (tabla 13.2.4), las contribuciones a la respuesta de los dos primeros modos son similares en magnitud (figura 13.2.11). Estas contribuciones modales al cortante basal se superponen casi directamente, ya que están en fase (figura 13.2.11a). Esta característica de la respuesta no está representada por la regla SRSS, mientras que en la regla CQC se reconoce mediante el término cruzado significativo (entre los modos 1 y 2) con un valor positivo (tabla 13.8.9). En contraste, las dos contribuciones modales al cortante en el apéndice tienden a anularse entre sí debido a que están en una fase en esencia opuesta (figura 13.2.11b). De nuevo, esta característica de la respuesta no está representada por la regla SRSS, mientras que en la regla CQC se reconoce mediante el término cruzado significativo (entre los modos 1 y 2) con un valor negativo (tabla 13.8.10). De este análisis se desprende que la regla de combinación modal SRSS no debe utilizarse para los sistemas con frecuencias naturales poco espaciadas.

13.9 EDIFICIOS DE VARIOS NIVELES CON PLANTA ASIMÉTRICA

En esta sección el procedimiento de análisis del espectro de respuesta de la sección 13.7 se especifica para edificios de varios niveles con plantas simétricas alrededor del eje x, pero asimétricas respecto al eje y, sometidos a un movimiento del terreno en la dirección y. El

valor máximo de la contribución $r_n(t)$ del n-ésimo modo a una cantidad de respuesta está dado por la ecuación (13.7.1). La respuesta modal estática r_n^{st} se calcula mediante el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{s}_{yn}$ y a los pares de torsión $\mathbf{s}_{\theta n}$ de la ecuación (13.3.7). Las ecuaciones para la respuesta modal estática r_n^{st} para varias cantidades de respuesta están disponibles en la tabla 13.3.1. Al sustituir estas fórmulas para la traslación del nivel u_{jy}, la rotación del nivel $u_{j\theta}$, el cortante basal V_b, el momento de volteo en la base M_b, y el par de torsión en la base T_b en la ecuación (13.7.1), se obtiene

$$u_{jyn} = \Gamma_n \phi_{jyn} D_n \qquad u_{j\theta n} = \Gamma_n \phi_{j\theta n} D_n \tag{13.9.1a}$$

$$V_{bn} = M_n^* A_n \qquad M_{bn} = h_n^* M_n^* A_n \qquad T_{bn} = I_{On}^* A_n \tag{13.9.1b}$$

Las ecuaciones (13.9.1) para las respuestas modales máximas son equivalentes al análisis estático del edificio sometido a las fuerzas estáticas equivalentes asociadas con la respuesta máxima del n-ésimo modo; las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{yn}$ y los pares de torsión $\mathbf{f}_{\theta n}$ son

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{yn} \\ \mathbf{f}_{\theta n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{yn} \\ \mathbf{s}_{\theta n} \end{Bmatrix} A_n \tag{13.9.2}$$

La fuerza lateral y el par de torsión en el j-ésimo nivel (figura 13.9.1) son

$$f_{jyn} = \Gamma_n m_j \phi_{jyn} A_n \qquad f_{j\theta n} = \Gamma_n r^2 m_j \phi_{j\theta n} A_n \tag{13.9.3}$$

Por las razones mencionadas en la sección 13.8, resulta más directo hacer el análisis estático de las fuerzas de $\mathbf{f}_{yn}$ y $\mathbf{f}_{\theta n}$ en vez de $\mathbf{s}_{yn}$ y $\mathbf{s}_{\theta n}$ y después multiplicar los últimos resultados por A_n.

Por lo tanto, para cualquier cantidad de respuesta, el valor máximo de la respuesta del n-ésimo modo se determina mediante el análisis estático del edificio sometido a las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{yn}$ y a los pares de torsión $\mathbf{f}_{\theta n}$; la dirección de las fuerzas f_{jyn} y $f_{j\theta n}$ está controlada por los signos algebraicos de ϕ_{jyn} y $\phi_{j\theta n}$. Observe que este análisis estático no es necesario para determinar los desplazamientos o las rotaciones de cada nivel; la ecuación (13.9.1a) ofrece la alternativa más conveniente. Aunque tal análisis estático tridimensional de un edificio con planta asimétrica proporciona las fuerzas en los elementos de todos los marcos del edificio, puede ser útil reconocer que las fuerzas en los elementos de un marco individual

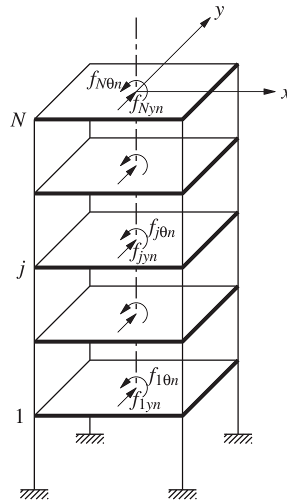


Figura 13.9.1 Valores máximos de las fuerzas estáticas equivalentes: fuerzas laterales y pares de torsión.

(i-ésimo) también pueden determinarse mediante el análisis plano del marco sometido a las fuerzas laterales:

$$\mathbf{f}_{in} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\mathbf{k}_{xi}(-y_i\phi_{\theta n})A_n \qquad \mathbf{f}_{in} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\mathbf{k}_{yi}(\phi_{yn} + x_i\phi_{\theta n})A_n \qquad (13.9.4)$$

La primera de estas ecuaciones aplica para los marcos en la dirección x y la segunda para los marcos en la dirección y. Se obtienen a partir de la ecuación (13.3.18) con $A_n(t)$ sustituida por el valor espectral A_n correspondiente.

Una vez que estas respuestas modales máximas se han determinado para todos los modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta total, pueden combinarse utilizando la regla CQC, ecuación (13.7.4), con N sustituido por $2N$ (el número de grados de libertad para el edificio de planta asimétrica) en ambas sumas; de esto se obtiene una estimación de la respuesta máxima total. La regla SRSS para la combinación modal no debe utilizarse porque muchos edificios de planta asimétrica tienen parejas (o tripletas) de frecuencias naturales estrechamente espaciadas.

Resumen. A continuación se resume paso a paso el procedimiento para calcular la respuesta máxima de un edificio de N-niveles con planta simétrica alrededor del eje x pero asimétrica respecto al eje y, sometido a la componente y de un movimiento del terreno, el cual está caracterizado por un espectro de respuesta o espectro de diseño:

1. Defina las propiedades estructurales.
   - **a.** Determine las matrices de masa y rigidez a partir de las ecuaciones (13.3.1) y (9.5.26).
   - **b.** Estime las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n (capítulo 11).
2. Determine las frecuencias naturales ω_n (periodos naturales $T_n = 2\pi/\omega_n$) y los modos naturales de vibración ϕ_n (capítulo 10).
3. Calcule la respuesta máxima en el n-ésimo modo mediante los siguientes pasos, que se repetirán para todos los modos, $n = 1, 2, ..., 2N$:
   - **a.** Lea D_n y A_n, la deformación y la pseudo-aceleración correspondientes al periodo natural T_n y a la fracción de amortiguamiento ζ_n, a partir del espectro de respuesta al sismo o el espectro de diseño.
   - **b.** Calcule los desplazamientos laterales y las rotaciones en los niveles a partir de la ecuación (13.9.1a).
   - **c.** Calcule las fuerzas estáticas equivalentes: las fuerzas laterales $\mathbf{f}_{yn}$ y los pares de torsión $\mathbf{f}_{\theta n}$ a partir de la ecuación (13.9.2) o (13.9.3).
   - **d.** Calcule las fuerzas en cada entrepiso (cortante, par de torsión y momento de volteo) y las fuerzas en los elementos (cortantes y momentos flexionantes) mediante el análisis estático tridimensional de la estructura sometida a las fuerzas externas $\mathbf{f}_{yn}$ y $\mathbf{f}_{\theta n}$. De manera alternativa, las fuerzas de los elementos en el i-ésimo marco pueden calcularse mediante el análisis estático plano de este marco sometido a las fuerzas laterales de la ecuación (13.9.4).
4. Determine una estimación para el valor máximo r de cualquier cantidad de respuesta mediante la combinación modal de los valores máximos r_n. Debe utilizarse la regla CQC para esta combinación porque, en general, los edificios de planta asimétrica tienen pares de frecuencias muy próximas entre sí.

Por lo regular, sólo los pares de modos inferiores contribuyen de manera significativa a la respuesta. Por lo tanto, los pasos 2 y 3 deben aplicarse sólo a estos modos y como consecuencia las sumatorias dobles en la regla CQC se truncarán.

Ejemplo 13.12

Para el sistema de un nivel con planta asimétrica de los ejemplos 13.7 y 10.6, determine los valores máximos de la respuesta al movimiento del terreno de El Centro en la dirección y, directamente a partir del espectro de respuesta para este movimiento del terreno y considerando fracciones de amortiguamiento modal $\zeta_n = 5\%$.

Solución Los pasos 1 y 2 del resumen del procedimiento que acaba de presentarse ya se aplicaron en el ejemplo 10.6.

Paso 3a: en la figura 6.6.4 se dan las ordenadas D_n y A_n, correspondientes a la T_n conocida y a $\zeta_n = 5\%$. Para $T_1 = 1.069$ s: $D_1 = 4.256$ pulg $= 0.3547$ pies y $A_1/g = 0.381$. Para $T_2 = 0.9248$ s: $D_2 = 4.161$ pulg $= 0.3468$ pies y A_2/g $= 0.497$. (Obviamente, los números no pueden leerse hasta cuatro cifras significativas a partir del espectro de respuesta; éstos se obtuvieron de los datos numéricos utilizados al graficar la figura 6.6.4; vea también la figura E13.8a).

Paso 3b: los valores máximos del desplazamiento y la rotación del techo se obtienen al especificar la ecuación (13.9.1a) para el sistema de un solo nivel:

$$u_{yn} = \Gamma_n \phi_{yn} D_n \qquad u_{\theta n} = \Gamma_n \phi_{\theta n} D_n \tag{a}$$

Si se sustituyen los valores numéricos para Γn, ϕ_{yn} y $\phi_{\theta n}$ (ejemplo 13.7) en la ecuación (a) con $n = 1$, se obtienen las respuestas máximas del primer modo:

$$\begin{aligned} u_{y1} &= (-0.974)(-0.5228)(0.3547) = 0.1806 \text{ pie} = 2.168 \text{ pulg} \\ \frac{b}{2}u_{\theta 1} &= \frac{30}{2}(-0.974)(0.0493)(0.3547) = -0.2555 \text{ pie} = -3.065 \text{ pulg} \end{aligned} \tag{b}$$

donde $(b/2)u_{\theta 1}$ representa el desplazamiento lateral en el borde de la planta debido a la rotación del diafragma del nivel. De manera similar, las respuestas máximas del segundo modo son

$$\begin{aligned} u_{y2} &= (-0.956)(-0.5131)(0.3468) = 0.1701 \text{ pie} = 2.042 \text{ pulg} \\ \frac{b}{2}u_{\theta 2} &= \frac{30}{2}(-0.956)(-0.0502)(0.3468) = 0.2497 \text{ pie} = 2.999 \text{ pulg} \end{aligned} \tag{c}$$

Paso 3c: los valores máximos de f_{yn} y $f_{\theta n}$, la fuerza lateral y el par de torsión, se obtienen al especificar la ecuación (13.9.3) para este marco de un nivel:

$$f_{yn} = \Gamma_n m \phi_{yn} A_n \qquad f_{\theta n} = \Gamma_n r^2 m \phi_{\theta n} A_n \tag{d}$$

Por estática, el cortante y el par de torsión basales son

$$V_{bn} = f_{yn} \qquad T_{bn} = f_{\theta n} \tag{e}$$

De manera alternativa, puede utilizarse la ecuación (13.7.1) para calcular la respuesta máxima modal. Por ejemplo, las respuestas estáticas modales M_{bn}^{st} y V_{bn}^{st} están disponibles a partir del ejemplo 13.8. Si se sustituyen $V_{b1}^{st} = 0.509m$, $T_{b1}^{st} = -5.203m$, $m = 60$ kips/g y $A_1 = 0.381$g en la ecuación (13.7.1), resulta

$$\begin{aligned} V_{b1} &= [0.509(60/\text{g})]0.381\text{g} = 11.63 \text{ kips} \\ T_{b1} &= [-5.203(60/\text{g})](0.381\text{g}) = -118.8 \text{ kip-pie} \end{aligned} \tag{f}$$

Al sustituir $V_{b2}^{st} = 0.491m$, $T_{b2}^{st} = 5.203m$ y $A_2 = 0.497$g en la ecuación (13.7.1), se obtiene

$$\begin{aligned} V_{b2} &= [0.491(60/\text{g})]0.497\text{g} = 14.64 \text{ kips} \\ T_{b2} &= [5.203(60/g)](0.497\text{g}) = 155.2 \text{ kip-pie} \end{aligned} \tag{g}$$

Paso 3d: la fuerza lateral máxima del marco A está dada por la ecuación (13.9.4b) especificada para un marco de un nivel:

$$f_{An} = k_A \Gamma_n (\phi_{yn} + x_A \phi_{\theta n}) D_n \quad \text{(h)}$$

Si se sustituyen $k_A = 75$ kips/pie, $x_a = 1.5$ pies y los valores numéricos de Γ_n, ϕ_{yn}, $\phi_{\theta n}$ y D_n, resulta

$$f_{A1} = 75(-0.974)[-0.5228 + 1.5(0.0493)]0.3547 = 11.63 \text{ kips}$$

$$f_{A2} = 75(-0.956)[-0.5131 + 1.5(-0.0502)]0.3468 = 14.64 \text{ kips}$$

El cortante basal de un marco con un solo entrepiso es igual a la fuerza lateral; por lo tanto,

$$V_{bA1} = 11.63 \text{ kips} \qquad V_{bA2} = 14.64 \text{ kips} \quad \text{(i)}$$

La fuerza lateral para el marco B está dada por la ecuación (13.9.4a) especificada para un marco de un nivel:

$$f_{Bn} = k_B \Gamma_n (-y_B \phi_{\theta n}) D_n \quad \text{(j)}$$

Al sustituir $k_B = 40$ kips/pie, $y_B = 10$ pies, y los valores numéricos de Γ_n, $\phi_{\theta n}$ y D_n, se obtiene

$$f_{B1} = 40(-0.974)[-10(0.0493)]0.3547 = 6.814 \text{ kips}$$

$$f_{B2} = 40(-0.956)[-10(-0.0502)]0.3468 = -6.662 \text{ kips}$$

Los cortantes correspondientes basales son

$$V_{bB1} = 6.814 \text{ kips} \qquad V_{bB2} = -6.662 \text{ kips} \quad \text{(k)}$$

Los resultados para las respuestas modales máximas se presentan en la tabla E13.12a.

TABLA E13.12a RESPUESTAS MODALES MÁXIMAS

Modo	u_y (pulg)	$b/2u_\theta$ (pulg)	V_b (kips)	T_b (kip-pie)	V_{bA} (kips)	V_{bB} (kips)
1	2.168	−3.065	11.63	−118.8	11.63	6.814
2	2.042	2.999	14.64	155.2	14.64	−6.662

Paso 4: para este sistema con dos modos, las reglas ABSSUM, SRSS y CQC, ecuaciones (13.7.2) a (13.7.4), se especifican para

$$r \le |r_1| + |r_2| \qquad r \simeq (r_1^2 + r_2^2)^{1/2} \qquad r \simeq (r_1^2 + r_2^2 + 2\rho_{12} r_1 r_2)^{1/2} \quad \text{(l)}$$

Para este sistema, $\beta_{12} = \omega_1/\omega_2 = 5.878/6.794 = 0.865$. Con este valor de β_{12} y $\zeta = 0.05$, la ecuación (13.7.10) da $\rho_{12} = 0.322$. Los resultados de la ecuación (1) se resumen en la tabla E13.12b, en la que también se incluyen los valores máximos de las respuestas totales determinadas mediante el análisis de la historia de la respuesta. Éstos se calcularon utilizando los resultados del ejemplo 13.8, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ fueron determinadas mediante el análisis dinámico del n-ésimo modo del sistema de 1GDL.

Como se esperaba, la estimación ABSSUM siempre es mayor que el valor del análisis de la historia de la respuesta. La estimación SRSS es mejor, pero la estimación CQC es la mejor de las tres, puesto que representa el término de correlación cruzada en la combinación modal, que es importante en este ejemplo porque las frecuencias naturales están muy cerca, una situación común para los sistemas con planta asimétrica.

TABLA E13.12b VALORES DE LA RESPUESTA MÁXIMA CON EL ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA Y EL ANÁLISIS DE LA HISTORIA DE LA RESPUESTA

	u_y (pulg)	$(b/2)u_\theta$ (pulg)	V_b (kips)	T_b (kip-pie)	V_{bA} (kips)	V_{bB} (kips)
ABSSUM	4.210	6.064	26.27	274.0	26.27	13.48
SRSS	2.978	4.289	18.70	195.5	18.70	9.530
CQC	3.423	3.532	21.43	162.3	21.43	7.848
Análisis de la historia de la respuesta	3.349	3.724	20.63	174.3	20.63	8.275

Ejemplo 13.13

En la figura E13.13a-c se muestra un edificio de dos niveles que consta de diafragmas rígidos soportados mediante tres marcos, *A*, *B* y *C*. Los pesos concentrados en el primero y segundo niveles son de 120 y 60 kips, respectivamente. Las matrices de rigidez lateral de estos marcos, cada uno idealizado como un marco de cortante, son

$$\mathbf{k}_{yA} = \mathbf{k}_y = \begin{bmatrix} 225 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_{xB} = \mathbf{k}_{xC} = \mathbf{k}_x = \begin{bmatrix} 120 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix}$$

En la figura 6.9.5 se proporciona el espectro de diseño para $\zeta_n = 5\%$, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.5g. Determine el valor máximo del cortante basal del marco *A*.

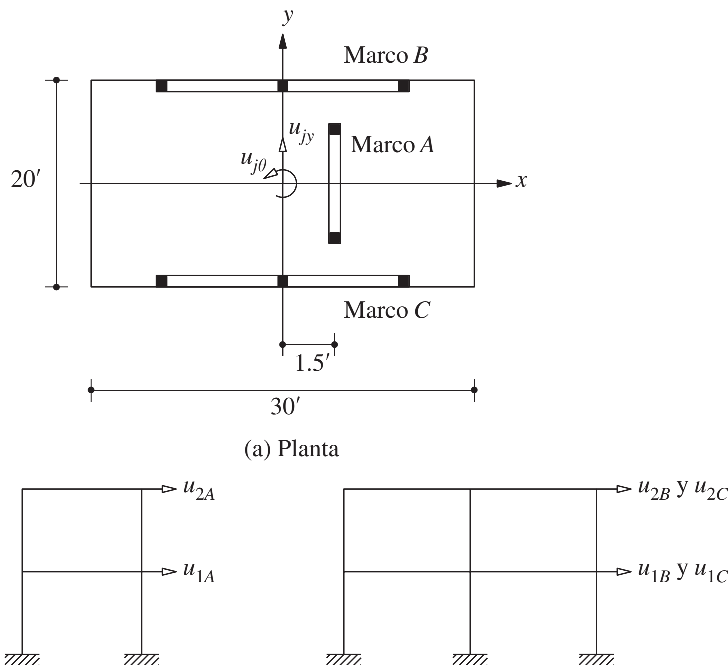


Figura E13.13a-c

Solución Este sistema tiene cuatro grados de libertad: u_{yj} y $u_{\theta j}$ (figura E13.13a); $j = 1$ y 2. La matriz de rigidez de las ecuaciones (9.5.25) y (9.5.26) se ha especificado para este sistema con tres marcos:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_y & e\mathbf{k}_y \\ e\mathbf{k}_y & e^2\mathbf{k}_y + (d^2/2)\mathbf{k}_x \end{bmatrix}$$

Al sustituir $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$, $e = 1.5$ pies y $d = 20$ pies, se obtiene

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 225.0 & -75.00 & 337.5 & -112.5 \\ & 75.00 & -112.5 & 112.5 \\ & (\text{sim}) & 24{,}506 & -8169 \\ & & & 8169 \end{bmatrix}$$

Las masas por nivel son $m_1 = 120/\text{g} = 3.727$ kip-s^2/pie y $m_2 = 60/\text{g} = 1.863$ kip-s^2/pie y los momentos de inercia de los niveles son $I_{Oj} = m_j(b^2 + d^2)/12 = m_j(30^2 + 20^2)/12 = 1300m_j/12$. Si se sustituyen estos datos en la matriz de masa de la ecuación (9.5.27), resulta

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3.727 & & & \\ & 1.863 & & \\ & & 403.7 & \\ & & & 201.9 \end{bmatrix}$$

El problema de valores característicos se resuelve para determinar los periodos naturales T_n y los modos ϕ_n mostrados en la figura E13.13d. Observe que cada modo incluye el movimiento lateral y torsional. En el primer modo los dos niveles se desplazan en la misma dirección lateral y los dos niveles giran en el mismo sentido. En el segundo modo, los dos niveles giran en la misma dirección, que es opuesta a la del primer modo. En los modos tercero y cuarto los

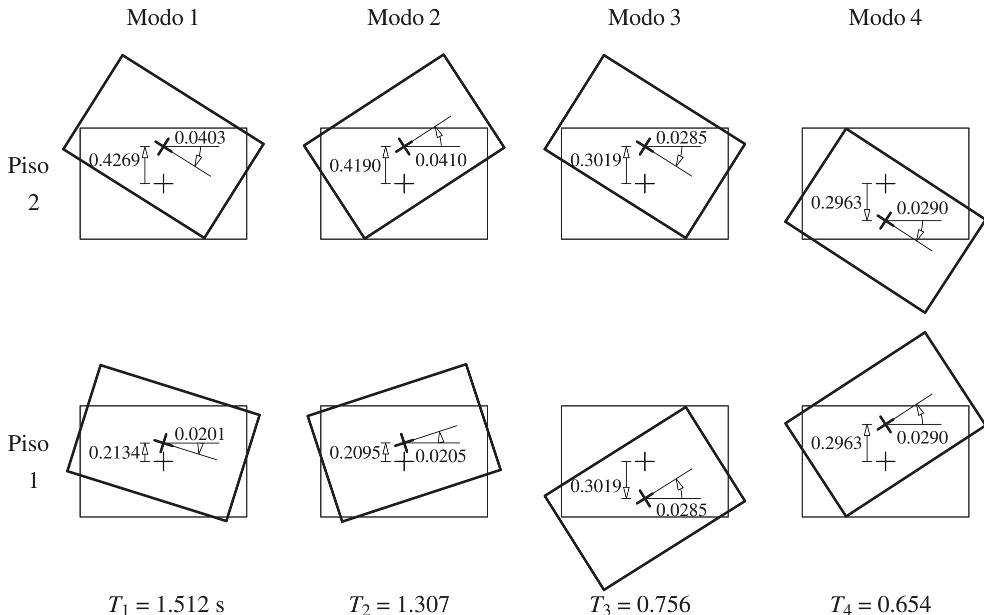


Figura E13.13d

desplazamientos laterales en los dos niveles tienen direcciones opuestas; lo mismo ocurre con las rotaciones de los dos nivles.

Las Γ_n se calculan a partir de las ecuaciones (13.3.4) a (13.3.6): $\Gamma_1 = 1.591$, $\Gamma_2 = 1.561$, $\Gamma_3 = -0.562$ y $\Gamma_4 = 0.552$.

Para $T_n = 1.512$, 1.307, 0.756 y 0.654 s, el espectro de diseño da $A_1/g = 0.595$, $A_2/g = 0.688$, $A_3/g = 1.191$ y $A_4/g = 1.355$.

Los valores máximos de las fuerzas laterales estáticas equivalentes para el marco A son (a partir de la ecuación 13.9.4b)

$$\mathbf{f}_{An} = (\Gamma_n/\omega_n^2)\mathbf{k}_y(\phi_{yn} + e\phi_{\theta n})A_n$$

Si se sustituye para Γ_1, $\omega_1(= 4.156)$, $\mathbf{k}_y$, A_1, ϕ_{y1} y $\phi_{\theta 1}$, resultan las fuerzas laterales asociadas con el primer modo:

$$\begin{Bmatrix} f_{A1} \\ f_{A2} \end{Bmatrix}_1 = \frac{1.591}{(4.156)^2}(0.595 \times 32.2) \begin{bmatrix} 225 & -75 \\ -75 & -75 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.2134 \\ 0.4269 \end{Bmatrix} + 1.5 \begin{Bmatrix} -0.0201 \\ -0.0403 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 24.2 \\ 24.2 \end{Bmatrix}$$

El análisis estático del marco sometido a estas fuerzas laterales (figura E13.13e) proporciona las fuerzas internas. En particular, el cortante basal es $V_bA_1 = f_{11} + f_{21} = 48.4$ kips. Con cálculos similares se llega al cortante máximo en la base debido a los modos segundo, tercero y cuarto: $V_bA_2 = 53.9$, $V_bA_3 = 12.1$ y $V_bA_4 = 13.3$ kips.

El valor máximo r de la respuesta total $r(t)$ se calcula mediante la combinación de las

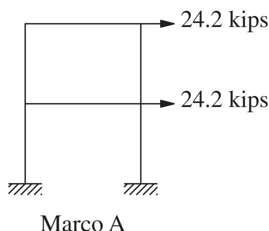


Figura E13.13e

respuestas modales máximas de acuerdo con la regla CQC, ecuación (13.7.4). Con este propósito es necesario determinar las relaciones de frecuencia $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$, las cuales se dan en la tabla E13.13a. Para cada uno de los valores de β_{in} se calcula el coeficiente de correlación ρ_{in} a partir de la ecuación (13.7.10) con $\zeta = 0.05$ y se presenta en la tabla E13.3b.

Si se sustituyen el valor modal máximo V_{bAn} y los coeficientes de correlación ρ_{in} en la

TABLA E13.13a RELACIONES DE FRECUENCIA NATURAL β_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	ω_i (rad/s)
1	1.000	0.865	0.500	0.433	4.157
2	1.156	1.000	0.578	0.500	4.804
3	2.000	1.730	1.000	0.865	8.313
4	2.312	2.000	1.156	1.000	9.608

regla CQC, resultan los 16 términos de la doble sumatoria para la ecuación (13.7.4) (tabla E13.13c). Al sumar los 16 términos y obtener la raíz cuadrada, se obtiene $V_{bA} = 86.4$ kips. La tabla E13.13c muestra que los términos con valores significativos son los términos con $i = n$, así como los términos cruzados entre los modos 1 y 2 y entre los modos 3 y 4. Los términos cruzados entre los modos 1 y 3, 1 y 4, 2 y 3, o 2 y 4 son pequeños, porque esas frecuencias están

TABLA E13.13b COEFICIENTES DE CORRELACIÓN ρ_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1	1.000	0.322	0.018	0.012
2	0.322	1.000	0.030	0.018
3	0.018	0.030	1.000	0.322
4	0.012	0.018	0.322	1.000

TABLA E13.13c TÉRMINOS INDIVIDUALES EN LA REGLA CQC: CORTANTE BASAL V_{bA} EN EL MARCO A

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1	2344.039	839.912	10.833	7.839
2	839.913	2905.669	19.748	13.250
3	10.833	19.748	146.502	51.797
4	7.839	13.250	51.797	176.807

muy separadas. La raíz cuadrada de la suma de los cuatro términos con $i = n$, a partir de la tabla E13.3c, da la estimación SRSS: $V_{bA} = 74.7$ kips, la cual es menos precisa.

13.10 UNA ENVOLVENTE BASADA EN EL ESPECTRO DE RESPUESTA PARA RESPUESTAS SIMULTÁNEAS

El diseño sísmico de un elemento estructural puede estar controlado por la acción simultánea de dos o más respuestas. Por ejemplo, una columna en un marco tridimensional debe diseñarse para resistir una fuerza axial y los momentos flexionantes alrededor de dos ejes que actúan al mismo tiempo y varían en el tiempo. Esta sección se limita a dos cantidades de respuesta: $r_a(t)$ y $r_b(t)$; para una columna, $r_a(t)$ representa el momento flexionante $M(t)$ alrededor de un eje transversal y $r_b(t)$ representa la fuerza axial $P(t)$. Los valores de r_a y r_b en un instante de tiempo t se indican mediante un punto en el espacio bidimensional de respuesta

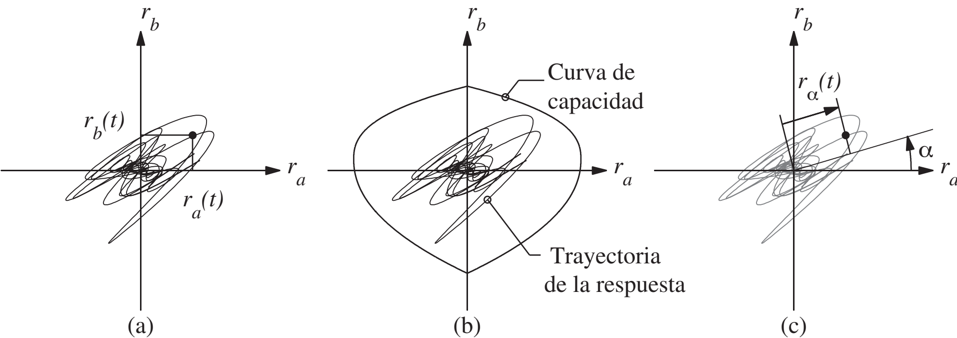


Figura 13.10.1

(figura 13.10.1a), y la trayectoria de la respuesta (es decir, las combinaciones de r_a y r_b durante el sismo) muestra la manera en que este par de cantidades de respuesta evolucionan en el tiempo. Un elemento estructural se considerará bien diseñado si la trayectoria de la respuesta se mantiene dentro de la región segura del espacio de respuesta, definido por la curva de capacidad correspondiente para el elemento (figura 13.10.1b); por ejemplo, la curva de capacidad para una columna se conoce por lo regular como el diagrama de interacción *P-M*.

¿Cómo puede lograrse una comparación entre la demanda sísmica y la capacidad del elemento estructural en el contexto del procedimiento de análisis del espectro de respuesta, presentado en la sección 13.7? El procedimiento análisis del espectro de respuesta proporciona una estimación del valor máximo de cada cantidad de respuesta, pero estos picos no suelen producirse en el mismo instante. Reconociendo este hecho, se presenta un conjunto de ecuaciones basadas en el espectro de respuesta para determinar una envolvente que delimita la trayectoria de la respuesta. Así, esta envolvente limitante puede compararse con la curva de capacidad para el elemento, a fin de determinar si está bien diseñado o no.

En la figura 13.10.2a los valores máximos de $r_a(t)$ y $r_b(t)$ estimados mediante el procedimiento análisis del espectro de respuesta se identifican como r_{ao} y r_{bo}. Éstos pueden interpretarse como estimaciones de los valores máximos de las proyecciones de la trayectoria de la respuesta en los ejes r_a y r_b, respectivamente. Mediante el uso de estas estimaciones de los valores máximos, r_{ao} y r_{bo}, basadas en el espectro de respuesta, en la figura 13.10.2a[†] se presenta una "envolvente" rectangular que "limita" la trayectoria de respuesta; visualmente, la envolvente parece demasiado conservadora. De hecho, es conservadora, puesto que exige que el elemento estructural se diseñe para las cuatro combinaciones de las respuestas máximas: $\pm r_{ao}$ y $\pm r_{bo}$, lo que implica que los picos se producen en el mismo instante; se consideran ambos signos algebraicos debido a que éstos se pierden en el procedimiento del análisis del espectro de respuesta, que siempre da un valor positivo. El objetivo aquí es construir una envolvente limitante más estrecha.

Para este fin, considere una dirección arbitraria en el espacio de respuesta que se gira α radianes en sentido antihorario a partir del eje r_a (figura 13.10.1c). La proyección de la

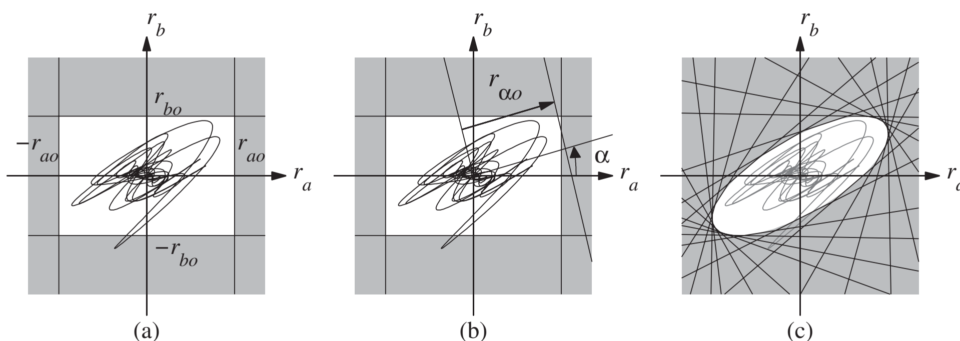


Figura 13.10.2

[†]Las comillas se incluyen para enfatizar la posibilidad de que esta envolvente no limite estrictamente la trayectoria de la respuesta, ya que, como se mencionó en la sección 13.7, una estimación de la respuesta máxima con el análisis del espectro de respuesta puede proporcionar una subestimación respecto al valor exacto obtenido del análisis de la historia de la respuesta.

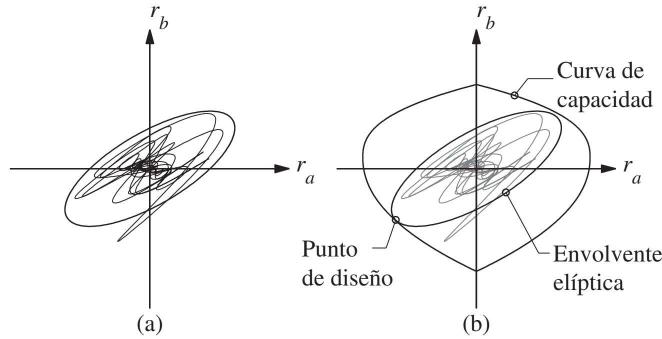


Figura 13.10.3

trayectoria de respuesta a lo largo de esta dirección está dada por†

$$r_\alpha(t) = r_a(t)\cos\alpha + r_b(t)\,\text{sen}\,\alpha \tag{3.10.1}$$

El valor máximo $r_{\alpha o}$ de $r_\alpha(t)$ puede estimarse mediante el procedimiento análisis del espectro de respuesta, en el que las respuestas estáticas modales requeridas $r_{\alpha n}^{\text{st}}$ pueden determinarse a partir de $r_{\alpha n}^{\text{st}}$ y r_{bn}^{st} siguiendo la ecuación (13.10.1):

$$r_{\alpha n}^{\text{st}} = r_{an}^{\text{st}}\cos\alpha + r_{bn}^{\text{st}}\,\text{sen}\,\alpha \tag{3.10.2}$$

Como se muestra en la figura 13.10.2b, la trayectoria de la respuesta está limitada en la dirección α por $r_{\alpha o}$, al igual que estaba limitada por r_{ao} y r_{bo} en las direcciones $\alpha = 0°$ y $90°$, respectivamente.

El cálculo anterior puede repetirse a fin de determinar $r_{\alpha o}$ para varias direcciones α y trazar los límites resultantes (figura 13.10.2c), con lo que la envolvente puede estrecharse poco a poco. La envolvente resultante se muestra como una elipse (figura 13.10.3a) con sus coordenadas definidas por

$$\begin{Bmatrix} r_a \\ r_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(r_{ao}^2\cos\alpha + r_{abo}\,\text{sen}\,\alpha\right)\big/ r_{\alpha o} \\ \left(r_{bo}^2\,\text{sen}\,\alpha + r_{abo}\cos\alpha\right)\big/ r_{\alpha o} \end{Bmatrix} \qquad 0 \le \alpha < 2\pi \text{ radianes} \tag{13.10.3}$$

donde el término cruzado r_{abo} aún está por definirse. De paso, se observa que este término cruzado determina la orientación de los ejes principales de la elipse con respecto a los ejes del espacio de respuesta r_a y r_b. Las coordenadas dadas por la ecuación (13.10.3) de un punto sobre la envolvente elíptica no necesariamente se encuentran en la dirección α alejadas del origen del espacio de respuesta; de hecho, la dirección es $\tan^{-1}(r_b/r_a)$. Recuerde que α define la dirección a lo largo de la cual se proyecta la trayectoria de respuesta. Es posible demostrar que la envolvente elíptica se inscribe dentro de la envolvente rectangular conservadora.

Independientemente de la regla de combinación modal usada para estimar las respuestas máximas, la presentación anterior está ahora especificada para las reglas CQC y SRSS.

†En general, r_α no representa ninguna cantidad de respuesta física; sin embargo, en algunos casos lo hace. Por ejemplo, si r_a y r_b indican los momentos flexionantes en una columna alrededor de dos ejes ortogonales a y b de su sección transversal, entonces r_α representa el momento flexionante alrededor de un eje transversal girado α radianes en sentido antihorario desde el eje a.

De acuerdo con la regla de combinación modal CQC, r_{ao}, r_{bo} y r_{abo} están dadas por

$$r_{ao} \simeq \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{in}r_{aio}r_{ano}\right)^{1/2} \quad r_{bo} \simeq \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{in}r_{bio}r_{bno}\right)^{1/2} \quad r_{abo} \simeq \sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\rho_{in}r_{aio}r_{bno} \tag{13.10.4}$$

donde las primeras dos ecuaciones son conocidas (vea la sección 13.7) para los valores máximos de las respuestas $r_a(t)$ y $r_b(t)$ y el término cruzado definido por la ecuación (13.10.4c) es similar en apariencia a las ecuaciones (13.10.4a) y (13.10.4b), pero involucra ambas respuestas; recuerde que $\rho_{in} = 1$ para $i = n$ (sección 13.7).

Si las frecuencias naturales de vibración de la estructura están muy separadas, $\rho_{in} \simeq 0$ para $i \neq n$ y la ecuación (13.10.4) se simplifica como

$$r_{ao} \simeq \left(\sum_{n=1}^{N}r_{ano}^2\right)^{1/2} \qquad r_{bo} \simeq \left(\sum_{n=1}^{N}r_{bno}^2\right)^{1/2} \qquad r_{abo} \simeq \sum_{n=1}^{N}r_{ano}r_{bno} \tag{13.10.5}$$

Las ecuaciones (13.10.5a) y (13.10.5b) son las ecuaciones conocidas (vea la sección 13.7) para los valores máximos de las respuestas $r_a(t)$ y $r_b(t)$ con base en la regla de combinación modal SRSS, y la ecuación (13.10.5c) es un caso especial de la ecuación (13.10.4c).

A partir del procedimiento análisis del espectro de respuesta, la ecuación (13.10.3) combinada con la ecuación (13.10.4) o (13.10.5), según sea apropiado, define la envolvente elíptica limitante. En lugar de la trayectoria de respuesta completa (figura 13.10.1b), esta envolvente puede compararse con la curva de capacidad del elemento estructural para determinar si está bien diseñado o no (figura 13.10.3b). En particular, se considera que un elemento está bien diseñado si la envolvente elíptica, que envuelve todas las combinaciones de las respuestas que ocurren durante un sismo, se encuentra dentro de la región segura del espacio de respuesta definido por la superficie de la capacidad del elemento. Con frecuencia se observa que la combinación de respuesta crítica, que se indica por el punto de diseño, no incluye el valor máximo de cualquiera de las dos respuestas, como se muestra en la figura 13.10.3b.

Los investigadores han desarrollado una teoría general que conduce a una envolvente limitante o función límite que delimita los valores probables para un conjunto de más de dos cantidades de respuesta; por ejemplo, la fuerza axial y los momentos flexionantes alrededor de los ejes de la sección transversal x y y que actúan sobre un elemento estructural. En este caso, la envolvente limitante, que es una elipse en el espacio bidimensional de respuesta, se generaliza como un elipsoide en el espacio tridimensional de respuesta. Los investigadores también han desarrollado estrategias para comparar las envolventes de respuesta tridimensional con las superficies de capacidad a fin de juzgar si un elemento estructural está bien diseñado o no.

Contribución de las fuerzas estáticas. En la presentación anterior de la envolvente elíptica sólo se consideraron las respuestas a la excitación sísmica que son variables en el tiempo. Sin embargo, las cargas estáticas iniciales (vivas y muertas) que actúan sobre la estructura generan las componentes invariantes en el tiempo r_{as} y r_{bs}. Para los sistemas elástico lineales, las componentes iniciales de la respuesta, estáticas y variables en el tiempo, pueden sumarse para producir la respuesta total que varía en el tiempo alrededor del punto de inicio $<r_{as}, r_{bs}>$ en el espacio de respuesta r_a–r_b (figura 13.10.4). El tamaño y la orientación de la envolvente elíptica no se ven afectados por las componentes estáticas, y el centro de la envolvente se traslada desde el origen del espacio de respuesta hasta $<r_{as}, r_{bs}>$, como se muestra en la figura 13.10.4.

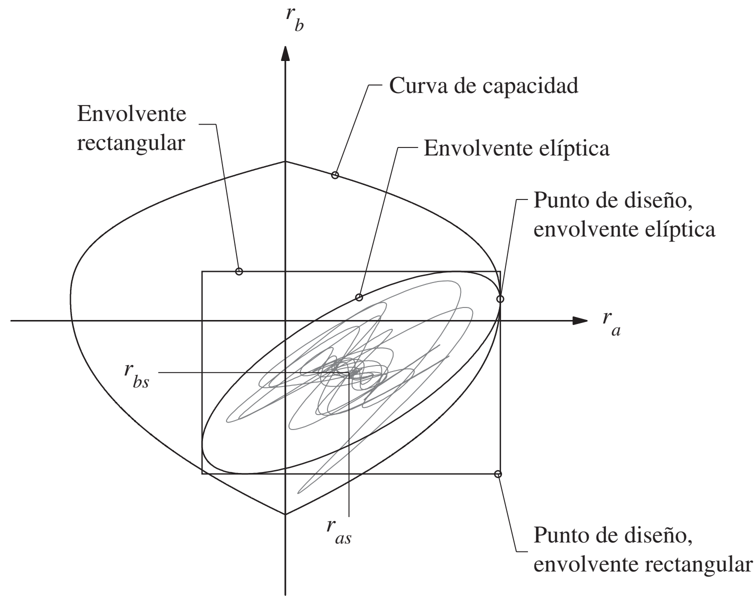


Figura 13.10.4

Las coordenadas de esta envolvente trasladada son

$$\begin{Bmatrix} r_a \\ r_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(r_{ao}^2 \cos\alpha + r_{abo} \operatorname{sen}\alpha\right)/r_{\alpha o} \\ \left(r_{bo}^2 \operatorname{sen}\alpha + r_{abo} \cos\alpha\right)/r_{\alpha o} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{as} \\ r_{bs} \end{Bmatrix} \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi \text{ radianes} \qquad (13.10.6)$$

A partir de la figura 13.10.4 resulta claro que el punto de diseño crítico, que es el punto sobre la envolvente de la respuesta que controla el diseño de un elemento estructural, basado en la envolvente rectangular se encuentra fuera de la curva de capacidad, lo que indica que el elemento estructural no satisface los requisitos de diseño. Sin embargo, la envolvente elíptica está dentro de la superficie de la capacidad del elemento, lo que indica que el elemento está bien diseñado. Es obvio que la construcción de una envolvente adecuada resulta importante para llegar a la decisión correcta.

Ejemplo 13.14

Considere el marco en forma de L invertida de la figura E13.1a, sometido al movimiento del terreno de El Centro. Determine la trayectoria de la respuesta y la envolvente limitante para dos fuerzas que actúan al mismo tiempo en la base de la columna: momento flexionante M_b y fuerza axial P. Se tiene que $m = 50$ kips/g, $EI = 7.8 \times 10^6$ kip-pulg^2 y $L = 12$ pies, y se supone que $\zeta_n = 5\%$.

Solución Al sustituir los valores dados de m, EI y L en la ecuación (c) del ejemplo 13.1, se obtienen las frecuencias naturales de vibración $\omega_1 = 3.139$ y $\omega_2 = 8.420$ rad/s; los periodos naturales de vibración correspondientes son $T_1 = 2.0$ y $T_2 = 0.746$ s.

Análisis de la historia de la respuesta. El análisis de la respuesta del sistema de 1GDL correspondiente al primer modo ($T_1 = 2$ se y $\zeta_1 = 5\%$) y del sistema de 1GDL correspondiente al segundo modo ($T_2 = 0.746$ s y $\zeta_2 = 5\%$) al movimiento del terreno de El Centro da los valores de $D_n(t)$ y $A_n(t)$ mostrados en la figura E13.14a.

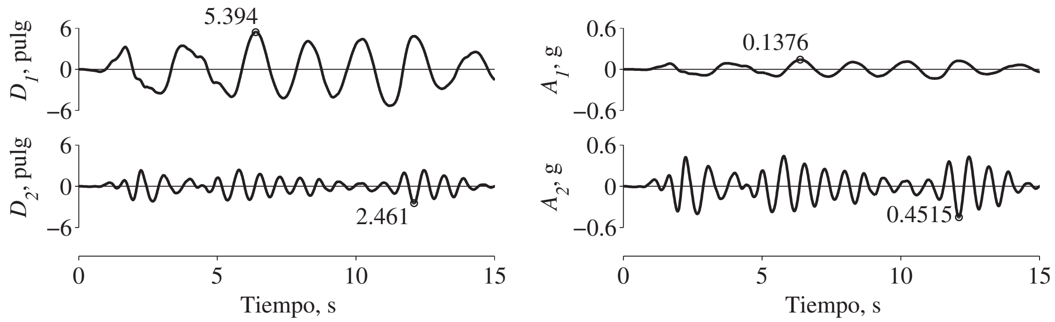


Figura E13.14a

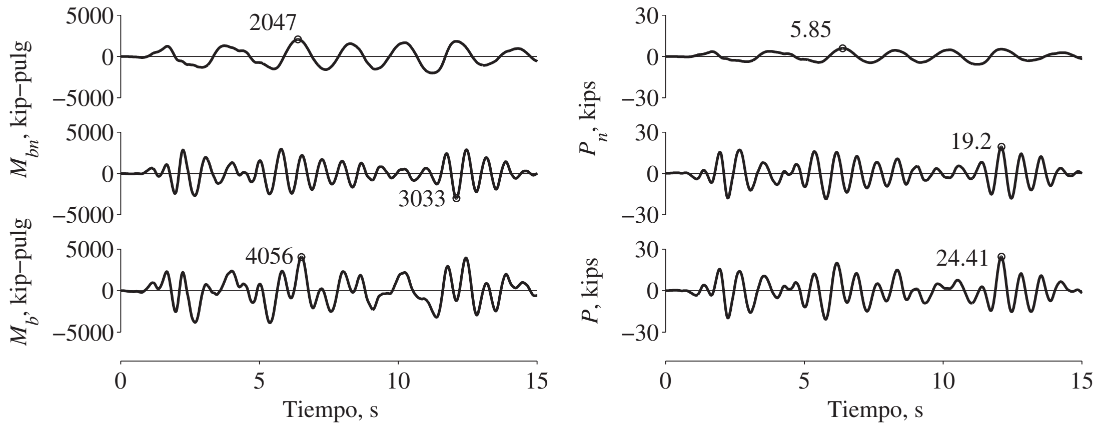


Figura E13.14b

Las respuestas estáticas modales M_{bn}^{st} y $P^{st}{}_n$ son las siguientes: $M_{b1}^{st} = 2.069mL$ y $M_{b2}^{st} = 0.931mL$ (a partir del ejemplo 13.1); $P_{b1}^{st} = 0.851m$ y $P_{b2}^{st} = -0.851m$ (a partir de la figura E13.1). Al sustituir esto en la ecuación (13.1.16) se obtiene la historia de la respuesta:

$$\begin{aligned} M_b(t) &= 2.069mLA_1(t) + 0.931mLA_2(t) \\ P(t) &= 0.851mA_1(t) - 0.851mA_2(t) \end{aligned} \tag{a}$$

El momento en la base y la fuerza axial se calculan a partir de la ecuación (a) usando la $A_n(t)$ conocida de la figura E13.14a y se muestran en la figura E13.14b. Se presentan las contribuciones de cada modo por separado y las respuestas combinadas totales. Los valores máximos son $M_{bo} = 4056$ kip-pulg y $P_o = 24.41$ kips, tal como se indica.

Al graficar juntos $M_b(t)$ y $P(t)$ en el espacio de respuesta (figura E13.14c) se obtiene la trayectoria de la respuesta. Observe que los valores máximos de las proyecciones de la trayectoria de la respuesta sobre los ejes M_b y P son iguales a M_{bo} y P_o, los cuales se determinaron con anterioridad (figura E13.14c).

Análisis del espectro de respuesta. El espectro de respuesta para el movimiento de terreno de El Centro (figura 6.6.4) para un 5% de amortiguamiento da $A_1 = 0.1376$g y $A_2 = 0.4515$g, correspondientes a T_1 y T_2, respectivamente. Éstos son los valores precisos para las ordenadas espectrales, los valores máximos de $A_n(t)$ que se indican en la figura E13.14a.

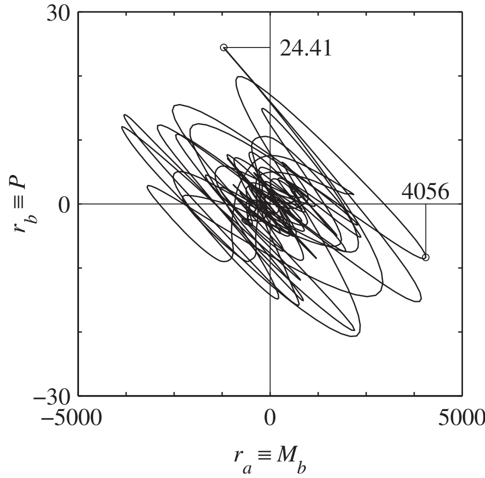


Figura E13.14c

Las respuestas modales máximas están dadas por

$$M_{bno} = M_{bn}^{st} A_n \qquad P_{no} = P_n^{st} A_n \tag{b}$$

Al sustituir para A_n, las respuestas modales estáticas, m y L se llega a los valores modales máximos para el momento flexionante en la base de la columna:

$$M_{b1o} = 2.069mL(0.1376\text{g}) = 2047\,\text{kip-pulg}$$
$$M_{b2o} = 0.931mL(0.4514\text{g}) = 3033\,\text{kip-pulg}$$

y para la fuerza axial en la columna:

$$P_{1o} = 0.851m(0.1376\text{g}) = 5.85\,\text{kips}$$
$$P_{2o} = -0.851m(0.4514\text{g}) = -19.2\,\text{kips}$$

Como las frecuencias naturales de este sistema están muy separadas, es posible combinar la respuesta modal máxima mediante la regla SRSS:

$$M_{bo} = \sqrt{(2047)^2 + (3033)^2} = 3659\,\text{kip-pulg}$$
$$P_o = \sqrt{(5.85)^2 + (-19.2)^2} = 20.07\,\text{kips}$$

Estas estimaciones de las respuestas máximas se muestran en el espacio de respuesta r_a–r_b en la figura E13.14d. Debido a que estas estimaciones de las respuestas máximas son más pequeñas que los valores máximos exactos obtenidos con el análisis de la historia de la respuesta (figura E13.14b), estrictamente no limitan la trayectoria de la respuesta (figura E13.14d).

Las respuestas estáticas modales para r_α se calculan a partir de la ecuación (13.10.2):

$$r_{\alpha n}^{\text{st}} = M_{bn}^{\text{st}} \cos\alpha + P_n^{\text{st}} \operatorname{sen}\alpha$$

Para $\alpha = 30°$, estas respuestas estáticas modales son

$$r_{\alpha 1}^{\text{st}} = 2.069mL\cos 30° + 0.851m \operatorname{sen} 30°$$
$$= (1.792L + 0.4255)m$$
$$r_{\alpha 2}^{\text{st}} = 0.931mL\cos 30° - 0.851m \operatorname{sen} 30°$$
$$= (0.8062L - 0.4255)m$$

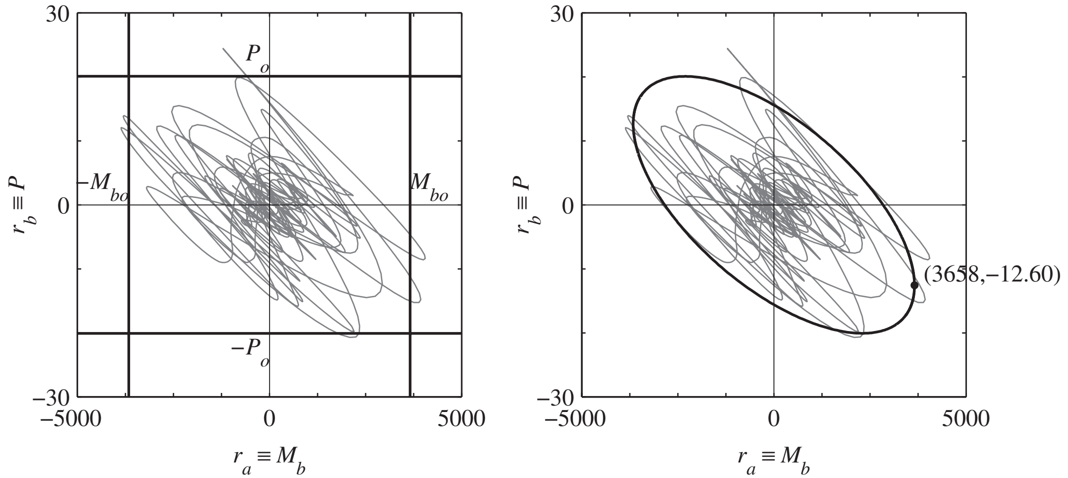


Figura E13.14d, e

Si se sustituyen estos $r_{\alpha n}^{\text{st}}$ y los valores de A_n en $r_{\alpha no} = r_{\alpha n}^{\text{st}}$, resultan las respuestas modales máximas

$$r_{\alpha 1o} = (1.792L + 0.4255)m(0.1376\text{g}) = 1776$$

$$r_{\alpha 2o} = (0.8062L - 0.4255)m(0.4515\text{g}) = 2617$$

La combinación de estas respuestas modales máximas da

$$r_{\alpha o} = \sqrt{(1776)^2 + (2617)^2} = 3163$$

Observe que r_α no representa una cantidad física; por lo tanto, no se muestran las unidades.

Envolvente limitante La envolvente limitante está dada por la ecuación (13.10.3) donde r_{ao}, r_{bo} y $r_{\alpha o}$ ya se han determinado, y r_{abo} está dado por la ecuación (13.10.5c):

$$r_{abo} = \sum_{n=1}^{N} r_{ano} r_{bno} = (2047)(5.85) + (3033)(-19.2)$$
$$= -46{,}260$$

Con r_{ao}, r_{bo}, $r_{\alpha o}$ y r_{abo} conocidos, ahora se ilustra el cálculo de las coordenadas de la envolvente limitante para $\alpha = 30°$:

$$r_a = [(3659)^2 \cos 30° + (-46240) \operatorname{sen} 30°]/3163 = 3658$$

$$r_b = [(20.07)^2 \operatorname{sen} 30° + (-46240) \cos 30°]/3163 = -12.60$$

Éstas son las coordenadas de un punto sobre la envolvente limitante (figura E13.14e). La envolvente elíptica está limitada en la dirección α por $r_{\alpha o} = 3163$. Esta cota será tangente a la envolvente en el punto (3658, −12.60). Sin embargo, esta afirmación no puede comprobarse en la figura E13.14e porque las escalas a lo largo de los ejes r_a y r_b no son iguales, lo que ocasiona una distorsión de los ángulos. Al repetir estos cálculos para un gran número de valores de α, se llega a la elipse limitante (figura E13.14e).

13.11 RESPUESTA MÁXIMA A MOVIMIENTOS DEL TERRENO CON VARIOS COMPONENTES

El movimiento del terreno en un sitio se define mediante seis componentes: la traslación a lo largo de los ejes ortogonales, x, y y z, y las rotaciones alrededor de dichos ejes; los ejes x y y son horizontales y el eje z es vertical. Aquí se considerarán solamente los tres componentes traslacionales porque éstos son los únicos componentes registrados durante los sismos. Suponga que los ejes x, y y z coinciden con los ejes que definen la estructura. La respuesta dinámica de la estructura a un componente del movimiento del terreno, dentro de su intervalo elástico lineal de comportamiento, puede determinarse mediante el procedimiento de análisis de la historia de la respuesta (capítulo 13, parte A); y la respuesta combinada de los tres componentes actuando al mismo tiempo se obtiene por superposición.

¿Cómo puede determinarse la respuesta combinada en el contexto del procedimiento del análisis del espectro de respuesta presentado en la sección 13.7? El procedimiento análisis del espectro de respuesta proporciona una estimación de los valores máximos de las respuestas a los componentes individuales de excitación. Si se reconoce que estos picos no suelen producirse al mismo tiempo, se presenta una regla para combinar los tres picos individuales a fin de estimar la respuesta máxima al movimiento del terreno con varios componentes. Para ello, es necesario primero presentar el concepto de los ejes principales del movimiento del terreno, que a su vez requiere una terminología y definiciones nuevas.

13.11.1 Excitación sísmica

Considere tres componentes ortogonales (x, y y z) de una aceleración del terreno registrada $a_x(t)$,[†] $a_y(t)$ y $a_z(t)$ y defina la matriz de covarianza μ de 3 × 3 mediante sus elementos:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{t_d}\int_0^{t_d} a_i(t)a_j(t)\,dt \qquad i, j = x, y, z \tag{13.11.1}$$

donde t_d es la duración del movimiento del terreno. Los términos diagonales de esta matriz representan las intensidades cuadradas medias de los tres componentes, y los términos fuera de la diagonal representan las correlaciones cruzadas entre los pares de componentes. En general, μ_{ij} para $i \neq j$ es distinto de cero y se dice que los componentes están correlacionados.

Los investigadores han desarrollado tres conceptos: en primer lugar, el movimiento del terreno puede transformarse en un nuevo conjunto ortogonal de ejes 1, 2, y 3 de tal manera que las aceleraciones del terreno $a_1(t)$, $a_2(t)$ y $a_3(t)$ en dirección de estos ejes no estén correlacionados; es decir, $\mu_{ij} = 0$, $i \neq j$, donde $i, j = 1, 2, 3$; la matriz de covarianza correspondiente es, obviamente, una matriz diagonal. En segundo lugar, estos ejes se definen como los *ejes principales del movimiento del terreno*. Si se ordenan los componentes de inicio de mayor a menor intensidad cuadrada media, es decir, $\mu_{11} > \mu_{22} > \mu_{33}$, $a_1(t)$ se denomina el componente principal mayor, $a_2(t)$ el componente principal intermedio y $a_3(t)$ el componente principal menor. En tercer lugar, el eje principal mayor es horizontal y se dirige aproximadamente hacia el epicentro del sismo, el eje principal intermedio también es horizontal pero perpendicular al primero, y el eje principal menor es más o menos vertical.

[†]En esta sección la aceleración del terreno se indica mediante $a(t)$ en vez de $\ddot{u}_g(t)$, a fin de simplificar la notación.

Este modelo sencillo es razonable para los movimientos del terreno que se registran en una ubicación no muy cercana a la falla.

La excitación se define en términos de los espectros de diseño asociados con los componentes principales del movimiento del terreno. Los espectros de pseudo-aceleración se indican como $A(T_n)$ para el componente principal mayor, $\gamma\, A(T_n)$ para el componente principal intermedio, y $A_3(T_n)$ para el componente principal menor. Tenga en cuenta que los espectros de diseño en las dos direcciones horizontales tienen la misma forma pero difieren por el factor de Γ, donde $0 \leq \gamma \leq 1$, mientras que el espectro de diseño $A_3(T_n)$ para el movimiento vertical del terreno tiene una forma diferente; estos supuestos son consistentes con los espectros de respuesta de los movimientos registrados.

13.11.2 Relación de la respuesta estructural con el ángulo de incidencia

En la figura 13.11.1 se presenta un plano esquemático de una estructura con dos conjuntos de ejes: uno (ejes 1 y 2) que define las direcciones principales del movimiento del terreno, y el otro (ejes x y y) que define la estructura; tanto el tercer eje para la estructura (eje z), como el eje principal menor (eje 3) para el movimiento del terreno, son verticales. La orientación relativa de los dos sistemas de coordenadas se define por el ángulo θ entre los dos conjuntos de ejes horizontales. θ se define como el *ángulo de incidencia de las ondas sísmicas* y se considera que es positivo en el sentido antihorario. Como es natural, los componentes del movimiento del terreno en dirección de los ejes estructurales están correlacionados.

Considere una cantidad de respuesta $r(t)$ que puede expresarse como una combinación lineal de los desplazamientos estructurales. Se ha desarrollado la regla CQC3 para estimar el valor máximo r_o de la respuesta combinada, debido a la aplicación simultánea de los componentes principales del movimiento del terreno. Esta regla proporciona la respuesta máxima como una función del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas y se presenta sin la deducción correspondiente:

$$r(\theta) \simeq \left\{ \left[r_x^2 + (\gamma r_y)^2\right] \cos^2\theta + \left[(\gamma r_x)^2 + r_y^2\right] \operatorname{sen}^2\theta + 2(1-\gamma^2) r_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + r_z^2 \right\}^{1/2} \tag{13.11.2}$$

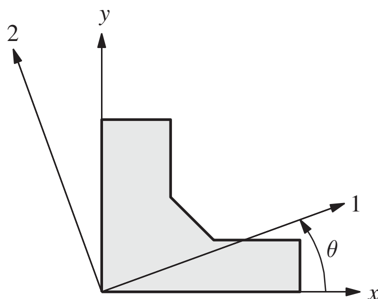


Figura 13.11.1 Orientación relativa de dos sistemas de coordenadas; ejes estructurales x, y y z; y ejes principales 1, 2 y 3 del movimiento del terreno (los ejes verticales z y 3 no se muestran).

donde el subíndice "o" que indica el valor máximo se ha descartado y r_x es la respuesta máxima a un solo componente del movimiento del terreno, definido mediante el espectro $A(T_n)$ del componente principal mayor, aplicado en dirección del eje estructural x; r_y es la respuesta máxima a un solo componente del movimiento del terreno, definido por el espectro $A(T_n)$, aplicado en dirección del eje estructural y; r_z es igual a la respuesta máxima para el movimiento vertical del terreno, definido mediante el espectro $A_z(T_n)$. Observe que r_y no es la respuesta real al componente principal intermedio del movimiento del terreno, que se definió mediante el espectro $\gamma A(T_n)$; r_y es igual a la respuesta real dividida entre γ. Si las intensidades de los dos componentes horizontales del movimiento del terreno son iguales; es decir, si $\gamma = 1$, puede verse fácilmente a partir de la ecuación (13.11.2) que la respuesta máxima es independiente del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas θ. Sin embargo, los movimientos del terreno registrados no son compatibles con la hipótesis de $\gamma = 1$.

La respuesta máxima r_k a un componente individual del movimiento del terreno está dada por la regla CQC (vea la ecuación 13.7.4):

$$r_k \simeq \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \rho_{in} r_{ik} r_{nk} \right)^{1/2} \qquad k = x, y, z \tag{13.11.3}$$

donde r_{nk} es la respuesta máxima debida al n-ésimo modo natural de vibración y ρ_{in} es el coeficiente de correlación modal para los modos i y n; observe que el primer subíndice en r_{nk} indica el número de modo y el segundo se refiere a la dirección de aplicación del movimiento del terreno. Si se reescribe la ecuación (13.7.1),

$$r_{nk} = r_{nk}^{\text{st}} A_{nk} \tag{13.11.4}$$

donde r_{nk}^{st} es la n-ésima respuesta estática modal y A_{nk} es la ordenada del espectro de pseudo-aceleración en el período del n-ésimo modo, ambos asociados con la dirección k para aplicar el movimiento del terreno. El término r_{xy} de la ecuación (13.11.2) es un término cruzado entre las respuestas modales que contribuyen a r_x y r_y, la cual surge de la correlación entre los componentes del movimiento de terreno en dirección de los ejes estructurales:

$$r_{xy} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \rho_{in} r_{ix} r_{ny} \tag{13.11.5}$$

Observe que r_{xy} implica a los mismos términos que entran en la ecuación (13.11.3) para las respuestas máximas r_x y r_y, pero involucra las respuestas modales a los dos componentes del movimiento del terreno.

Si las frecuencias de vibración natural de los modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta están muy separadas, los coeficientes de correlación modal $\rho_{in} \simeq 0$ para $i \neq n$, y r_k puede determinarse mediante la simple regla de combinación modal SRSS (ecuación 13.7.3):

$$r_k \simeq \left(\sum_{n=1}^{N} r_{nk}^2 \right)^{1/2} \tag{13.11.6}$$

De manera similar, la ecuación (13.11.5) se simplifica como

$$r_k \simeq \sum_{n=1}^{N} r_{nx} r_{ny} \tag{13.11.7}$$

donde se ha utilizado la propiedad de que $\rho_{in} = 1$ para $i = n$.

13.11.3 Respuesta crítica

La *respuesta crítica* r_{cr} se define como la mayor de las respuestas $r(\theta)$ para todos los ángulos posibles de incidencia de las ondas sísmicas θ. Es de interés porque, en las situaciones prácticas, no se conoce la ubicación del epicentro del sismo, por lo que θ es desconocido. Al diferenciar la ecuación (13.11.2) con respecto a θ y al igualar la derivada a cero, se obtiene el *ángulo crítico de incidencia*:

$$\theta_{cr} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2r_{xy}}{r_x^2 - r_y^2} \right) \tag{13.11.8}$$

Esta ecuación conduce a dos valores de θ entre 0 y π rad, correspondientes a los valores máximo y mínimo de $r(\theta)$: $r_{máx}$ y $r_{mín}$; los dos valores de θ están separados por $\pi/2$ rad. Observe que θ_{cr} es independiente de la relación de intensidad γ entre los componentes horizontales del movimiento del terreno y no está influenciado por el componente vertical del movimiento del terreno.

Los valores numéricos de $r_{máx}$ y $r_{mín}$ pueden determinarse al sustituir los dos valores numéricos de θ_{cr} obtenidos a partir de la ecuación (13.11.8) en la ecuación (13.11.2). Sin embargo, es posible deducir ecuaciones explícitas para $r_{máx}$ y $r_{mín}$, y la de la respuesta máxima es

$$r_{cr} \equiv r_{máx} \simeq \left[(1+\gamma^2)\left(\frac{r_x^2 + r_y^2}{2}\right) + (1-\gamma^2)\sqrt{\left(\frac{r_x^2 - r_y^2}{2}\right)^2 + r_{xy}^2} + r_z^2 \right]^{1/2} \tag{13.11.9}$$

Por lo tanto, la estimación CQC3 de la respuesta crítica se ha expresado en términos de la respuestas máxima r_x y r_y para el componente principal mayor del movimiento de terreno, caracterizado por el espectro de diseño $A(T_n)$, aplicado en dirección de los ejes x y y de la estructura, respectivamente; la respuesta máxima r_z a la componente vertical del movimiento del terreno, caracterizado por el espectro de diseño $A_z(T_n)$; y el término transversal r_{xy} que surge de la correlación entre los componentes del movimiento del terreno en dirección de los ejes estructurales.

13.11.4 Otras reglas de combinación con varios componentes

Si los ejes principales del movimiento del terreno coinciden con los ejes estructurales, la respuesta está dada por la ecuación (13.11.2) con $\theta = 0$ si el eje principal mayor está orientado en la dirección x y con $\theta = \pi/2$ rad si el eje principal mayor está orientado en la dirección y:

$$r(0) = \left[r_x^2 + (\gamma r_y)^2 + r_z^2\right]^{1/2} \qquad r(\pi/2) = \left[(\gamma r_x)^2 + r_y^2 + r_z^2\right]^{1/2} \tag{13.11.10}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, la respuesta máxima total está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas máximas a los componentes individuales del

movimiento del terreno. Aunque el espectro de diseño para el componente y es menos intenso que el del componente x por el factor $\gamma < 1$, r_y puede ser más grande que r_x, dependiendo de los valores relativos de las respuestas estáticas modales asociadas con los dos componentes; vea la ecuación (13.11.4). Por lo tanto, la regla SRSS se define como

$$r_{\text{cr}} \simeq \text{máx}[r\,(0)\,,\, r\,(\pi/2)] \tag{13.11.11}$$

Si los dos componentes horizontales del movimiento del terreno son iguales en intensidad, es decir, si $\gamma = 1$, la regla CQC3 (ecuación 13.11.2) se reduce a la regla SRSS:

$$r_{\text{cr}} \simeq \left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2\right)^{1/2} \tag{13.11.12}$$

Observe que la ecuación (13.11.12) es la misma que la ecuación (13.11.11), especificada para $\gamma = 1$. Algunos códigos de construcción definen el mismo espectro de diseño para ambos componentes horizontales del movimiento del terreno y especifican la regla SRSS para determinar la respuesta máxima a una excitación con varios componentes.

En algunos códigos de construcción también se incluye una regla porcentual para determinar la respuesta máxima a una excitación con varios componentes. Esta regla también se basa en el supuesto de que los ejes principales del movimiento del terreno coinciden con los ejes estructurales, y que ambos componentes horizontales del movimiento del terreno tienen la misma intensidad. De acuerdo con esta regla, r_{cr} se estima como la suma de la respuesta debida a la excitación en una dirección y una fracción, α por ciento, de las respuestas debido a las excitaciones en las otras dos direcciones. El diseño estructural se basa en la combinación que produce la mayor estimación de la respuesta total. Por lo tanto, deben considerarse tres casos:

$$r_{\text{cr}} \simeq \text{máx}[r_x + \alpha r_y + \alpha r_z, \quad \alpha r_x + r_y + \alpha r_z, \quad \alpha r_x + \alpha r_y + r_z] \tag{13.11.13}$$

Algunos códigos de diseño especifican $\alpha = 30\%$, mientras que en otros se indica $\alpha = 40\%$.

13.11.5 Ejemplo: sistema tridimensional

Los procedimientos de análisis que se presentaron en las secciones anteriores se aplican para un sistema tridimensional simple sometido a dos componentes horizontales del movimiento del terreno, los cuales se aplican al mismo tiempo. Los valores máximos de las cantidades de respuesta seleccionadas se estiman mediante las diversas reglas de combinación para componentes múltiples. Los resultados que se presentan están acompañados de comentarios de interpretación que deben ayudar a comprender estas reglas.

Sistema y excitación. La tubería tridimensional de la figura E13.11.2 está hecha de tubos de acero con un diámetro estándar nominal de 3 pulg. Sus propiedades son $I = 3.017$ pulg^4, $J = 6.034$ pulg^4, $E = 30{,}000$ ksi, $G = 12{,}000$ ksi, $m = 1.0$ kips/g, y $L = 36$ pulg. Este sistema se somete a un movimiento sísmico horizontal definido por sus dos componentes principales, caracterizadas por $A(T_n)$ y $\gamma A(T_n)$, $0 \le \gamma \le 1$, respectivamente; $A(T_n)$ es el espectro de diseño de la figura 6.9.5 ($\zeta = 5\%$) escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g.

Respuesta a los componentes individuales. Las cantidades de respuesta seleccionadas son los momentos flexionantes sobre los ejes x y y y el par de torsión en el extremo fijo a de la tubería. Las respuestas máximas debidas a un solo componente del movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño $A(T_n)$, que se aplica primero

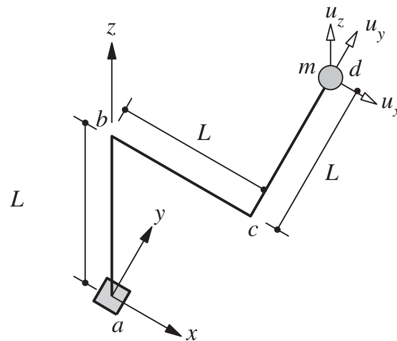


Figura E13.11.2

en dirección del eje x y posteriormente en dirección del eje y, se determinan mediante el procedimiento análisis del espectro de respuesta de la sección 13.7. Estos cálculos no se presentan con detalle (se dejan para que el lector los realice en problemas como el 13.59 y el 13.60), pero los resultados sobresalientes necesarios para determinar la respuesta a la excitación con componentes múltiples se resumen a continuación.

Los coeficientes de correlación modal ρ_{in} son necesarios en la ecuación (13.11.3) para estimar la respuesta máxima a los componentes individuales del movimiento del terreno. Por ello, es necesario calcular las relaciones de frecuencia $\beta_{in} = \omega_i/\omega_n$ a partir de las frecuencias naturales ω_n = 13.24, 13.66 y 49.59 rad/s. Los valores correspondientes de ρ_{in}, calculados con la ecuación (13.7.10) y $\zeta = 0.05$, se presentan en la tabla 13.11.1.

TABLA 13.11.1 COEFICIENTES DE CORRELACIÓN MODAL ρ_{in}

Modo, i	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	1	0.909	0.006
2	0.909	1	0.007
3	0.006	0.007	1

En la tabla 13.11.2 se presentan las respuestas modales máximas para M_x, M_y y T_z, dadas por los términos individuales de la ecuación (13.11.3), junto con la estimación CQC (ecuación 13.11.3) del valor máximo de la respuesta combinada

TABLA 13.11.2 RESPUESTAS MODALES MÁXIMAS Y ESTIMACIÓN CQC (KIP-PULG)

Excitación	Dirección x			Dirección y		
Modo	M_x	M_y	T_z	M_x	M_y	T_z
1	−1.509	−17.725	19.234	0.956	11.235	−12.191
2	−5.228	2.804	2.424	9.721	−5.214	−4.507
3	6.737	−4.591	−2.146	8.835	−6.021	−2.814
CQC	9.421	15.925	21.555	13.842	9.097	16.653

Término cruzado r_{xy}. Los cálculos posteriores se ilustran para M_x, es decir, $r \equiv M_x$. La tabla 13.11.3 da r_x = 9.421 kips-pulg y r_y = 13.842 kips-pulg. Para determinar el término

cruzado que se define mediante la ecuación (13.11.5), en la tabla 13.11.3 se presentan los nueve términos de la doble sumatoria, calculados utilizando los valores conocidos de ρ_{in}, r_{ix} y r_{ny}.

TABLA 13.11.3 TÉRMINOS INDIVIDUALES EN LA ECUACIÓN (13.11.5)

Modo, *i*	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	−1.443	−13.333	−0.081
2	−4.543	−50.821	−0.305
3	0.039	0.432	59.521

Al sumar los nueve términos se obtiene $r_{xy} = -10.538$.

Relación de la respuesta con el ángulo de incidencia. Ahora que r_x, r_y y r_{xy} son conocidos, pueden sustituirse en la ecuación (13.11.2) para obtener la respuesta como una función del ángulo de incidencia; por ejemplo, para $\theta = \pi/4$ y $\gamma = 0.67$, $r(\pi/4) = 14.046$. Estos cálculos se repiten para muchos valores de θ a fin de obtener M_x como una función de θ para cuatro valores de γ. Si se aplican cálculos similares es posible obtener M_y y T_z como funciones de θ.

Los momentos flexionantes M_x y M_y y el par de torsión T_z, calculados mediante la regla CQC3, se presentan en la figura 13.11.3 para todas las posibles orientaciones θ de los ejes principales del movimiento del terreno, en relación con los ejes estructurales. Estos resultados para cuatro valores de γ permiten las siguientes observaciones: (1) la estimación CQC3 de la respuesta máxima varía moderadamente con θ, como lo hace para los valores más pequeños de γ; y (2) para el caso límite de $\gamma = 1$, la estimación CQC3 es independiente de θ, una confirmación numérica de la observación anterior surgida de la ecuación (13.11.2).

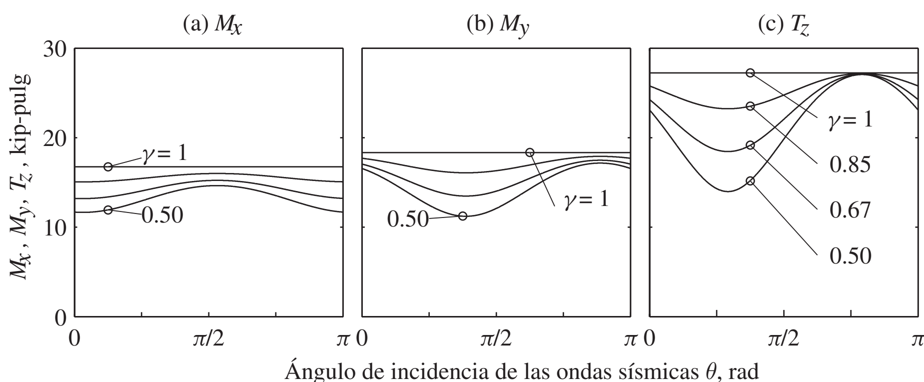


Figura 13.11.3 Respuestas máximas M_x, M_y y T_z para todas las orientaciones de los ejes principales del movimiento del terreno.

Respuesta crítica. Al sustituir $r_x = 9.421$, $r_y = 13.842$, $r_{xy} = -10.538$ y $\gamma = 0.67$ en la ecuación (13.11.9), se obtiene $r_{cr} = 15.232$ kips-pulg. Éste es el valor crítico de M_x (figura 13.11.3); es decir, el valor más grande de M_x sobre todos los posibles ángulos de incidencia θ; el ángulo crítico de incidencia $\theta_{cr} = 95.8°$ se calcula a partir de la ecuación (13.11.8).

Comparación de las reglas CQC3 y SRSS. Las estimaciones de los valores críticos de M_x, M_y y T_z obtenidas con las reglas CQC3 y SRSS se presentan en la tabla 13.11.4 para cuatro valores de γ. La estimación CQC3 se obtiene, como se ilustró con anterioridad, para M_x con $\gamma = 0.67$. La estimación SRSS se obtiene usando las ecuaciones (13.11.10) y (13.11.11), como se ilustra a continuación para la respuesta M_x, es decir, $r \equiv M_x$. Si se sustituye $r_x = 9.421$, $r_y = 13.842$ y $\gamma = 0.67$ en la ecuación (13.11.10), da $r(0) = 13.220$ y $r(\pi/2) = 15.213$; de acuerdo con la ecuación (13.11.11), $r_{cr} = \text{máx}(13.220, 15.213) = 15.213$ kip-pulg.

TABLA 13.11.4 ESTIMACIONES SRSS Y CQC3 DE LA RESPUESTA CRÍTICA

Relación de intensidad γ	M_x (kip-pulg)		M_y (kip-pulg)		T_z (kip-pulg)	
	SRSS	CQC3	SRSS	CQC3	SRSS	CQC3
0.5	14.62	14.65	16.56	17.16	23.11	27.05
0.67	15.21	15.23	17.05	17.48	24.27	27.10
0.85	15.99	16.00	17.70	17.91	25.79	27.17
1	16.74	16.74	18.34	18.34	27.24	27.24

Observe que la estimación SRSS es menor que la estimación CQC3 para todas las cantidades de respuesta y para todos los valores de $\gamma < 1$; en el caso límite de $\gamma = 1$, las dos estimaciones son idénticas.

Comentarios sobre las reglas SRSS y porcentual en los códigos de construcción. En primer lugar, se ilustra la estimación del valor crítico de la respuesta M_x de acuerdo con las reglas SRSS y porcentual especificadas en los códigos de construcción, que se basan en el supuesto de que $\gamma = 1$. Al sustituir $r_x = 9.421$ y $r_y = 13.842$ (y al omitir el término r_z) en la ecuación (13.11.12), se obtiene la estimación SRSS de $r_{cr} = 16.744$ kip-pulg. De acuerdo con la regla porcentual, el valor crítico de la respuesta se estima a partir de la ecuación (13.11.13). Si se sustituye $r_x = 9.421$ y $r_y = 13.842$, la regla del 30% da $r_{cr} = \text{máx}(16.668, 13.573) = 16.668$ kip-pulg y la regla del 40% da $r_{cr} = \text{máx}(17.610, 14.958) = 17.610$ kip-pulg.

Los valores críticos de M_x, M_y y T_z estimados mediante las reglas SRSS y porcentual en los códigos de construcción se presentan en la tabla 13.11.5, junto con la estimación CQC3 (a partir de la tabla 13.11.4); esta última varía con γ. La comparación de estas estimaciones permite realizar las siguientes observaciones: para las tres cantidades de respuesta, la

TABLA 13.11.5 ESTIMACIONES DE LA RESPUESTA CRÍTICA CON CÓDIGO DE CONSTRUCCIÓN Y CQC3

	M_x (kip-pulg)				M_y (kip-pulg)				T_z (kip-pulg)			
γ	CQC3	SRSS	Regla del 40%	Regla del 30%	CQC3	SRSS	Regla del 40%	Regla del 30%	CQC3	SRSS	Regla del 40%	Regla del 30%
0.5	14.65				17.16				27.05			
0.67	15.23				17.48				27.10			
0.85	16.00				17.91				27.17			
1.0	16.74	16.74	17.61	16.67	18.34	18.34	19.56	18.65	27.24	27.24	28.22	26.55

estimación SRSS del valor crítico de la respuesta (con $\gamma = 1$) excede la estimación CQC3 para todos los valores de γ, con excepción de $\gamma = 1$ cuando las dos son idénticas. Esta sobreestimación aumenta a medida que disminuye γ. Los comentarios anteriores también se aplican a la estimación de la respuesta crítica determinada por la regla del 40%, que es aún más conservadora que la regla SRSS. En contraste, la regla del 30% puede o no ser conservadora, dependiendo de la cantidad de respuesta de interés y de γ.

13.11.6 ENVOLVENTE PARA RESPUESTAS SIMULTÁNEAS BASADA EN EL ESPECTRO DE RESPUESTA

En la sección 13.10 se presentó una envolvente basada en el espectro de respuesta para dos o más respuestas de una estructura excitada mediante un componente del movimiento del terreno. Los investigadores han desarrollado una envolvente elíptica de este tipo para una excitación de varios componentes cuando se conocen las direcciones principales del movimiento del terreno. Para el caso en el que las direcciones principales del movimiento del terreno no se conocen, los investigadores han desarrollado una *envolvente total* que representa la unión de las envolventes elípticas para todas las orientaciones de los ejes principales. La comparación de esta envolvente suprema para un elemento estructural contra su superficie de capacidad a fin de determinar si el elemento está bien diseñado o no, es aún más difícil de lo que se sugiere en la sección 13.10, y existen estrategias que se han desarrollado para este propósito.

LECTURAS ADICIONALES

Anastassiadis, K., Avramidis, I. E. y Panetsos, P., “Concurrent Design Forces in Structures Under Three-Component Orthotropic Seismic Excitation”, *Earthquake Spectra*, **18**, 2002, pp. 1-17.

De la Llera, J. C. y Chopra, A. K., “Evaluation of Code Accidental Torsional Provisions from Building Records”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **120**, 1994, pp. 597-616.

Der Kiureghian, A., “A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **9**, 1981, pp. 419-435.

Gupta, A. K., *Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures*, Blackwell, Cambridge, Mass, 1990.

Gupta, A. K. y Singh, M. P., “Design of Column Sections Subjected to Three Components of Earthquake”, *Nuclear Engineering and Design*, **41**, 1977, pp. 129-133.

Lopez, O. A., Chopra, A. K., y Hernandez, J. J., “Critical Response of Structures to Multicomponent Earthquake Excitation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **29**, 2000, pp. 1759-1778.

Lopez, O. A., Chopra, A. K., y Hernandez, J. J., “Evaluation of Combination Rules for Maximum Response Calculation in Multicomponent Seismic Analysis”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **30**, 2001, pp. 1379-1398.

Menun, C., “Strategies for Identifying Critical Response Combinations”, *Earthquake Spectra*, **20**, 2004, pp. 1139-1165.

Menun, C. y Der Kiureghian, A., “A Replacement for the 30%, 40%, and SRSS Rules for Multicomponent Seismic Analysis”, *Earthquake Spectra*, **14**, 1998, pp. 153-156.

Menun, C. y Der Kiureghian, A., "Envelopes for Seismic Response Vectors I: Theory", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **126**, 2000, pp. 467-473.

Menun, C. y Der Kiureghian, A., "Envelopes for Seismic Response Vectors II: Application", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **126**, 2000, pp. 474-481.

Newmark, N. M. y Rosenblueth E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, pp. 308-312.

Penzien, J. y Watabe, M., "Characteristics of 3-Dimensional Earthquake Ground Motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **3**, 1975, pp. 365-374.

Rosenblueth, E., "A Basis for Aseismic Design", Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana, Ill., 1951.

Rosenblueth, E. y Contreras, H., "Approximate Design for Multicomponent Earthquakes", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **103**, 1977, pp. 895-911.

Rosenblueth, E. y Elorduy, J., "Responses of Linear Systems to Certain Transient Disturbances", *Proceedings of the 4th World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile, Vol. I, 1969, pp. 185-196.

PROBLEMAS

Parte A: secciones 13.1-13.4

13.1 Para el marco de cortante de dos niveles de la figura P13.1 (también de los problemas de 9.5 y 10.6), excitado por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine **(a)** la expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas, **(b)** la respuesta de desplazamiento de los niveles en términos de $D_n(t)$, **(c)** la respuesta del cortante de entrepiso en términos de $A_n(t)$ y **(d)** los momentos de volteo en el primer nivel y en la base en términos de $A_n(t)$.

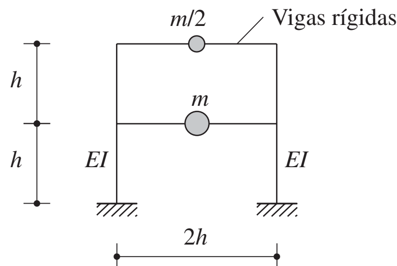


Figura P13.1

***13.2** Se desea calcular la respuesta del marco de cortante de dos niveles de la figura P13.1 (también de los problemas de 9.5 y 10.6) al movimiento de terreno de El Centro como una función del tiempo. Las propiedades del marco son $h = 12$ pies, $m = 100$ kips/g, $I = 727$ pulg^4, $E = 29{,}000$ ksi y $\zeta_n = 5\%$. Los datos de la aceleración del terreno están disponibles en el apéndice 6 en cada $\Delta t = 0.02$ s.

(a) Determine las respuestas $D_n(t)$ y $A_n(t)$ del sistema de 1GDL utilizando el método numérico en el tiempo paso a paso de su elección con un Δt adecuado; grafique $D_n(t)$ y $A_n(t)$.

(b) Para cada modo natural calcule las siguientes cantidades de respuesta como una función del tiempo: (i) los desplazamientos en cada nivel, (ii) los cortantes por entrepiso y (iii) los momentos de volteo en la base y en cada nivel.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(c) Para cada instante de tiempo combine las contribuciones modales a cada una de las cantidades de respuesta con el fin de obtener la respuesta total; determine el valor máximo de las respuestas totales. Para las cantidades de respuesta seleccionadas grafique las respuestas modales y la respuesta total como una función del tiempo.

13.3 Determine las masas modales efectivas y las alturas modales efectivas para el marco de cortante de dos niveles de la figura P13.1 (también de los problemas de 9.5 y 10.6), la altura de cada nivel es h. Despliegue esta información sobre los sistemas de 1GDL para los modos. Verifique se satisfagan las ecuaciones (13.2.14) y (13.2.17).

***13.4** En la figura P13.4 se muestra un marco de dos niveles (el mismo que en los problemas 9.6 y 10.10) con rigidez a la flexión EI en las vigas y columnas. Determine la respuesta dinámica de esta estructura al movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Exprese **(a)** los desplazamientos de cada nivel y las rotaciones de los nudos en términos de $D_n(t)$ y **(b)** los momentos flexionantes en una columna del primer entrepiso y en la viga del segundo nivel en términos de $A_n(t)$.

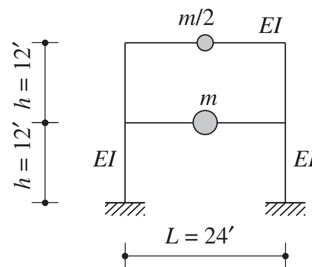


Figura P13.4

13.5-13.6 Para los marcos de cortante de tres niveles que se muestran en las figuras P13.5 y P13.6 (también en los problemas 9.7–9.8 y 10.11 −10.12), excitados por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine **(a)** la expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas, **(b)** la respuesta de desplazamiento de los niveles en términos de $D_n(t)$, **(c)** la respuesta del cortante de entrepiso en términos de A_n(t), y **(d)** el momento de volteo en la base en términos de $A_n(t)$.

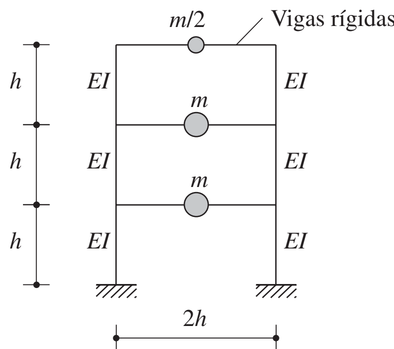


Figura P13.5

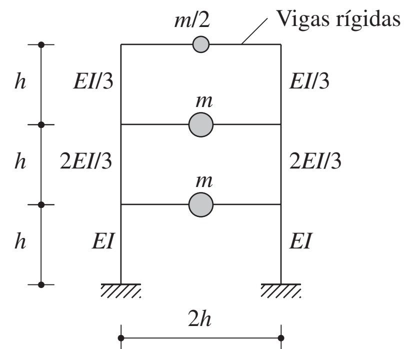


Figura P13.6

***13.7-13.8** Se desea calcular la respuesta de los marcos de cortante de tres niveles de las figuras P13.5-P13.6 (también de los problemas 9.7-9.8 y 10.11-10.12) al movimiento del terreno de El Centro como una función del tiempo. Las propiedades de los marcos son h = 12 pies, m = 100 kips/g, I = 1,400 pulg^4, E = 29,000 ksi y ζ_n = 5%. Los datos de aceleración del terreno se encuentran en el apéndice 6 en cada Δt = 0.02 s.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(a) Determine las respuestas $D_n(t)$ y $A_n(t)$ del sistema de 1GDL utilizando el método numérico en el tiempo paso a paso de su elección con un Δt adecuado; grafique $D_n(t)$ y $A_n(t)$.
(b) Para cada modo natural calcule las siguientes cantidades de respuesta como una función del tiempo: (i) los desplazamientos en cada nivel, (ii) los cortantes por entrepiso y (iii) el momento de volteo en la base.
(c) Para cada instante de tiempo combine las contribuciones modales a cada una de las cantidades de respuesta con el fin de obtener la respuesta total; determine el valor máximo de las respuestas totales. Para las cantidades de respuesta seleccionadas, grafique las respuestas modales y la respuesta total como una función del tiempo.

13.9-13.10 Determine las masas modales efectivas y las alturas modales efectivas para los marcos de cortante de tres niveles de las figuras P13.5 y P13.6, la altura de cada nivel es h. Despliegue esta información sobre los sistemas de 1GDL para los modos. Verifique que se cumplan las ecuaciones (13.2.14) y (13.2.17).

***13.11-13.14** Las figuras P13.11 a P13.14 muestran marcos de tres niveles (iguales a los marcos de los problemas 9.9 a 9.12 y 10.19 a 10.22) junto con la rigidez a la flexión de las vigas y columnas.

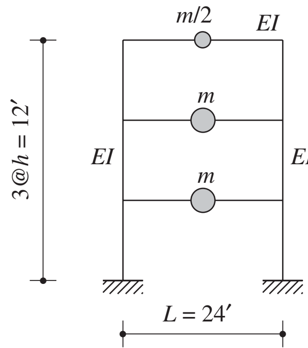


Figura P13.11

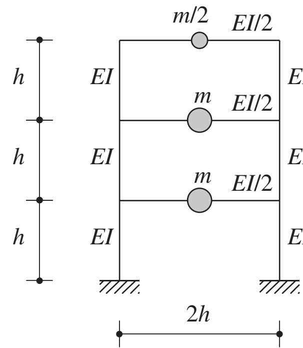


Figura P13.12

Determine la respuesta dinámica de este marco de tres niveles al movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Exprese **(a)** los desplazamientos de cada nivel y las rotaciones en los nudos en términos de $D_n(t)$ y **(b)** los momentos flexionantes en una columna del primer entrepiso y en la viga del segundo nivel en términos de $A_n(t)$.

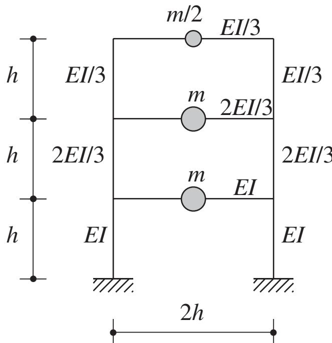


Figura P13.13

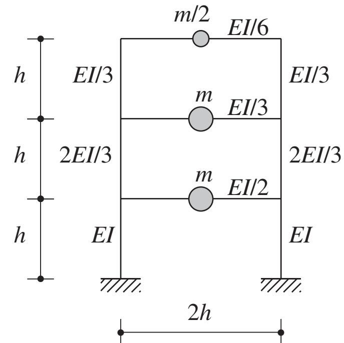


Figura P13.14

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

13.15 Para el marco en forma de L invertida de la figura E9.6a, excitado por el movimiento vertical del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine **(a)** la expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas, **(b)** la respuesta de desplazamiento en términos de $D_n(t)$ y **(c)** el momento flexionante en la base de la columna en términos de $A_n(t)$.

13.16 Resuelva el problema 13.15 para el movimiento del terreno que se muestra en la figura P13.16.

***13.17** Para la estructura en forma de paraguas de la figura P13.17 (también de los problemas 9.13 y 10.23), excitada por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine **(a)** la expansión modal de las fuerzas sísmicas efectivas, **(b)** la respuesta de desplazamiento en términos de $D_n(t)$ y **(c)** los momentos flexionantes en la base de la columna y en la ubicación *a* de la viga en términos de $A_n(t)$.

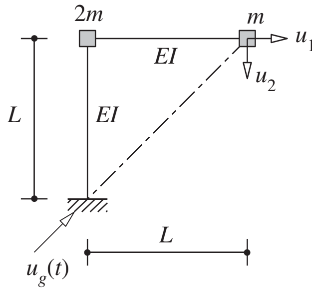


Figura P13.16

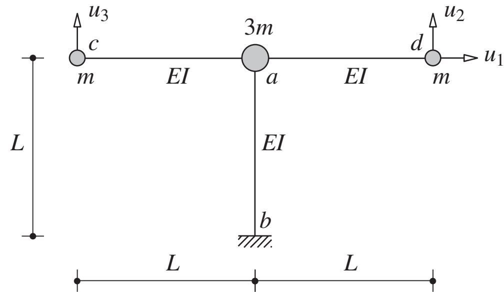


Figura P13.17

***13.18** Resuelva el problema 13.17 para un movimiento vertical del terreno.

***13.19** Resuelva el problema 13.17 para un movimiento del terreno en la dirección *b*-*d*.

***13.20** Resuelva el problema 13.17 para un movimiento del terreno en la dirección *b*-*c*.

***13.21** Resuelva el problema 13.17 para un movimiento rotacional del terreno en el plano de la estructura (cabeceo).

***13.22** En la figura P13.22 se muestra una torre en voladizo con tres masas concentradas y sus propiedades de rigidez a la flexión; $m = 0.486$ kip-s^2/pulg, $EI/L^3 = 56.26$ kips/pulg y $EI'/L^3 = 0.0064$ kip/pulg. Tenga en cuenta que la masa superior y su elemento de apoyo son un apéndice de la torre principal. El amortiguamiento se define mediante fracciones de amortiguamiento modal, con $\zeta_n = 5\%$ para todos los modos.

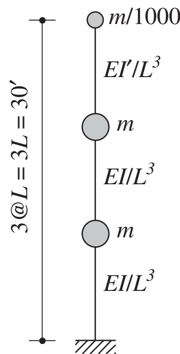


Figura P13.22

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(a) Determine los periodos y los modos de vibración naturales; dibuje los modos.

(b) Expanda las fuerzas sísmicas efectivas en sus componentes modales y muestre esta expansión de forma gráfica.

(c) Calcule las respuestas estáticas modales para tres cantidades: (i) el desplazamiento de la masa del apéndice, (ii) la fuerza cortante basal del apéndice y (iii) la fuerza cortante basal de la torre.

(d) ¿Qué puede predecirse sobre los valores relativos de las contribuciones modales a cada cantidad de respuesta a partir de los resultados de los incisos (a) y (c)?

***13.23** Se desea calcular la respuesta de la torre con apéndice de la figura P13.22 al movimiento del terreno de El Centro como una función del tiempo. La aceleración del terreno está disponible en el apéndice 6 en cada $\Delta t = 0.02$ s. El amortiguamiento de la estructura está definido mediante fracciones de amortiguamiento modal con $\zeta_n = 5\%$ para todos los modos.

(a) Determine las respuestas $D_n(t)$ y $A_n(t)$ del sistema de 1GDL utilizando el método numérico en el tiempo paso a paso de su elección con un Δt adecuado.

(b) Para cada modo de vibración calcule y grafique como una función del tiempo las siguientes cantidades de respuesta: (i) el desplazamiento de la masa del apéndice, (ii) la fuerza cortante en el apéndice y (iii) la fuerza cortante basal de la torre. Determine el valor máximo de cada respuesta modal.

(c) Calcule y grafique como una función del tiempo los valores totales de las tres cantidades de respuesta determinadas en el inciso (b); determine los valores máximos de las respuestas totales.

(d) Calcule los coeficientes sísmicos (definidos como la fuerza cortante normalizada mediante el peso) para el apéndice y la torre. ¿Por qué el coeficiente sísmico para el apéndice es mucho más grande que para la torre?

13.24 El sistema de un solo nivel con planta asimétrica de la figura P13.24 (igual al definido en el problema 9.14, para el que las frecuencias y los modos naturales de vibración debieron determinarse en el problema 10.24) está excitado por el movimiento del terreno $\ddot{u}_{gy}(t)$ en la dirección y. Formule las ecuaciones de movimiento para este sistema de tres grados de libertad y:

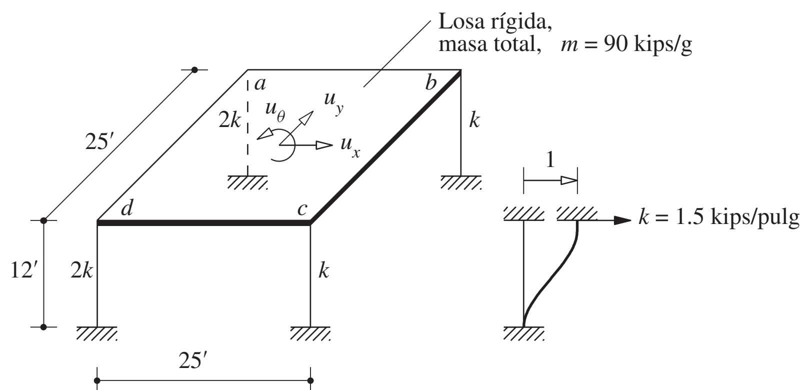


Figura P13.24

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(a) Expanda las fuerzas sísmicas efectivas en términos de sus componentes modales y muestre esta expansión en una gráfica.
(b) Verifique la satisfacción de la ecuación (13.3.9), generalizada a partir de un sistema de 2N grado de libertad como un sistema de 3N grados de libertad.
(c) Determine el desplazamiento u_y y la rotación u_θ de la losa en términos de $D_n(t)$.
(d) Determine el cortante y el par de torsión basales en términos de $A_n(t)$.

13.25 El sistema de un solo nivel con planta asimétrica de la figura P13.24 (igual al definido en el problema 9.14, para el que las frecuencias y los modos naturales de vibración debieron determinarse en el problema 10.24) está excitado por el movimiento $\ddot{u}_g(t)$ en dirección de la diagonal *d*-*b*. Formule las ecuaciones de movimiento para este sistema de tres grados de libertad:

(a) Expanda las fuerzas sísmicas efectivas en términos de sus componentes modales y muestre esta expansión en una gráfica.
(b) Verifique que se cumpla la ecuación (13.3.9), generalizada a partir de un sistema de 2N grados de libertad como un sistema de 3N grados de libertad.
(c) Determine el desplazamiento u_y y la rotación u_θ de la losa en términos de $D_n(t)$.
(d) Determine los componentes x y y del cortante y el par de torsión basales en términos de $A_n(t)$.

***13.26** Se desea determinar la historia de la respuesta del sistema del problema 13.24 (igual al definido en el problema 9.14, para el que las frecuencias y los modos naturales de vibración debieron determinarse en el problema 10.24) al movimiento del terreno de El Centro a lo largo de la dirección y. Además de las propiedades del sistema dadas en la figura P13.24, $\zeta_n = 5\%$ para todos los modos de vibración natural. La aceleración del terreno se encuentra en el apéndice 6 en cada $\Delta t = 0.02$ s.

(a) Determine las respuestas D_n(t) y $A_n(t)$ del sistema de 1GDL utilizando un método numérico en el tiempo paso a paso de su elección con un Δt adecuado; grafique $D_n(t)$ y $A_n(t)$.
(b) Para cada modo de vibración calcule y grafique las siguientes cantidades de respuesta como una función del tiempo: u_y, $b/2u_\theta$, el cortante basal V_b y el par de torsión basal T_b.
(c) Calcule y grafique las respuestas totales como una función del tiempo; determine los máximos de las respuestas totales.

13.27 Para el sistema de la figura P13.27 (también de los problemas 9.18 y 10.28), sometido al movimiento del terreno en la dirección x: **(a)** expanda las fuerzas sísmicas efectivas en términos de sus componentes modales y muestre esta expansión en una gráfica, **(b)** determine los desplazamientos u_x, u_y y u_z de la masa en términos de $D_n(t)$, y **(c)** determine los momentos flexionantes alrededor de los ejes x y y, y el par de torsión en el extremo fijo a en términos de $A_n(t)$.

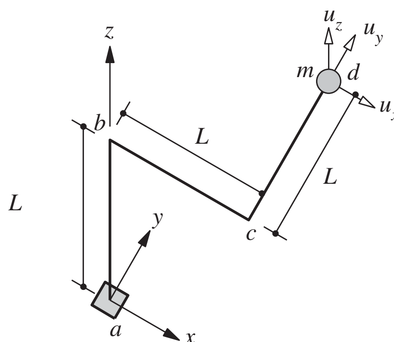


Figura P13.27

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

13.28 Resuelva el problema 13.27 para un movimiento del terreno en la dirección y.

13.29 Resuelva el problema 13.27 para un movimiento del terreno en la dirección z.

13.30 Resuelva el problema 13.27 para un movimiento del terreno en la dirección a-d.

Parte A: sección 13.5

13.31 El sistema de la figura P13.31 (y del problema 9.19) se somete a los movimientos en los apoyos $u_{g1}(t)$ y $u_{g2}(t)$. Determine el movimiento de las dos masas como una función del tiempo para dos excitaciones: **(a)** $u_{g1}(t) = -u_{g2}(t) = u_g(t)$, y **(b)** $u_{g2}(t) = u_{g1}(t) = u_g(t)$; exprese todos los resultados en términos de $D_n(t)$, la respuesta de deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$. Comente sobre la forma en que difiere la respuesta a las dos excitaciones y por qué.

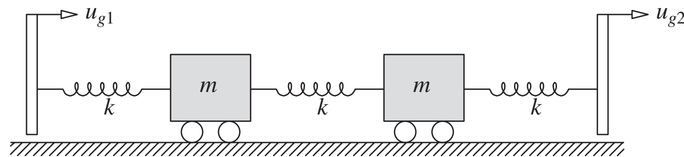


Figura P13.31

13.32 El sistema no amortiguado de la figura P13.32 (y del problema 9.20) con $L = 50$ pies, $m = 0.2$ kip-s^2/pulg y $EI = 5 \times 10^8$ kip-pulg^2, se somete a los movimientos en los apoyos $ug_1(t)$ y $u_{g2}(t)$. Determine el movimiento de estado estacionario de la masa concentrada y el valor de estado estacionario del momento flexionante en el punto medio del claro debidos a dos excitaciones armónicas: (i) $u_{g1}(t) = u_{go}$ sen ωt, $u_{g2}(t) = 0$, y (ii) $u_{g1}(t) = u_{g2}(t) = u_{go}$ sen ωt. La frecuencia de excitación ω es $0.8\omega_n$, donde ω_n es la frecuencia natural de vibración del sistema. Exprese sus resultados en términos de u_{go}. Comente sobre **(a)** las contribuciones relativas de los componentes cuasi-estáticos y dinámicos a cada cantidad de respuesta debido a la excitación de cada caso, y **(b)** la forma en que las respuestas a las dos excitaciones difieren y por qué.

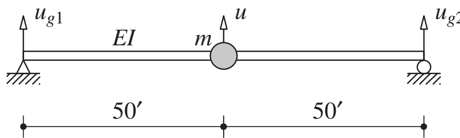


Figura P13.32

***13.33** Las ecuaciones que controlan el movimiento del sistema de la figura P9.21 debido a los movimientos en los apoyos se formularon en el problema 9.21.

(a) El apoyo a se somete a un movimiento $u_g(t)$ en la dirección x y el apoyo b experimenta el mismo movimiento, pero t' segundos más tarde. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: (i) los desplazamientos u_1 y u_2 de las válvulas, y (ii) los momentos flexionantes en a, b, c, d y e. Exprese los desplazamientos en términos de $u_g(t)$ y $D_n(t)$, y las fuerzas en términos de $u_g(t)$ y $A_n(t)$, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son las respuestas de deformación y pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

(b) Compare los resultados anteriores con la respuesta del sistema si ambos apoyos se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$. Comente sobre la forma en que difieren las respuestas en los dos casos y por qué.

***13.34** Las ecuaciones que controlan el movimiento del sistema de la figura P9.22 debido a los movimientos del terreno variables en el espacio en la dirección x se formularon en el problema 9.22.

(a) El apoyo a se somete a un movimiento $u_g(t)$ en la dirección x y el apoyo b experimenta el mismo movimiento, pero t' segundos más tarde. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: (i) los desplazamientos u_1 y u_2, y (ii) los momentos flexionantes en a, b, c, d y e. Exprese los desplazamientos en términos de $u_g(t)$ y $D_n(t)$ y las fuerzas en términos de $u_g(t)$ y $A_n(t)$, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son las respuestas de deformación y pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

(b) Compare los resultados anteriores con la respuesta del sistema si ambos soportes se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$. Comente sobre la forma en que difieren las respuestas en los dos casos y por qué.

***13.35** Para el sistema definido en el problema 9.23, las ecuaciones que controlan su movimiento debido a los movimientos del terreno variables en el espacio en la dirección x se formularon en el problema 9.23.

(a) Los apoyos de las columnas a y b se someten al movimiento $u_g(t)$ en la dirección x y los apoyos de las columnas c y d experimentan el mismo movimiento, pero t' segundos después. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: (i) los desplazamientos u_x, u_y y u_θ de la losa del techo, y (ii) el cortante en cada columna. Exprese los desplazamientos en términos de $u_g(t)$ y $D_n(t)$ y las fuerzas en términos de $u_g(t)$ y $A_n(t)$, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son las respuestas de deformación y pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

(b) Compare los resultados anteriores con la respuesta de la estructura si todas los apoyos de las columnas se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$. Comente sobre la forma en que difieren las respuestas en los dos casos y por qué.

***13.36** Para el sistema de la figura P13.24 las frecuencias y los modos de vibración se determinaron en el problema 10.24 y las ecuaciones que controlan su movimiento debido a los movimientos del terreno variables en el espacio en la dirección x se formularon en el problema 9.24.

(a) Los apoyos de las columnas a y b se someten al movimiento $u_g(t)$ en la dirección x y los apoyos de las columnas c y d experimentan el mismo movimiento, pero t' segundos después. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: (i) los desplazamientos u_x, u_y y u_θ de la losa del techo y (ii) el cortante en cada columna. Exprese los desplazamientos en términos de $u_g(t)$ y $D_n(t)$ y las fuerzas en términos de $u_g(t)$ y $A_n(t)$, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son las respuestas de deformación y pseudo-aceleración del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

(b) Compare los resultados anteriores con la respuesta de la estructura si todas los apoyos de las columnas se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$. Comente sobre la forma en que difieren las respuestas en los dos casos y por qué.

***13.37** Implemente de manera numérica la solución al problema 13.36 para el movimiento del terreno de El Centro con $t' = 0.1$ s. Además de las propiedades del sistema dadas en la figura P13.24, $\zeta_n = 5\%$ para todos los modos. La aceleración del terreno está disponible en el apéndice 6 en cada $\Delta t = 0.02$ s. Grafique (i) $D_n(t)$ y (ii) las contribuciones modales y la respuesta total para cada cantidad de respuesta. Determine los máximos de la respuesta total. Comente sobre la influencia que tienen las variaciones espaciales de la excitación.

***13.38** **(a)** En la torre para la toma de agua del problema 9.25, la base de la torre experimenta un movimiento horizontal u_g(t) y el extremo derecho del puente se somete al mismo movimiento que la base, pero lo hace t' segundos después. Determine las siguientes respuestas como una función del tiempo: (i) el desplazamiento en la parte superior de la torre, (ii) el cortante y el momento flexionante basales de la torre, y (iii) la fuerza axial en el puente. Exprese los desplazamientos

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

en términos de $D_n(t)$ y las fuerzas en términos de $A_n(t)$, donde $D_n(t)$ y $A_n(t)$ son las respuestas de deformación y pseudo-aceleración del n-ésimo modo de sistema de 1GDL a $\ddot{u}_g(t)$.

(b) Compare los resultados anteriores con la respuesta de la torre si ambos apoyos se someten a un movimiento idéntico $u_g(t)$. Comente sobre la forma en que difieren las respuestas en los dos casos y por qué.

Parte B

***13.39** En la figura P13.4 se muestra una estructura de dos niveles (la misma que en los problemas 9.6 y 10.10) con m = 100 kips/g e I = 727 pulg^4 para las vigas y columnas, y E = 29,000 ksi. Determine la respuesta de este marco al movimiento del terreno caracterizado por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con un 5% de amortiguamiento) y escalado a una aceleración máxima de $\frac{1}{3}$g. Calcule **(a)** los desplazamientos de vada nivel y (**b**) los momentos flexionantes en una columna del primer entrepiso y en la viga del segundo nivel.

13.40 El marco de cortante de dos niveles de la figura P13.1 (también de los problemas 9.5 y 10.6) tiene las siguientes propiedades: h = 12 pies, m = 100 kips/g e I = 727 pulg^4 para las columnas, E = 29,000 ksi y ζ_n = 5%. La respuesta máxima de esta estructura al movimiento del terreno de El Centro debe estimarse mediante un análisis del espectro de respuesta y compararla con los resultados del problema 13.2 donde se realiza un análisis de la historia de la respuesta. Para los propósitos de esta comparación debe implementarse el análisis del espectro de respuesta de la manera siguiente.

(**a**) Determine las ordenadas espectrales D_n y A_n para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL como los valores máximos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, respectivamente, los cuales se determinaron en el inciso (a) del problema 13.2. [Esto se hace para evitar los errores inherentes a la lectura de D_n y A_n directamente del espectro de respuesta. Sin embargo, en la aplicación usual del análisis del espectro de respuesta, $D_n(t)$ o $A_n(t)$ no estarían disponibles y D_n o An se leerían en el espectro de respuesta o de diseño].

(**b**) Para cada modo calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: (i) los desplazamientos de cada nivel, (ii) los cortantes de entrepiso y (iii) los momentos de volteo en el nivel y en la base.

(**c**) Combine las respuestas modales máximas utilizando una regla de combinación modal apropiada, a fin de obtener el valor máximo de la respuesta total para cada cantidad de respuesta determinada en el inciso (b).

(**d**) Comente sobre la exactitud de la regla de combinación modal al comparar los resultados del análisis del espectro de respuesta del inciso (c) con los resultados del análisis de la historia de la respuesta del problema 13.2.

***13.41-13.44** En las figuras P13.11 a P13.14 se muestran marcos de tres niveles (los mismos que en los problemas 9.9 a 9.12 y 10.19 a 10.22) con m = 100 kips/g, I = 1400 pulg^4, E = 29.000 ksi y h = 12'. Determine la respuesta de este marco al movimiento del terreno que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento) escalado a una aceleración máxima del terreno de $\frac{1}{3}$g. Calcule **(a)** los desplazamientos de cada nivel y **(b)** los momentos flexionantes en una columna del primer entrepiso y en la viga del segundo nivel.

13.45-13.46 Los marcos de cortante de tres niveles de las figuras P13.5 y P13.6 (también de los problemas 9.7-9.8 y 10.11-10.12) tienen las siguientes propiedades: h = 12 pies, m = 100 kips/g, I = 1400 pulg^4, E = 29,000 ksi y ζ_n = 5%. La respuesta máxima de esta estructura al movimiento del terreno de El Centro debe estimarse mediante un análisis del espectro de respuesta y compararla con los resultados de los problemas 13.7-13.8 obtenidos mediante un análisis de la

*Indica que la solución del problema requiere de una computadora.

historia de la respuesta. Para los propósitos de esta comparación debe implementarse el análisis del espectro de respuesta de la manera siguiente.

(a) Determine las ordenadas espectrales D_n y A_n para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL como los valores máximos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, respectivamente, los cuales se determinaron en el inciso (a) de los problemas 13.7-13.8. [Esto se hace para evitar los errores inherentes a la lectura de D_n y A_n directamente del espectro de respuesta. Sin embargo, en la aplicación usual del análisis del espectro de respuesta, $D_n(t)$ o $A_n(t)$ no estarían disponibles y D_n y A_n se leerían en el espectro de respuesta o de diseño].

(b) Para cada modo calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: (i) los desplazamientos de cada nivel, (ii) los cortantes de entrepiso y (iii) los momentos de volteo por nivel y en la base.

(c) Combine las respuestas modales máximas utilizando una regla de combinación modal apropiada, a fin de obtener el valor máximo de la respuesta total para cada cantidad de respuesta determinada en el inciso (b).

(d) Comente sobre la exactitud de la regla de combinación modal al comparar los resultados del análisis del espectro de respuesta del inciso (c) con los resultados del análisis de la historia de la respuesta de los problemas 13.7-13.8.

13.47 Determine la respuesta (los desplazamientos y el momento en la base) del marco en forma de L invertida de la figura E9.6a al movimiento horizontal del terreno que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5, escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g. Considere que $L = 10$ pies, $m = 1.5$ kips/g, $E = 29{,}000$ ksi e $I = 28.1$ pulg^4; el valor dado de I es para un tubo de acero estándar de 6 pulg.

13.48 Resuelva el problema 13.47 para un movimiento vertical del terreno.

13.49 Resuelva el problema 13.47 para el movimiento del terreno que se muestra en la figura P13.16.

13.50 La estructura en forma de paraguas de la figura P13.17 (también de los problemas 9.13 y 10.23) está hecha de tubos de acero con un diámetro estándar nominal de 6 pulg. Sus propiedades son $I = 28.1$ pulg^4, $E = 29{,}000$ ksi, peso $= 18.97$ lb/pie, $m = 1.5$ kips/g y $L = 10$ pies. Determine la respuesta máxima de esta estructura al movimiento horizontal del terreno que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento) escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g. Calcule **(a)** los desplazamientos u_1, u_2 y u_3, así como **(b)** los momentos flexionantes en la base de la columna y en la ubicación a de la viga. Comente sobre las diferencias entre los resultados de las reglas de combinación modal SRSS y CQC.

13.51 Resuelva el problema 13.50 si la excitación es el movimiento vertical del terreno que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento) escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g.

13.52 Resuelva el problema 13.50 si la excitación es el movimiento del terreno en la dirección b-d, que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento), escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g.

13.53 Resuelva el problema 13.50 si la excitación es el movimiento del terreno en la dirección b-c, que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento), escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g.

13.54 Se desea determinar la respuesta sísmica máxima de la torre con un apéndice de la figura P13.22. El movimiento del terreno se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento), escalado a una aceleración máxima de $\frac{1}{3}$g.

(a) Usando las reglas de combinación modal SRSS y CQC, calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: (i) el desplazamiento de la masa del apéndice, (ii) la fuerza cortante basal del apéndice y (iii) la fuerza cortante basal de la torre.

(b) Comente sobre las diferencias entre los resultados de las dos reglas de combinación modal y las razones de estas diferencias. ¿Cuál de los dos métodos es el correcto?

13.55 La respuesta máxima de la torre con apéndice de la figura P13.22 al movimiento del terreno de El Centro debe estimarse mediante un análisis del espectro de respuesta y compararse con los resultados del problema 13.23 donde se usa un análisis de la historia de la respuesta. Para los propósitos de esta comparación, debe implementarse el análisis del espectro de respuesta de la manera siguiente.

(a) Determine las ordenadas espectrales D_n y A_n para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL como los valores máximos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, respectivamente, los cuales se determinaron en el inciso (a) del problema 13.23. [Esto se hace para evitar los errores inherentes a la lectura de D_n y A_n directamente del espectro de respuesta. Sin embargo, en la aplicación usual del análisis del espectro de respuesta, $D_n(t)$ o $A_n(t)$ no estarían disponibles y D_n o A_n se leerían en el espectro de respuesta o de diseño].

(b) Para cada modo calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: (i) el desplazamiento de la masa del apéndice, (ii) la fuerza cortante en el apéndice y (iii) la fuerza cortante basal de la torre.

(c) Utilice el método CQC para combinar las respuestas modales máximas, a fin de obtener el valor máximo de cada una de las cantidades de respuesta determinadas en el inciso (b). ¿Cuál de los términos de correlación modal debe retenerse y cuál debe eliminarse de los cálculos del CQC, y por qué?

(d) Repita el inciso (c) usando el método SRSS.

(e) Comente sobre la exactitud de las reglas de combinación modal CQC y SRSS comparando los resultados del análisis del espectro de respuesta de los incisos (c) y (d) con los resultados del análisis de la historia de la respuesta para resolver el problema 13.23.

13.56 La respuesta máxima del sistema de un solo nivel con planta asimétrica de la figura P13.24, con $\zeta_n = 5\%$, debe estimarse mediante un análisis del espectro de respuesta y compararse con los resultados del problema 13.26, en el que se aplica un análisis de la historia de la respuesta. Para los propósitos de esta comparación el análisis del espectro de respuesta debe implementarse de la siguiente manera.

(a) Determine las ordenadas espectrales D_n y A_n para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL como los valores máximos de $D_n(t)$ y $A_n(t)$, respectivamente, los cuales se determinaron en el inciso (a) del problema 13.26. [Esto se hace para evitar los errores inherentes a la lectura de D_n y A_n directamente del espectro de respuesta. Sin embargo, en la aplicación usual del análisis del espectro de respuesta, $D_n(t)$ o $A_n(t)$ no estarían disponibles y D_n o A_n se leerían en el espectro de respuesta o de diseño].

(b) Para cada modo calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: u_y, $(b/2)u_\theta$, el cortante basal V_b y el par de torsión en la base T_b.

(c) Usando las reglas de combinación modal SRSS y CQC, calcule el valor máximo para cada cantidad de respuesta.

(d) Comente sobre la exactitud de los métodos SRSS y CQC al comparar los resultados del análisis del espectro de respuesta en el inciso (c) con los resultados del análisis de la historia de la respuesta en el problema 13.26.

13.57 Determine la respuesta máxima del sistema de un solo nivel con planta asimétrica de la figura P13.24 a un movimiento del terreno a lo largo de la dirección y. La excitación se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento), escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.5g:

(a) Utilizando las reglas de combinación modal SRSS y CQC calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: u_x, u_y, $b/2u_\theta$, los cortantes basales en las direcciones x y y, el par de torsión en la base y los momentos flexionantes alrededor de los ejes x y y en la base de cada columna.

(b) Comente sobre las diferencias entre los resultados de las dos reglas de combinación modal y las razones de estas diferencias. ¿Cuál de los dos métodos es exacto?

13.58 Determine la respuesta máxima del sistema de un solo nivel con planta asimétrica de la figura P13.24 a un movimiento de terreno en la dirección de la diagonal *d-b*. La excitación se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 (con 5% de amortiguamiento), escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.5g:

(a) Utilizando las reglas de combinación modal SRSS y CQC calcule los valores máximos de las siguientes cantidades de respuesta: (i) u_x, (ii) u_y, (iii) $b/2u\theta$, (iv) los cortantes basales en las direcciones x y y, y el par de torsión en la base y (v) los momentos flexionantes alrededor de los ejes x y y en la base de cada columna.

(b) Comente sobre las diferencias entre los resultados de las dos reglas de combinación modal y las razones de estas diferencias. ¿Cuál de los dos métodos es exacto?

13.59 La tubería tridimensional de la figura P13.27 está hecha de tubos de acero con un diámetro estándar nominal de 3 pulg. Sus propiedades son $I = 3.017$ pulg^4, $J = 6.034$ pulg^4, $E = 30{,}000$ ksi, $G = 12{,}000$ ksi, $m = 1.0$ kip/g y $L = 36$ pulg. Determine la respuesta máxima del sistema a un movimiento del terreno en la dirección x, que se caracteriza por el espectro de diseño de la figura 6.9.5 ($\zeta = 5\%$) escalado a una aceleración máxima del terreno de 0.20g. Utilizando las reglas de combinación modal SRSS y CQC, calcule los valores máximos de (a) los desplazamientos u_x, u_y y u_z de la masa, así como **(b)** los momentos flexionantes alrededor de los ejes x y y, y el par de torsión en a. Comente sobre las diferencias entre los resultados de las dos reglas de combinación modal.

13.60 Resuelva el problema 13.59 para un movimiento del terreno en la dirección y.

13.61 Resuelva el problema 13.59 para un movimiento del terreno en la dirección z.

13.62 Resuelva el problema 13.59 para un movimiento del terreno en la dirección *a-d*.

13.63 Para la estructura y el movimiento del terreno definido en el problema 13.59, estime el momento flexionante máximo en a alrededor de un eje orientado con un ángulo $\alpha = 30°$ en sentido antihorario a partir del eje x. Comente sobre las diferencias entre las estimaciones SRSS y CQC.

13.64 Resuelva el problema 13.63 para un movimiento del terreno en la dirección y.

13.65 Resuelva el problema 13.63 para un movimiento del terreno en la dirección z.

13.66 Resuelva el problema 13.63 para un movimiento del terreno en la dirección *a-d*.

13.67 **(a)** Para la estructura definida en el problema 13.59 y un movimiento del terreno en la dirección x, estime el momento flexionante máximo en a alrededor de un eje orientado con un ángulo arbitrario α en sentido antihorario a partir del eje x.

(b) Calcule el valor máximo del momento flexionante máximo de la tubería en a y el correspondiente valor de α. Comente sobre las diferencias entre las estimaciones SRSS y CQC.

13.68 Resuelva el problema 13.67 para un movimiento del terreno en la dirección y.

13.69 Resuelva el problema 13.67 para un movimiento del terreno en la dirección z.

13.70 Resuelva el problema 13.67 para un movimiento del terreno en la dirección *a-d*.

14

Análisis de los sistemas lineales con amortiguamiento no clásico

AVANCE

Ahora que se ha desarrollado el procedimiento del análisis modal para los sistemas estructurales con amortiguamiento clásico sometidos a una excitación sísmica, se tiene el conocimiento suficiente para hacer frente a un análisis más desafiante: el de los sistemas con amortiguamiento no clásico, los cuales se presentan en varias situaciones prácticas mencionadas en la sección 11.5. En la parte A de este capítulo se revisan los sistemas con amortiguamiento clásico y se plantea de nuevo el procedimiento del análisis desarrollado en los capítulos 10 y 13 para el análisis de vibración libre y el análisis sísmico de los sistemas subamortiguados ($\zeta_n < 1$ en todos los modos), de una forma que facilite su extensión al caso más general. La parte B, que ocupa la mayor parte de este capítulo, se dedica al análisis de la historia de la respuesta en los sistemas con amortiguamiento no clásico sometidos a excitación sísmica. Primero, se presenta la teoría para el análisis de vibración libre, la cual se especifica con el fin de obtener la respuesta a una excitación impulsiva unitaria. Después se usa el enfoque integral de convolución para desarrollar el procedimiento del análisis de la respuesta a un movimiento arbitrario del terreno.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La respuesta de un sistema de VGDL a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ está controlada por las ecuaciones (13.1.1) y (13.1.2), que se repiten aquí por conveniencia:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\iota\ddot{u}_g(t) \qquad (14.1)$$

El interés de este capítulo se limita a los "sistemas restringidos"† (es decir, a los sistemas que no permiten ningún modo de vibración natural de cuerpo rígido‡), por lo que las matrices de masa **m**, de rigidez **k** y de amortiguamiento **c** del sistema tienen valores reales y simétricos; además, **m** y **k** son matrices definidas positivas, mientras que **c** se define como semipositiva. El objetivo aquí es desarrollar un procedimiento para analizar la respuesta del sistema sin imponer ninguna restricción adicional a la forma de la matriz de amortiguamiento; en particular, se pretende analizar la respuesta de los sistemas con amortiguamiento no clásico, definidos en la sección 10.9.

PARTE A: SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO CLÁSICO: REFORMULACIÓN

14.1 FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN NATURAL

La vibración libre de los sistemas con amortiguamiento clásico (definidos en la sección 10.9) está controlada por la ecuación (10.10.4), que se repite aquí por conveniencia:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \tag{14.1.1}$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural no amortiguada y ζ_n es la fracción de amortiguamiento para el n-ésimo modo de vibración. La solución de esta ecuación diferencial tiene la forma

$$q_n(t) = e^{\lambda_n t} \tag{14.1.2}$$

Si se sustituye la ecuación (14.1.2) en la ecuación (14.1.1) y se procede como en la deducción 2.2 (capítulo 2), se llega a la ecuación característica; ésta puede resolverse para determinar sus dos valores característicos, los cuales forman un par conjugado complejo:

$$\lambda_n, \bar{\lambda}_n = -\zeta_n\omega_n \pm i\omega_{nD} \tag{14.1.3}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la cantidad imaginaria unitaria; ζ_n, ω_n y ω_{nD} son escalares reales positivos;

$$\omega_{nD} = \omega_n\sqrt{1 - \zeta_n^2} \tag{14.1.4}$$

es la frecuencia natural amortiguada (presentada por primera vez en la sección 10.10), y la barra superior indica un conjugado complejo; expresado de otra manera, $\bar{\lambda}_n$ es el conjugado complejo de λ_n.

Observe que la frecuencia natural ω_n del sistema no amortiguado asociado y la fracción de amortiguamiento ζ_n están relacionadas con el valor característico λ_n de la siguiente manera:

$$\omega_n = |\lambda_n| \qquad \zeta_n = -\frac{\text{Re}(\lambda_n)}{|\lambda_n|} \tag{14.1.5}$$

†En ocasiones, a tales sistemas se les conoce como sistemas pasivos.

‡En contraste, los aviones en vuelo tienen modos de cuerpo rígido.

donde $|\cdot|$ indica el módulo, y $\text{Re}(\cdot)$ representa la parte real de la cantidad con valor complejo incluida en $(\cdot)$; de manera similar, $\text{Im}(\cdot)$ representa la parte imaginaria de la cantidad con valor complejo. Existe un vector característico ϕ_n con valor real que está asociado con los dos valores característicos λ_n y $\bar{\lambda}_n$. Aunque un vector característico calculado puede tener un valor complejo, sus subvectores real e imaginario son proporcionales; por lo tanto, puede normalizarse como un vector con valor real.

14.2 VIBRACIÓN LIBRE

La solución para la vibración libre debida a los desplazamientos y velocidades iniciales en los sistemas con amortiguamiento clásico, que se dedujo en el capítulo 10, está dada por la ecuación (10.10.7). En la presente sección este resultado se deduce utilizando un enfoque alternativo que permite su generalización a los sistemas con amortiguamiento no clásico.

Si se sigue la ecuación (g) en la deducción 2.2 (capítulo 2), la solución general de la ecuación (14.1.1) es

$$q_n(t) = B_n e^{\lambda_n t} + \bar{B}_n e^{\bar{\lambda}_n t}$$

y al sustituir en la ecuación (10.2.1) se obtiene la contribución del n-ésimo modo a la respuesta de desplazamiento del sistema:

$$\mathbf{u}_n(t) = B_n \phi_n e^{\lambda_n t} + \bar{B}_n \phi_n e^{\bar{\lambda}_n t} \tag{14.2.1}$$

en la que B_n es una constante con valor complejo y $\bar{B}_n$ es su conjugado complejo; ϕ_n es el n-ésimo modo de vibración natural. Como el segundo término del lado derecho de la ecuación (14.2.1) es el conjugado complejo del primero, las dos partes imaginarias se anulan entre sí, lo que resulta en

$$\mathbf{u}_n(t) = 2\text{Re}(B_n \phi_n e^{\lambda_n t}) \tag{14.2.2}$$

Observe que la solución modal dada por la ecuación (14.2.1) o la ecuación (14.2.2) está asociada con el par de valores característicos λ_n y $\bar{\lambda}_n$ y con su vector característico común ϕ_n.

La respuesta del sistema a la excitación inicial arbitraria está dada por la superposición de las soluciones modales (ecuaciones 14.2.1 o 14.2.2):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} B_n \phi_n e^{\lambda_n t} + \bar{B}_n \phi_n e^{\bar{\lambda}_n t} = 2\sum_{n=1}^{N} \text{Re}\left(B_n \phi_n e^{\lambda_n t}\right) \tag{14.2.3}$$

donde las constantes B_n de valor complejo se determinan a partir de los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0)$ y la velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0)$ dados, invocando las propiedades de ortogonalidad de los modos (apéndice 14.1):

$$B_n = \frac{1}{2}\left[q_n(0) - i\,\frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\right] \tag{14.2.4}$$

donde

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0)}{M_n} \qquad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n} \qquad M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \tag{14.2.5}$$

que son idénticas a las expresiones de la ecuación (10.8.5). Si se sustituye la ecuación (14.2.4) en la ecuación (14.2.2), se sustituye la ecuación (14.1.3) para λ_n y, por último, se usan las relaciones de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, resulta la contribución del n-ésimo modo de vibración a la respuesta de vibración libre:

$$\mathbf{u}_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n e^{-\zeta_n \omega_n t}\left[q_n(0)\cos\omega_{nD}t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\operatorname{sen}\omega_{nD}t\right] \qquad (14.2.6)$$

La superposición de las respuestas modales $\mathbf{u}_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, conduce a la ecuación (10.10.7) para la respuesta total.

En preparación para el análisis de los sistemas con amortiguamiento no clásico, se expresa la ecuación (14.2.2) en una forma alternativa. Para ello, primero es necesario evaluar el producto

$$2B_n\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\beta}_n + i\boldsymbol{\gamma}_n \qquad (14.2.7)$$

donde β_n y γ_n son vectores con valores reales, después se sustituye la ecuación (14.2.7) en la ecuación (14.2.2) y la ecuación (14.1.3) para λ_n; por último, se utilizan las relaciones de Euler y se obtiene

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}[\boldsymbol{\beta}_n\cos\omega_{nD}t - \boldsymbol{\gamma}_n\operatorname{sen}\omega_{nD}t] \qquad (14.2.8)$$

Como las ecuaciones (14.2.8) y la ecuación (14.2.6) son equivalentes,

$$\boldsymbol{\beta}_n = q_n(0)\boldsymbol{\phi}_n \qquad \boldsymbol{\gamma}_n = -\frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}}\boldsymbol{\phi}_n \qquad (14.2.9)$$

Al superponer las respuestas modales definidas por la ecuación (14.2.8) se obtiene una expresión alternativa para la respuesta total:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\zeta_n\omega_n t}[\boldsymbol{\beta}_n\cos\omega_{nD}t - \boldsymbol{\gamma}_n\operatorname{sen}\omega_{nD}t] \qquad (14.2.10)$$

14.3 RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO

Una aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t - \tau)$, imparte a un sistema de 1GDL la velocidad inicial $\dot{u}(\tau) = -1$ y el desplazamiento inicial $u(\tau) = 0$. La respuesta de vibración libre resultante se describe mediante la ecuación (4.1.7), que se repite aquí por conveniencia después de especificarla para $\tau = 0$:

$$h(t) = -\frac{1}{\omega_D}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_D t \qquad (14.3.1)$$

Al extender los conceptos anteriores a los sistemas de VGDL, una aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$, imparte al sistema las velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0) = -\boldsymbol{\iota}$, pero no hay desplazamientos iniciales, es decir, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$; el vector de influencia ι se definió por primera vez en la sección 9.4. Si se sustituyen estos vectores de desplazamiento y velocidad iniciales en la ecuación (14.2.5), resultan las condiciones iniciales para las coordenadas modales: $q_n(0) = 0$ y $\dot{q}_n(0) = -\Gamma_n$ (vea la definición de Γ_n en la ecuación 13.1.5); entonces la ecuación (14.2.4) se especifica como

$$B_n^g = \frac{i}{2}\frac{\Gamma_n}{\omega_{nD}} \qquad (14.3.2)$$

que se sustituye en la solución general para la vibración libre, ecuación (14.2.2), con el fin de obtener la respuesta al impulso unitario; observe que se ha añadido el superíndice "g" en B_n^g para enfatizar que estas constantes se asocian con la aceleración del terreno . Para expresar el resultado en una forma similar a la ecuación (14.2.10), primero se escribe el producto $2B_n^g\phi_n$ como en la ecuación (14.2.7):

$$2B_n^g\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\beta}_n^g + i\boldsymbol{\gamma}_n^g \tag{14.3.3}$$

donde

$$\boldsymbol{\beta}_n^g = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\gamma}_n^g = \frac{\Gamma_n}{\omega_{nD}}\boldsymbol{\phi}_n \tag{14.3.4}$$

son vectores con valores reales independientes de la forma en que se normalizan los modos.

Por lo tanto, la respuesta está dada por la ecuación (14.2.10) con un cambio de notación evidente:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[\boldsymbol{\beta}_n^g \cos\omega_{nD}t - \boldsymbol{\gamma}_n^g \operatorname{sen}\omega_{nD}t\right] \tag{14.3.5}$$

donde $\mathbf{h}(t)$ indica el vector de las funciones de respuesta al impulso unitario para los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ del sistema.

Si se reconoce que β_n^g y γ_n^g están dados por la ecuación (14.3.4), el resultado anterior puede expresarse como

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n h_n(t)\boldsymbol{\phi}_n \tag{14.3.6}$$

en el que

$$h_n(t) = -\frac{1}{\omega_{nD}}e^{-\zeta_n\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_{nD}t \tag{14.3.7}$$

es la función de respuesta al impulso unitario para la deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL, un sistema de 1GDL con las propiedades de vibración (frecuencia natural ω_n y ζ_n) del n-ésimo modo del sistema de VGDL. Esto se hace evidente al comparar las ecuaciones (14.3.7) y (14.3.1).

14.4 RESPUESTA SÍSMICA

Al extender el concepto integral de convolución para los sistemas de 1GDL (secciones 4.2 y 6.12), la respuesta de un sistema de VGDL a una aceleración arbitraria del terreno puede expresarse como

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\mathbf{h}(t-\tau)\,d\tau \tag{14.4.1}$$

en la que $\mathbf{h}(t)$ se sustituye a partir de la ecuación (14.3.6) para obtener

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n D_n(t)\boldsymbol{\phi}_n \tag{14.4.2}$$

donde

$$D_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)h_n(t-\tau)\,d\tau \tag{14.4.3}$$

representa la respuesta de deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, presentado en la sección 13.1.3. Esto se hace evidente al sustituir la ecuación (14.3.7) para $h_n(t)$ y al comparar la ecuación resultante con la ecuación (6.12.1). Observe que la ecuación (14.4.2) es idéntica a la ecuación (13.1.15).

PARTE B: SISTEMAS CON AMORTIGUAMIENTO NO CLÁSICO

Ahora que se ha reformulado el análisis de los sistemas con amortiguamiento clásico, es posible regresar al problema original de analizar la respuesta de los sistemas con amortiguamiento no clásico, que se definieron en la sección 10.9.

14.5 FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN NATURAL

La vibración libre de un sistema de VGDL está controlada por la ecuación (10.9.1), que se repite aquí por conveniencia:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{14.5.1}$$

Esta ecuación admite una solución de la forma

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t} \tag{14.5.2}$$

Al sustituir esta forma de $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación (14.5.1) se llega al problema de valor característico cuadrático (también conocido como el problema de valor característico complejo):

$$(\lambda^2\mathbf{m} + \lambda\mathbf{c} + \mathbf{k})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \tag{14.5.3}$$

Aunque la ecuación (14.5.3) puede resolverse directamente para un valor característico λ y el vector característico asociado ψ, estos valores pueden determinarse de manera más conveniente al reducir primero las N ecuaciones diferenciales de segundo orden (ecuación 14.1) a un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden (apéndice 14.2). El problema de valor característico correspondiente de orden $2N$ (ecuación A14.2.8) puede resolverse mediante procedimientos y algoritmos de computadora bien establecidos. Las $2N$ raíces de λ son valores reales o bien ocurren en pares conjugados complejos (apéndice A14.2). El análisis de la respuesta de los sistemas que tienen sólo raíces con valor complejo se desarrolla en las secciones 14.5 a 14.9, mientras que los sistemas con algunas raíces de valor real se posponen hasta la sección 14.10.

Siempre que la cantidad de amortiguamiento no sea muy grande (es decir, suficientemente pequeña como para asegurar la vibración libre oscilatoria en todos los modos) los valores característicos ocurren en pares conjugados complejos con partes reales negativas o iguales a cero, al igual que en el caso de los sistemas con amortiguamiento clásico (vea la ecuación 14.1.3). Para un sistema de N grados de libertad, hay N pares de valores característicos, y para cada par corresponde un par conjugado complejo de vectores característicos.

Un par conjugado complejo de valores característicos, indicado por λ_n y $\bar{\lambda}_n$, puede expresarse en la misma forma que la ecuación (14.1.3) para los sistemas con amortiguamiento clásico:

$$\lambda_n, \bar{\lambda}_n = -\zeta_n\omega_n \pm i\omega_{nD} \tag{14.5.4}$$

donde

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \tag{14.5.5}$$

Observe que ω_n y ζ_n están relacionadas con los valores característicos de la manera siguiente:

$$\omega_n = |\lambda_n| \qquad \zeta_n = -\frac{\text{Re}(\lambda_n)}{|\lambda_n|} \tag{14.5.6}$$

El par asociado de vectores característico con valores complejos se separa en sus partes real e imaginaria:

$$\boldsymbol{\psi}_n, \bar{\boldsymbol{\psi}}_n = \boldsymbol{\phi}_n \pm i\boldsymbol{\chi}_n \tag{14.5.7}$$

donde ϕ_n y χ_n son vectores con valores reales de N elementos cada uno. Los valores de ω_n se numeran en orden ascendente y los valores de λ_n y ψ_n están numerados en el orden correspondiente a ω_n.

Si se tiene en cuenta que las ecuaciones (14.5.4) y (14.5.5) para los sistemas con amortiguamiento no clásico son idénticas a las ecuaciones correspondientes (14.1.4) y (14.1.5) para los sistemas con amortiguamiento clásico, ω_n se conocerá como la n-ésima frecuencia natural no pseudo-amortiguada circular del sistema, ω_{nD} como la frecuencia co amortiguamiento, y ζ_n como la fracción de amortiguamiento modal. El prefijo "pseudo" se ha incluido para indicar que para los sistemas con amortiguamiento no clásico, ω_n es una función de la cantidad de amortiguamiento del sistema y, por lo tanto, difiere de la frecuencia correspondiente del sistema no amortiguado asociado; donde pueda surgir confusión, esta última frecuencia se indicará mediante ω_n^o. Como ψ_n para los sistemas con amortiguamiento no clásico es similar a ϕ_n para los sistemas con amortiguamiento clásico, ψ_n se conoce como el n-ésimo modo de vibración natural.

Los estudios sobre el efecto del amortiguamiento ligero en las frecuencias naturales de los sistemas de VGDL han demostrado (1) que la frecuencia natural del modo más grande de un sistema amortiguado es siempre menor o igual a la frecuencia no amortiguada correspondiente, sin importar si el amortiguamiento es clásico o no clásico, y (2) que la frecuencia natural amortiguada del modo más bajo puede ser mayor que la frecuencia no amortiguada correspondiente, dependiendo de la forma de la matriz de amortiguamiento y de la separación entre ω_1 y ω_2.

Para el caso especial de los sistemas con amortiguamiento clásico, como se indica en la sección 14.1, los valores característicos también ocurren en pares conjugados complejos; el módulo ω_n de cada par de valores característicos es igual a la frecuencia natural ω_n^o del sistema no amortiguado asociado; y las frecuencias naturales amortiguadas ω_{nD} son siempre inferiores a las correspondientes frecuencias no amortiguadas ω_n^o. Sin embargo, los vectores característicos tienen valores reales y son iguales a los del sistema no amortiguado asociado, es decir, $\boldsymbol{\chi}_n = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\psi}_n = \bar{\boldsymbol{\psi}}_n = \boldsymbol{\phi}_n$.

14.6 ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS

Un par de vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad (vea la demostración en el apéndice 14.3):

$$(\lambda_n + \lambda_r)\,\boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\psi}_r + \boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{c}\, \boldsymbol{\psi}_r = 0 \tag{14.6.1}$$

$$\boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{k} \boldsymbol{\psi}_r - \lambda_n \lambda_r \boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{m}\, \boldsymbol{\psi}_r = 0 \tag{14.6.2}$$

Estas relaciones de ortogonalidad también son válidas para un par conjugado complejo de vectores característicos debido a que sus valores característicos son distintos.

Para los sistemas con amortiguamiento clásico, es posible demostrar que las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2) se reducen a las relaciones de ortogonalidad conocidas de la ecuación (10.4.1) (vea el apéndice A14.3).

Ejemplo 14.1

Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales, así como las fracciones de amortiguamiento modal de la estructura de cortante de dos niveles que se muestra en la figura E10.12.1a con $c = \sqrt{km/200}$, un sistema con amortiguamiento clásico. Para resolver el problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico que se desarrolló en la sección 14.5.

Solución Las matrices de masa y rigidez del sistema, determinadas en el ejemplo 9.1, son

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6c & -2c \\ -2c & 2c \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{a}$$

La matriz de amortiguamiento satisface la ecuación (10.9.3), lo que implica que el sistema tiene un amortiguamiento clásico. El problema de valor característico que debe resolverse está definido por la ecuación (A14.2.8), que se repite aquí por conveniencia:

$$\lambda \mathbf{a}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{b}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \tag{b}$$

donde las matrices **a** y **b**, definidas en la ecuación (A14.2.5), para este sistema son

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 2m & 0 & 6c & -2c \\ 0 & m & -2c & 2c \end{bmatrix} \tag{c}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{d}$$

El problema de valor característico puede resolverse en forma numérica utilizando un algoritmo adecuado; por ejemplo, la función de Matlab *eig*(**b**, −**a**), que resulta en los valores característicos

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,(-0.0354 \pm 0.7062i) \tag{e.1}$$

$$\lambda_2, \bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,(-0.1414 \pm 1.4071i) \tag{e.2}$$

A partir de estos valores característicos, ω_n y ζ_n pueden determinarse utilizando la ecuación (14.5.6):

$$\omega_1 = |\lambda_1| = 0.7071\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = |\lambda_2| = 1.4142\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{f}$$

$$\zeta_1 = -\frac{\mathrm{Re}(\lambda_1)}{|\lambda_1|} = 0.05 \qquad \zeta_2 = -\frac{\mathrm{Re}(\lambda_2)}{|\lambda_2|} = 0.10 \tag{g}$$

Observe que las ω_n en la ecuación (f) son iguales a las frecuencias naturales del sistema no amortiguado asociado, que se determinaron mediante la resolución del problema de valor

característico real en el problema 10.4, y que las ζ_n en la ecuación (g) tienen valores idénticos a los que se determinaron utilizando la ecuación (10.10.3).

A partir de los valores característicos de la ecuación (e), las frecuencias amortiguadas se determinan empleando su definición en la ecuación (14.5.5):

$$\omega_{1D} = \mathrm{Im}(\lambda_1) = 0.7062\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{2D} = \mathrm{Im}(\lambda_2) = 1.4071\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{h}$$

Observe que las frecuencias amortiguadas ω_{nD} (ecuación h) son más bajas que las frecuencias no amortiguadas ω_n (ecuación f). La solución del problema de valor característico (ecuación b) también proporciona los vectores característicos:

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{i}$$

Observe que los vectores característicos tienen valores reales, como se espera de un sistema con amortiguamiento clásico, y que son idénticos a los modos naturales del sistema no amortiguado asociado, los cuales se determinaron en el ejemplo 10.4.

Ejemplo 14.2

Determine las frecuencias y los modos de vibración naturales, así como las fracciones de amortiguamiento modal para el sistema que se muestra en la figura E14.2a, un marco de dos niveles idealizado como un edificio de cortante que tiene un amortiguador sólo en el primer nivel con $c = \sqrt{km}$. Demuestre que los vectores característicos satisfacen las propiedades de ortogonalidad.

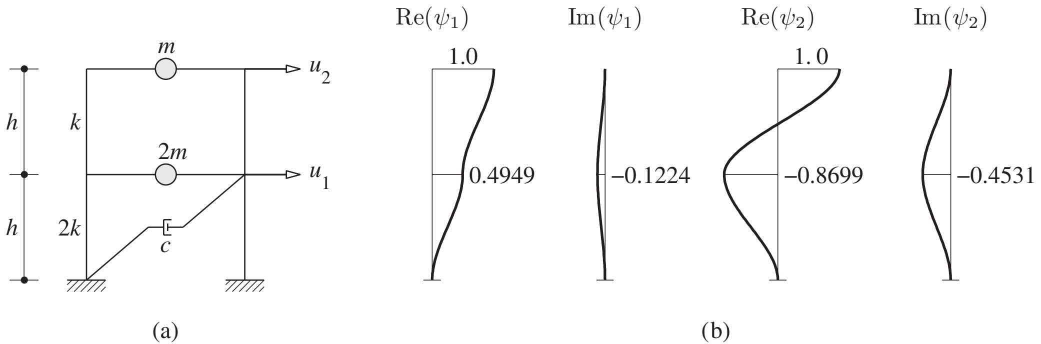


Figura E14.2 (a) Sistema con amortiguamiento no clásico; (b) partes real e imaginaria de los vectores característicos ψ_1 y ψ_2.

Solución Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema son

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c & \\ & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{a}$$

La matriz de amortiguamiento no satisface la ecuación (10.9.3), lo que implica que el sistema tiene amortiguamiento no clásico. El problema de valor característico que debe resolverse está definido por la ecuación (A14.2.8), que se repite aquí por conveniencia:

$$\lambda \mathbf{a} \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{b} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \tag{b}$$

donde las matrices **a** y **b**, definidas en la ecuación (A14.2.5), para este sistema son

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 2m & 0 & c & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{c}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{d}$$

El problema de valor característico puede resolverse en forma numérica utilizando un algoritmo adecuado; por ejemplo, la función de Matlab $eig(\mathbf{b}, -\mathbf{a})$, que resulta en los valores característicos

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}(-0.0855 \pm 0.7159i) \tag{e.1}$$

$$\lambda_2, \bar{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}(-0.1645 \pm 1.3773i) \tag{e.2}$$

A partir de estos valores característicos, ω_n y ζ_n pueden determinarse empleando la ecuación (14.5.6):

$$\omega_1 = |\lambda_1| = 0.7209\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = |\lambda_2| = 1.3871\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{f}$$

$$\zeta_1 = -\frac{\mathrm{Re}(\lambda_1)}{|\lambda_1|} = 0.1186 \qquad \zeta_2 = -\frac{\mathrm{Re}(\lambda_2)}{|\lambda_2|} = 0.1186 \tag{g}$$

Observe que las frecuencias pseudo-amortiguadas ω_n en la ecuación (f) son ligeramente diferentes a las frecuencias del sistema no amortiguado asociado ω_n^o, dadas por la ecuación (f) en el ejemplo 14.1.

A partir de los valores característicos de la ecuación (e), las frecuencias correspondientes ω_{nD} del sistema amortiguado se determinan usando su definición en la ecuación (14.5.5):

$$\omega_{1D} = \mathrm{Im}\,(\lambda_1) = 0.7159\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{2D} = \mathrm{Im}(\lambda_2) = 1.3773\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{h}$$

Observe que la frecuencia natural amortiguada ω_{1D} del modo menor (o primer modo) es mayor que la frecuencia no amortiguada ω_1^o; sin embargo, la frecuencia amortiguada ω_{2D} del modo más grande (o segundo modo) es menor que la frecuencia no amortiguada ω_2^o.

La solución del problema de valor característico (ecuación b) también proporciona los vectores característicos de 4×1, pero sólo los componentes tercero y cuarto (vea la ecuación A14.2.7) son relevantes y se muestran a continuación:

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} 0.4949 - 0.1224i \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{Bmatrix} -0.8699 - 0.4531i \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{i}$$

Observe que ahora los vectores característicos tienen valores complejos, como se espera para un sistema con amortiguamiento no clásico. Sus partes real e imaginaria se grafican en la figura E14.2b.

Para verificar que los vectores característicos ψ_n sean ortogonales, se calculan los términos individuales en el lado izquierdo de las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2):

$$\psi_1^T \mathbf{m}\psi_2 = \begin{Bmatrix} 0.4949 - 0.1224i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.8699 - 0.4531i \\ 1 \end{Bmatrix} = m\ (0.0281 - 0.2355i)$$

$$\psi_1^T \mathbf{k}\psi_2 = \begin{Bmatrix} 0.4949 - 0.1224i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.8699 - 0.4531i \\ 1 \end{Bmatrix} = k\ (-0.0828 + 0.2223i)$$

$$\psi_1^T \mathbf{c}\psi_2 = \begin{Bmatrix} 0.4949 - 0.1224i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} c & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.8699 - 0.4531i \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{km}\ (-0.4859 - 0.1178i)$$

Al sustituir los términos individuales en el lado izquierdo de las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2), se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2)\,\psi_1^T \mathbf{m}\psi_2 + \psi_1^T \mathbf{c}\psi_2 &= \sqrt{km}\ (-0.2500 + 2.0931i)\ (0.0281 - 0.2355i) \\ &\quad + \sqrt{km}\ (-0.4859 - 0.1178i) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1^T \mathbf{k}\psi_2 - \lambda_1\lambda_2\psi_1^T \mathbf{m}\psi_2 &= k\ (-0.0828 + 0.2223i) \\ &\quad + k(0.9719 + 0.2355i)\ (0.0281 - 0.2355i) = 0\end{aligned}$$

Esto verifica que los vectores característicos calculados para el sistema son ortogonales.

14.7 VIBRACIÓN LIBRE

La solución modal asociada con el par conjugado complejo de valores característicos λ_n y $\bar{\lambda}_n$ y sus vectores característicos ψ_n y $\bar{\psi}_n$ (deducida en el apéndice A14.4) está dada por

$$\mathbf{u}_n(t) = B_n\psi_n e^{\lambda_n t} + \bar{B}_n\bar{\psi}_n e^{\bar{\lambda}_n t} \tag{14.7.1}$$

que puede verse como una generalización de la ecuación (14.2.1) para los sistemas con amortiguamiento no clásico. Como el segundo término del lado derecho de la ecuación (14.7.1) es el conjugado complejo del primero, las dos partes imaginarias se anulan entre sí, lo que resulta en

$$\mathbf{u}_n(t) = 2\mathrm{Re}\left(B_n\psi_n e^{\lambda_n t}\right) \tag{14.7.2}$$

La respuesta del sistema a la excitación inicial arbitraria está dada por la superposición de las soluciones modales (ecuación 14.7.2):

$$\mathbf{u}(t) = 2\sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re}\left(B_n\psi_n e^{\lambda_n t}\right) \tag{14.7.3}$$

Al invocar las propiedades de ortogonalidad de los modos (ecuaciones 14.6.1 y 14.6.2), es posible determinar las constantes con valores complejos (vea el apéndice A14.4):

$$B_n = \frac{\lambda_n\psi_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \psi_n^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \psi_n^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_n\psi_n^T \mathbf{m}\psi_n + \psi_n^T \mathbf{c}\psi_n} \tag{14.7.4}$$

Tras haber obtenido la forma alternativa de la solución de vibración libre para los sistemas con amortiguamiento clásico (sección 14.2), en primer lugar se evalúa el producto:

$$2B_n\psi_n = \boldsymbol{\beta}_n + i\boldsymbol{\gamma}_n \tag{14.7.5}$$

donde β_n y γ_n son vectores con valores reales; entonces, si se sustituye la ecuación (14.7.5) en la ecuación (14.7.2) y, finalmente, se relacionan las funciones exponenciales con funciones trigonométricas, resulta

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t}[\boldsymbol{\beta}_n \cos \omega_{nD} t - \boldsymbol{\gamma}_n \operatorname{sen} \omega_{nD} t] \tag{14.7.6}$$

que es idéntica a la ecuación (14.2.8) para los sistemas con amortiguamiento clásico, pero los vectores β_n y γ_n ya no están definidos por la ecuación (14.2.9). La superposición de las soluciones modales, tal como se expresa en la ecuación (14.7.3), proporciona una forma alternativa para la respuesta a la vibración libre:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\zeta_n \omega_n t}[\boldsymbol{\beta}_n \cos \omega_{nD} t - \boldsymbol{\gamma}_n \operatorname{sen} \omega_{nD} t] \tag{14.7.7}$$

Para los sistemas con amortiguamiento clásico, la ecuación (14.7.4) se reduce a la ecuación (14.2.4), β_n y γ_n están dados por las ecuaciones (14.2.9) (vea el apéndice A14.4), y la ecuación (14.7.7) se vuelve equivalente a la ecuación (14.2.10).

Ejemplo 14.3

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles de la figura E10.12.1a con $c = \sqrt{km/200}$, un sistema con amortiguamiento clásico, debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \langle -\frac{1}{2} \quad 2 \rangle^T$. Para resolver el problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.7.

Solución El desplazamiento inicial y los vectores de velocidad son

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

Si se sustituyen en la ecuación (14.7.4) junto con los valores de **m**, **c**, λ_n y ψ_n determinados en el ejemplo 14.1, resulta

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_1} = 0.5000 - 0.0250i \tag{b.1}$$

$$B_2 = \frac{\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2} = 0.5000 - 0.0503i \tag{b.2}$$

Si se usan la B_n de la ecuación (b) y la ψ_n del ejemplo 14.1, β_n y γ_n se determinan a partir de la ecuación (14.7.5) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \operatorname{Re}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} 0.5000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \operatorname{Re}(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} -1.0000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \tag{c.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \operatorname{Im}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} -0.0250 \\ -0.0501 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \operatorname{Im}(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} 0.1005 \\ -0.1005 \end{Bmatrix} \tag{c.2}$$

Al sustituir β_n y γ_n a partir de la ecuación (c) en la ecuación (14.7.7), se obtiene la respuesta a la vibración libre:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) = e^{-0.05\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} 0.5000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \cos \omega_{1D} t + \begin{Bmatrix} 0.0250 \\ 0.0501 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \omega_{1D} t\right] \\ + e^{-0.1\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -1.0000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \cos \omega_{2D} t + \begin{Bmatrix} -0.1005 \\ 0.1005 \end{Bmatrix} \operatorname{sen} \omega_{2D} t\right]\end{aligned} \tag{d}$$

Observe que esta solución es idéntica al resultado obtenido mediante el método clásico en el ejemplo 10.13.

Ejemplo 14.4

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.2a con $c = \sqrt{km}$, debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \langle -\frac{1}{2} \quad 2\rangle^T$.

Solución Los vectores del desplazamiento y la velocidad iniciales son

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

Al sustituirlos en la ecuación (14.7.4), junto con los valores de **m**, **c**, λ_n y ψ_n determinados en el ejemplo 14.2, se obtiene

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_1} = 0.5101 + 0.3137i \tag{b.1}$$

$$B_2 = \frac{\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2} = 0.4899 - 0.2532i \tag{b.2}$$

Si se usan la B_n de la ecuación (b) y la ψ_n del ejemplo 14.2, β_n y γ_n se determinan a partir de la ecuación (14.7.5) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathrm{Re}\,(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} 0.5817 \\ 1.0203 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \mathrm{Re}(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} -1.0817 \\ 0.9797 \end{Bmatrix} \tag{c.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathrm{Im}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} 0.1856 \\ 0.6274 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \mathrm{Im}\,(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} -0.0034 \\ -0.5065 \end{Bmatrix} \tag{c.2}$$

Si se sustituyen las β_n y γ_n de la ecuación (c) en la ecuación (14.7.7), resulta la respuesta a la vibración libre:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = {} & e^{-0.1186\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} 0.5817 \\ 1.0203 \end{Bmatrix} \cos\omega_{1D}t - \begin{Bmatrix} 0.1856 \\ 0.6274 \end{Bmatrix} \operatorname{sen}\omega_{1D}t\right] \\ & + e^{-0.1186\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -1.0817 \\ 0.9797 \end{Bmatrix} \cos\omega_{2D}t + \begin{Bmatrix} 0.0034 \\ 0.5065 \end{Bmatrix} \operatorname{sen}\omega_{2D}t\right] \end{aligned} \tag{d}$$

Ejemplo 14.5

Determine las respuestas a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.2a con $c = \sqrt{km}$, debidas a dos conjuntos de desplazamientos iniciales: (1) $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_1$ y (2) $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\phi}_2$, donde $\boldsymbol{\phi}_n$ es el n-ésimo modo de vibración natural del sistema no amortiguado asociado; $\boldsymbol{\phi}_1 = \left\langle \frac{1}{2} \quad 1 \right\rangle^T$ y $\boldsymbol{\phi}_2 = \langle -1 \quad 1\rangle^T$.

Solución **Parte 1** Al sustituir el primer $\mathbf{u}(0)$ en la ecuación (14.7.4), junto con los valores de **m**, **c**, λ_n y ψ_n determinados en el ejemplo 14.2, se obtiene

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_1} = 0.5103 - 0.0200i \tag{a.1}$$

$$B_2 = \frac{\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2} = -0.0103 - 0.0200i \tag{a.2}$$

Si se usan la B_n de la ecuación (a) y la ψ_n del ejemplo 14.2, β_n y γ_n se determinan a partir de la ecuación (14.7.5) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathrm{Re}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} 0.5002 \\ 1.0207 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = \mathrm{Re}(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} -0.0002 \\ -0.0207 \end{Bmatrix} \tag{b.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathrm{Im}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} -0.1448 \\ -0.0401 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \mathrm{Im}(2B_2\boldsymbol{\psi}_2) = \begin{Bmatrix} 0.0442 \\ -0.0401 \end{Bmatrix} \tag{b.2}$$

Si se sustituyen las β_n y γ_n de la ecuación (b) en la ecuación (14.7.7), resulta la respuesta a la vibración libre:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix}0.5002\\1.0207\end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t + \begin{Bmatrix}0.1448\\0.0401\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t\right]\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix}-0.0002\\-0.0207\end{Bmatrix}\cos\omega_{2D}t - \begin{Bmatrix}0.0442\\-0.0401\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{2D}t\right]\end{aligned} \tag{c}$$

Parte 2 Si se procede como en la parte 1, la respuesta a la vibración libre debida al segundo $\mathbf{u}(0)$ puede determinarse como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix}0.0815\\-0.0004\end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t - \begin{Bmatrix}0.3304\\0.6675\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t\right]\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix}-1.0815\\1.0004\end{Bmatrix}\cos\omega_{2D}t + \begin{Bmatrix}0.0476\\0.4664\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{2D}t\right]\end{aligned} \tag{d}$$

Observaciones Los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ se expresan como una combinación lineal de ϕ_n, los modos de vibración natural del sistema no amortiguado asociado:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{2} \phi_n q_n(t) \tag{e}$$

donde las coordenadas modales están dadas por

$$q_n(t) = \frac{\phi_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}(t)}{\phi_n^T \mathbf{m}\phi_n} \tag{f}$$

que es una generalización de la ecuación (10.7.2). Si se sustituyen los ϕ_n conocidos y la ecuación (c) para $\mathbf{u}(t)$ en la ecuación (f), se llega a

$$\begin{aligned}q_1(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}(1.0139\cos\omega_{1D}t + 0.1232\operatorname{sen}\omega_{1D}t)\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}(0.0068\cos\omega_{2D}t - 0.0832\operatorname{sen}\omega_{2D}t)\end{aligned} \tag{g}$$

$$\begin{aligned}q_2(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}(-0.0139\cos\omega_{1D}t - 0.0028\operatorname{sen}\omega_{1D}t)\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}(-0.0068\cos\omega_{2D}t + 0.0428\operatorname{sen}\omega_{2D}t)\end{aligned} \tag{h}$$

Éstas son las $q_n(t)$ asociadas con la ecuación (c), la respuesta a la vibración libre debida al primer conjunto de desplazamientos iniciales.

Del mismo modo, al sustituir los ϕ_n conocidos y la ecuación (d) para $\mathbf{u}(t)$, la ecuación (f) conduce a

$$\begin{aligned}q_1(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}(0.0541\cos\omega_{1D}t - 0.6652\operatorname{sen}\omega_{1D}t)\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}(-0.0545\cos\omega_{2D}t - 0.0023\operatorname{sen}\omega_{2D}t)\end{aligned} \tag{j}$$

$$\begin{aligned}q_2(t) &= e^{-0.1186\,\omega_1 t}(-0.0541\cos\omega_{1D}t + 0.3427\operatorname{sen}\omega_{1D}t)\\ &\quad + e^{-0.1186\,\omega_2 t}(1.0545\cos\omega_{2D}t + 0.1237\operatorname{sen}\omega_{2D}t)\end{aligned} \tag{k}$$

Éstas son las $q_n(t)$ asociadas con la ecuación (d), la respuesta a la vibración libre para el segundo conjunto de desplazamientos iniciales.

Estos resultados, presentados en las figuras E14.5.1 y E14.5.2, son para un sistema alterado desde su posición de equilibrio, al imponer desplazamientos iniciales que son proporcionales a un modo de vibración natural ϕ_n del sistema no amortiguado asociado. Las soluciones para q_n(t) se presentan en el inciso (c) de estas figuras; los desplazamientos de nivel en el inciso (d); y las formas modificadas en los instantes de tiempo seleccionados (a, b, c, d y e) en el inciso (b). Estos resultados permiten tres observaciones que contrastan con lo que se vio anteriormente para los sistemas no amortiguados (figuras 10.1.2 y 10.1.3) y para los sistemas con amortiguamiento clásico (figuras E10.12.1 y E10.12.2): en primer lugar, $q_2(t) \neq 0$ en la figura E14.5.1c y $q_1(t) \neq 0$ en la figura E14.5.2c. En segundo lugar, la forma inicial modificada no se

mantiene en vibración libre; vea las figuras E14.5.1b y E14.5.2b. En tercer lugar, todos los niveles (o grados de libertad) del sistema no vibran en la misma fase; no pasan por las posiciones cero, máxima o mínima en el mismo instante de tiempo, vea la figura E14.5.2d.

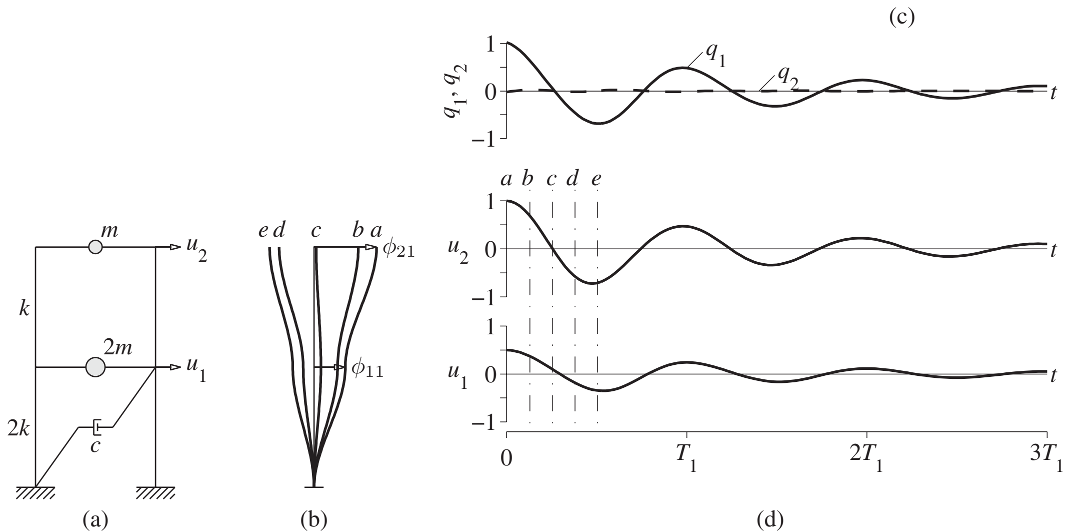


Figura E14.5.1 Vibración libre de un sistema con amortiguamiento no clásico debida al desplazamiento inicial en el primer modo natural del sistema no amortiguado: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo *a*, *b*, *c*, *d* y *e*; (c) coordenadas modales $q_n(t)$; (d) historia del desplazamiento.

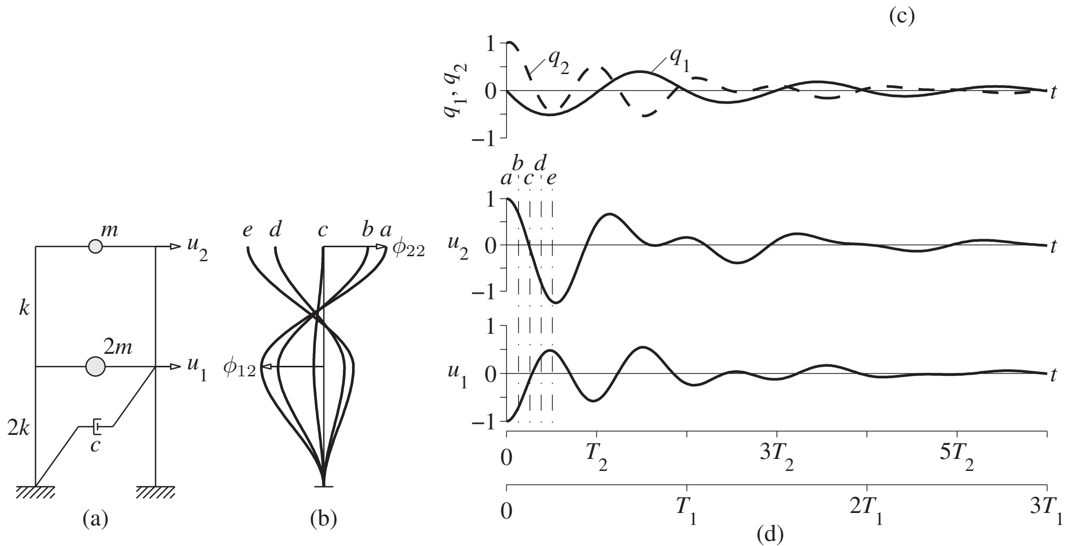


Figura E14.5.2 Vibración libre de un sistema con amortiguamiento no clásico debida al desplazamiento inicial en el segundo modo natural del sistema no amortiguado: (a) marco de dos niveles; (b) formas modificadas en los instantes de tiempo *a*, *b*, *c*, *d* y *e*; (c) coordenadas modales $q_n(t)$; (d) historia del desplazamiento.

14.8 RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO

Como se mencionó por primera vez en la sección 14.3, una aceleración del terreno de impulso unitario $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$ imparte a un sistema de VGDL las velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0) = -\boldsymbol{\iota}$, pero no hay desplazamientos iniciales, es decir, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$. La sustitución de estas condiciones iniciales en la ecuación (14.7.4) proporciona la constante con valores complejos

$$B_n^g = \frac{-\boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_n \boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_n + \boldsymbol{\psi}_n^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_n} \tag{14.8.1}$$

Igual que antes, se ha añadido el superíndice "g" en B_n^g para enfatizar que estas constantes se asocian con la aceleración del terreno. Al sustituir la ecuación (14.8.1) en la solución general para la vibración libre, la ecuación (14.7.3) conduce a la respuesta al impulso unitario.

Para expresar este resultado en una forma similar a la ecuación (14.7.6), primero se escribe el producto $2B_n^g\psi_n$ como en la ecuación (14.7.5):

$$2B_n^g \boldsymbol{\psi}_n = \boldsymbol{\beta}_n^g + i\boldsymbol{\gamma}_n^g \tag{14.8.2}$$

Así, la respuesta está dada por la ecuación (14.7.7) con un evidente cambio de notación:

$$\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[\boldsymbol{\beta}_n^g \cos\omega_{nD}t - \boldsymbol{\gamma}_n^g \operatorname{sen}\omega_{nD}t\right] \tag{14.8.3}$$

donde $\mathbf{h}(t)$ indica el vector de las funciones de respuesta al impulso unitario para los desplazamientos del sistema. Observe que las ecuaciones (14.8.2) y (14.8.3) tienen la misma forma que las ecuaciones (14.3.3) y (14.3.5) para los sistemas con amortiguamiento clásico, pero los vectores β_n^g y γ_n^g ya no están dados por la ecuación (14.3.4).

Aquí se expresará la ecuación (14.8.3) en términos de la función de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$ para la deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL, tal como se hizo en la ecuación (14.3.6) para los sistemas con amortiguamiento clásico. Recuerde que

$$h_n(t) = -\frac{1}{\omega_{nD}} e^{-\zeta_n\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_{nD}t \tag{14.8.4}$$

y que su primera derivada está dada por

$$\dot{h}_n(t) = -e^{-\zeta_n\omega_n t}\cos\omega_{nD}t - \zeta_n\omega_n h_n(t) \tag{14.8.5}$$

que puede reescribirse como

$$-e^{-\zeta_n\omega_n t}\cos\omega_{nD}t = \dot{h}_n(t) + \zeta_n\omega_n h_n(t) \tag{14.8.6}$$

Las funciones trigonométricas que multiplican a los vectores β_n^g y γ_n^g en la ecuación (14.8.3), ahora se sustituyen por las expresiones correspondientes obtenidas a partir de las ecuaciones (14.8.4) y (14.8.6) en términos de $h_n(t)$ y $\dot{h}_n(t)$ para lograr el vector de las funciones de respuesta al impulso unitario para los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ del sistema:

$$\mathbf{h}(t) = -\sum_{n=1}^{N}\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g \omega_n h_n(t) + \boldsymbol{\beta}_n^g \dot{h}_n(t)\right] \tag{14.8.7}$$

en la que

$$\boldsymbol{\alpha}_n^g = \zeta_n \boldsymbol{\beta}_n^g - \sqrt{1-\zeta_n^2}\boldsymbol{\gamma}_n^g \tag{14.8.8}$$

donde β_n^g y γ_n^g se conocen a partir de las ecuaciones (14.8.2) y (14.8.1).

Para los sistemas con amortiguamiento clásico la ecuación (14.8.7) se especifica como la ecuación (14.3.6). Lo anterior puede verificarse al sustituir la ecuación (14.3.4) en la ecuación (14.8.8) para obtener $\alpha_n^g = -(\Gamma_n/\omega_n)\phi_n$ y al sustituir esta expresión junto con $\beta_n^g = \mathbf{0}$ en la ecuación (14.8.7).

Propiedades de α_n^g y β_n^g. Los vectores α_n^g y β_n^g que aparecen en la ecuación (14.8.3) satisfacen las siguientes relaciones:

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\beta}_n^g = 0 \qquad \sum_{n=1}^{N} \omega_n\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g - 2\zeta_n\boldsymbol{\beta}_n^g\right] = -\boldsymbol{\iota} \tag{14.8.9}$$

Estas ecuaciones pueden deducirse al recordar que la ecuación (14.8.3) debe satisfacer las condiciones iniciales asociadas con la aceleración del terreno de impulso unitario: $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{u}}(0) = -\boldsymbol{\iota}$. Si se especifica la ecuación (14.8.3) para $t = 0$ y se impone la primera condición inicial, se llega a la ecuación (14.8.9a). De manera similar, al diferenciar la ecuación (14.8.3) con el fin de obtener una ecuación para $\dot{\mathbf{u}}(t)$, especificándola para $t = 0$ e imponiendo la segunda condición inicial, se obtiene la ecuación (14.8.9b); vea el apéndice A14.5.

En los sistemas con amortiguamiento clásico, $\beta_n^g = \mathbf{0}$ para todos los modos (ecuación 14.3.4a), lo que implica la satisfacción de la ecuación (14.8.9a). Además, para tales sistemas $\alpha_n^g = -(\Gamma_n/\omega_n)\phi_n$, y la ecuación (14.8.9b) se reduce a

$$\sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\iota} \tag{14.8.10}$$

Ésta es la expansión modal del vector de influencia ι, que apareció por primera vez en la sección 13.1.3.

Ejemplo 14.6

Determine la respuesta del marco de cortante de dos niveles de la figura E10.12.1a con $c = \sqrt{km/200}$, un sistema con amortiguamiento clásico, debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$. Para resolver el problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.8.

Solución Las B_n^g se determinan al sustituir $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ y ψ_n a partir del ejemplo 14.1 en la ecuación (14.8.1):

$$B_1^g = \frac{-\psi_1^T \mathbf{m}\iota}{2\lambda_1 \psi_1^T \mathbf{m}\psi_1 + \psi_1^T \mathbf{c}\psi_1} = 0.9440\sqrt{\frac{m}{k}}\, i \tag{a.1}$$

$$B_2^g = \frac{-\psi_2^T \mathbf{m}\iota}{2\lambda_2 \psi_2^T \mathbf{m}\psi_2 + \psi_2^T \mathbf{c}\psi_2} = -0.1184\sqrt{\frac{m}{k}}\, i \tag{a.2}$$

Si se usa la B_n^g de la ecuación (a), ψ_n, β_n^g y γ_n^g se determinan a partir de la ecuación (14.8.2) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1^g = \mathrm{Re}(2B_1^g\psi_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}_2^g = \mathrm{Re}(2B_2^g\psi_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{b.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1^g = \mathrm{Im}(2B_1^g\psi_1) = \begin{Bmatrix} 0.9440 \\ 1.8880 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2^g = \mathrm{Im}(2B_2^g\psi_2) = \begin{Bmatrix} 0.2369 \\ -0.2369 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{b.2}$$

Al sustituir las β_n^g y γ_n^g de la ecuación (b) en la ecuación (14.8.3), se obtiene la respuesta deseada:

$$\mathbf{u}(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[e^{-\zeta_1\omega_1 t}\begin{Bmatrix}-0.9440\\-1.8880\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t + e^{-\zeta_2\omega_2 t}\begin{Bmatrix}-0.2369\\0.2369\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{2D}t\right] \tag{c}$$

Estas soluciones para $u_j(t)$ se grafican en la figura E14.6.

La respuesta también puede expresarse en términos de las funciones de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$. Con este propósito se usa la ecuación (14.8.8) para obtener

$$\boldsymbol{\alpha}_1^g = \begin{Bmatrix}-0.9428\\-1.8856\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_2^g = \begin{Bmatrix}-0.2357\\0.2357\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{d}$$

que se sustituyen en la ecuación (14.8.7) y resulta

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix}0.6667\\1.3333\end{Bmatrix}h_1(t) + \begin{Bmatrix}0.3333\\-0.3333\end{Bmatrix}h_2(t) \tag{e}$$

donde $h_n(t)$ está dada por la ecuación (14.8.4).

Los vectores α_n^g y β_n^g satisfacen la ecuación (14.8.9):

$$\boldsymbol{\beta}_1^g + \boldsymbol{\beta}_2^g = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{f}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\omega_n\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g - 2\zeta_n\boldsymbol{\beta}_n^g\right] = \omega_1\sqrt{\frac{m}{k}}\begin{Bmatrix}-0.9428\\-1.8856\end{Bmatrix} + \omega_2\sqrt{\frac{m}{k}}\begin{Bmatrix}-0.2357\\0.2357\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \tag{g}$$

lo cual puede verificarse al sustituir ω_1 y ω_2 a partir de la ecuación (f) del ejemplo 14.2.

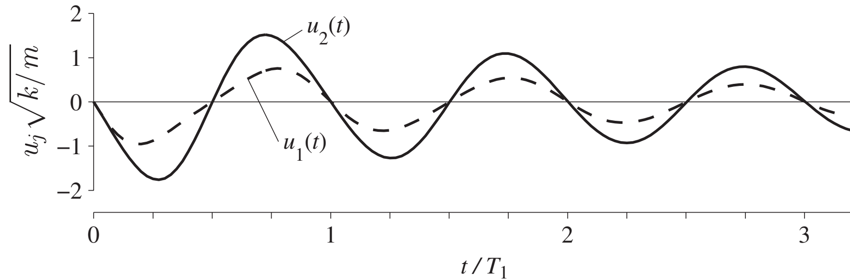


Figura E14.6 Funciones de respuesta al impulso unitario para un sistema con amortiguamiento clásico.

Ejemplo 14.7

Determine la respuesta del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.2a con $c = \sqrt{km}$, debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$.

Solución Las B_n^g se determinan al sustituir las **m**, **c** y ψ_n del ejemplo 14.2 en la ecuación (14.8.1):

$$B_1^g = \frac{-\psi_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_1\psi_1^T\mathbf{m}\psi_1 + \psi_1^T\mathbf{c}\psi_1} = \sqrt{\frac{m}{k}}\ (-0.0383 + 0.9835i) \tag{a.1}$$

$$B_2^g = \frac{-\psi_2^T\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_2\psi_2^T\mathbf{m}\psi_2 + \psi_2^T\mathbf{c}\psi_2} = \sqrt{\frac{m}{k}}\ (0.0383 - 0.1504i) \tag{a.2}$$

Si se usan las B_n^g en la ecuación (a) y ψ_n, β_n^g y γ_n^g se determinan a partir de la ecuación (14.8.2) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1^g = \mathrm{Re}\left(2B_1^g\boldsymbol{\psi}_1\right) = \begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\beta}_2^g = \mathrm{Re}\left(2B_2^g\boldsymbol{\psi}_2\right) = \begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{b.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1^g = \mathrm{Im}\left(2B_1^g\boldsymbol{\psi}_1\right) = \begin{Bmatrix} 0.9828 \\ 1.9671 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2^g = \mathrm{Im}\left(2B_2^g\boldsymbol{\psi}_2\right) = \begin{Bmatrix} 0.2269 \\ -0.3007 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{b.2}$$

Al sustituir las β_n^g y γ_n^g de la ecuación (b) en la ecuación (14.8.3), se obtiene la respuesta total del sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) = {} & e^{-\zeta_1\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t + \begin{Bmatrix} -0.9828 \\ -1.9671 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t\right]\sqrt{\frac{m}{k}} \\ & + e^{-\zeta_2\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix}\cos\omega_{2D}t + \begin{Bmatrix} -0.2269 \\ 0.3007 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{2D}t\right]\sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned} \tag{c}$$

Estas soluciones para $u_j(t)$ se grafican en la figura E14.7.

La respuesta también puede expresarse en términos de las funciones de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$. Con este propósito, se emplea la ecuación (14.8.8) para obtener

$$\boldsymbol{\alpha}_1^g = \begin{Bmatrix} -0.9518 \\ -1.9623 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\alpha}_2^g = \begin{Bmatrix} -0.2493 \\ 0.3077 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{d}$$

que se sustituyen junto con β_n^g de la ecuación (b.1) en la ecuación (14.8.8) y resulta

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0.6862 \\ 1.4147 \end{Bmatrix}h_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.3459 \\ -0.4268 \end{Bmatrix}h_2(t) + \begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_2(t) \tag{e}$$

donde $h_n(t)$ y $\dot{h}_n(t)$ están dadas por la ecuación (14.8.4) y (14.8.5), respectivamente.

Los vectores α_n^g y β_n^g satisfacen la ecuación (14.8.9):

$$\boldsymbol{\beta}_1^g + \boldsymbol{\beta}_2^g = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\omega_n\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g - 2\zeta_n\boldsymbol{\beta}_n^g\right] = {} & \omega_1\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} -0.9518 \\ -1.9623 \end{Bmatrix} - 2\zeta_1\begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix}\right] \\ & + \omega_2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} -0.2493 \\ 0.3077 \end{Bmatrix} - 2\zeta_2\begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{g}$$

lo cual puede verificarse al sustituir ω_1 y ω_2 a partir de la ecuación (f) del ejemplo 14.2.

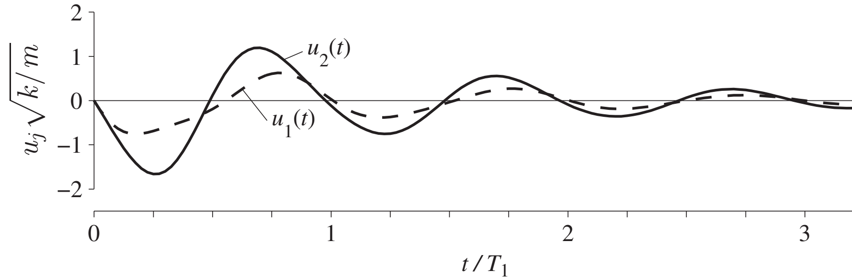


Figura E14.7 Funciones de respuesta al impulso unitario para un sistema con amortiguamiento no clásico.

14.9 RESPUESTA SÍSMICA

Los desplazamientos (relativos al terreno) del sistema en el tiempo t, debidos a la aceleración arbitraria del terreno $\ddot{u}_g(t)$ están dados por la integral de convolución presentada en la ecuación (14.4.1):

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau)\mathbf{h}(t-\tau)\,d\tau \tag{14.9.1}$$

en la que $\mathbf{h}(t)$ se sustituye a partir de la ecuación (14.8.7) para obtener

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{n=1}^{N}\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g \omega_n D_n(t) + \boldsymbol{\beta}_n^g \dot{D}_n(t)\right] \tag{14.9.2}$$

donde

$$D_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g\,(\tau)\,h_n\,(t-\tau)\,d\tau \tag{14.9.3}$$

y

$$\dot{D}_n(t) = \int_0^t \ddot{u}_g\,(\tau)\,\dot{h}_n\,(t-\tau)\,d\tau \tag{14.9.4}$$

Las funciones de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$ y $\dot{h}_n(t)$ para el n-ésimo modo del sistema de 1GDL, se presentaron en las ecuaciones (14.8.4) y (14.8.5), respectivamente.

En las ecuaciones (14.9.2) y (14.9.3), $D_n(t)$ representa la respuesta de deformación del n-ésimo modo del sistema de 1GDL, un sistema de 1GDL con las propiedades de vibración (frecuencia natural ω_n y fracción de amortiguamiento ζ_n) del n-ésimo modo del sistema de VGDL, a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$; $D_n(t)$ se presentó en la sección 13.1.3 y también apareció en la respuesta de los sistemas con amortiguamiento clásico (sección 14.4). La cantidad $\dot{D}_n(t)$ representa la respuesta correspondiente de velocidad relativa del n-ésimo modo del sistema de 1GDL, que se presentó en la sección 6.12. Estas respuestas del sistema de 1GDL, $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$, suelen calcularse mediante uno de los métodos numéricos que se presentaron en el capítulo 5 y no por la evaluación numérica de las integrales de convolución de las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4), debido a que este último enfoque es numéricamente ineficiente.

La respuesta de un sistema de VGDL con amortiguamiento no clásico se ha expresado como una combinación lineal de N pares de términos; el n-ésimo par representa la solución del n-ésimo modo, asociada con el n-ésimo par de valores característicos λ_n y $\bar{\lambda}_n$ y con sus vectores característicos asociados ψ_n y $\bar{\psi}_n$. La primera parte en ese n-ésimo par representa un movimiento en la forma modificada α_n^g con su variación temporal definida por $D_n(t)$, mientras que la segunda parte representa un movimiento en la forma modificada β_n^g con su variación temporal definida por $\dot{D}_n(t)$. Las formas modificadas α_n^g y β_n^g son, obviamente, las funciones de los modos naturales de vibración del sistema, como resulta evidente por las ecuaciones (14.8.2) y (14.8.8), que son independientes de $\ddot{u}_g(t)$ y satisfacen la ecuación (14.8.9).

¿En qué se diferencia la respuesta de los sistemas con amortiguamiento no clásico de la respuesta de los sistemas con amortiguamiento clásico? Tanto $D_n(t)$ como $\dot{D}_n(t)$ aparecen en la ecuación (14.9.2), que define la respuesta sísmica de los sistemas con amortiguamiento no clásico; sin embargo, sólo $D_n(t)$ entra en la ecuación (14.4.2), el resultado correspondiente a los sistemas con amortiguamiento clásico. Para estos sistemas la forma modificada ϕ_n asociada con la contribución del n-ésimo modo de vibración no varía con el

tiempo (ecuación 14.4.2), pero sí lo hace en el caso de los sistemas con amortiguamiento no clásico (ecuación (14.9.2).

Una vez que se han calculado los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$, las fuerzas internas en la estructura pueden determinarse como se describió con anterioridad para los sistemas con amortiguamiento clásico. Las fuerzas en los amortiguadores viscosos (que en ocasiones forman parte de un sistema de amortiguamiento suplementario) pueden determinarse a partir de las propiedades de los amortiguadores y de $\dot{\mathbf{u}}(t)$. Al diferenciar la ecuación (14.9.2), se obtiene una ecuación formal para estas velocidades que involucran a $\dot{D}_n(t)$ y $\ddot{D}_n(t)$. Ambas cantidades se calculan en el proceso de evaluación numérica de $D_n(t)$, utilizando uno de los métodos numéricos presentados en el capítulo 5.

Ejemplo 14.8

Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos de nivel del marco de cortante de la figura E10.12.1a con $c = \sqrt{km/200}$, un sistema con amortiguamiento clásico, sometido a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$. Para resolver el problema, utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.9.

Solución Al sustituir las α_n^g y β_n^g determinadas en el ejemplo 14.6 en la ecuación (14.9.2), se obtienen las ecuaciones para los desplazamientos de nivel:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{Bmatrix} D_1(t) + \begin{Bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix} D_2(t)$$

Observe que este resultado es idéntico al obtenido en el ejemplo 13.3 mediante los métodos clásicos.

Ejemplo 14.9

Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos de nivel del marco de cortante del ejemplo 14.7 sometido a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Solución Al sustituir las α_n^g y β_n^g determinadas en el ejemplo 14.7 en la ecuación (14.9.2), se obtiene la ecuación para los desplazamientos de nivel:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0.6862 \\ 1.4147 \end{Bmatrix} D_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.2029 \\ 0.0766 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{m}{k}}\, \dot{D}_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.3459 \\ -0.4268 \end{Bmatrix} D_2(t) + \begin{Bmatrix} 0.2029 \\ -0.0766 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{m}{k}}\, \dot{D}_2(t)$$

donde $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ representan las respuestas de deformación y de velocidad relativa del n-ésimo modo del sistema de 1GDL; vea las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4).

Ejemplo 14.10

Determine la respuesta de desplazamiento del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.2a con $c = \sqrt{km}$, $m = 100$ kips/g y $k = 2\pi^2 m$, debida al movimiento del terreno de El Centro.

Solución La ecuación que describe la respuesta de desplazamiento de este sistema, que se dedujo en el ejemplo 14.9, contiene a $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$, las respuestas de deformación y velocidad relativa del n-ésimo modo del sistema de 1GDL (ecuaciones 14.9.3 y 14.9.4). Las frecuencias naturales ω_n y las fracciones de amortiguamiento ζ_n de los dos sistemas modales de 1GDL están dadas en términos de m y k por las ecuaciones (f) y (g) del ejemplo 14.2.

Si se sustituye $m = 0.2591$ kip-s²/pulg y $k = 5.1138$ kips/pulg, resulta

$$\omega_1 = 3.203 \text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 6.163 \text{ rad/s} \tag{a}$$

$$T_1 = 1.962 \text{ s} \qquad T_2 = 1.020 \text{ s} \tag{b}$$

$$\zeta_1 = 0.1186 \qquad \zeta_2 = 0.1186 \tag{c}$$

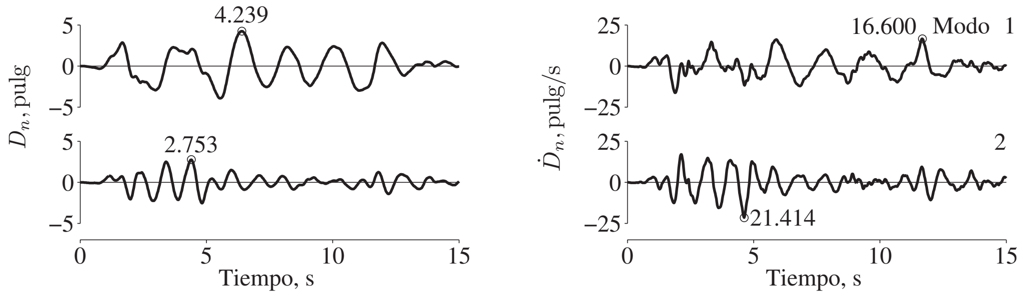


Figura E14.10a Respuestas de deformación $D_n(t)$ y de velocidad relativa $\dot{D}_n(t)$ de los sistemas modales de 1GDL.

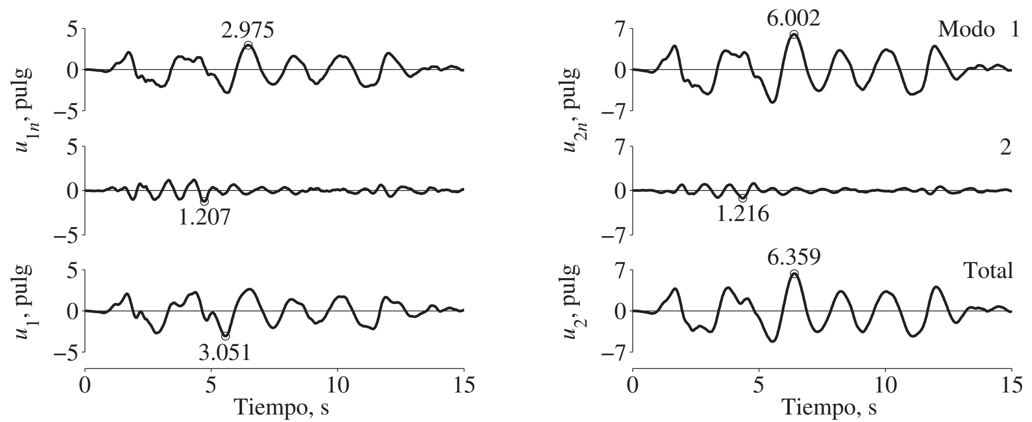


Figura E14.10b Desplazamientos de nivel: contribuciones modales, $u_{1n}(t)$ y $u_{2n}(t)$, y respuestas totales, $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

Los valores numéricos de $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL con el periodo natural T_n y la fracción de amortiguamiento ζ_n para el terreno de El Centro, se determinan mediante el método de aceleración lineal (capítulo 5) con el fin de obtener valores discretos de D_n y $\dot{D}_n$ en cada Δt. Estos cálculos se llevaron a cabo para los dos sistemas modales de 1GDL con las propiedades dadas por las ecuaciones (b) y (c), y los resultados se grafican en la figura. E14.10a.

Al sustituir estos valores numéricos de $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ en la ecuación (a) del ejemplo 14.9, se obtienen los valores numéricos de los desplazamientos de nivel; las contribuciones modales individuales se combinan para obtener la respuesta total mostrada en la figura E14.10b.

14.10 SISTEMAS CON VALORES CARACTERÍSTICOS DE VALOR REAL

El desarrollo anterior condujo a la solución completa para el análisis sísmico de los sistemas con amortiguamiento no clásico, en el que todos los valores característicos λ_n y los vectores característicos asociados tienen valores complejos; las fracciones de amortiguamiento

modal ζ_n para estos modos son menores que la unidad. En general, un sistema con amortiguamiento (clásico o no clásico) puede tener un número par de valores característicos negativos con valor real, cada uno asociado a un vector característico de valor real; las fracciones de amortiguamiento modal ζ_n para estos modos son mayores que la unidad. A continuación se presenta la extensión del análisis anterior para determinar la respuesta sísmica de tales modos sobreamortiguados, aunque se espera que estas respuestas modales sean pequeñas, esta extensión se incluye con el fin de completar el estudio.

14.10.1 Vibración libre†

Considere un par de valores característicos con valor real λ_n y λ_r, de tal forma que $|\lambda_r| > |\lambda_n|$ y los vectores característicos reales asociados ψ_n y ψ_r, determinados mediante la resolución del problema de valor característico de la ecuación (A14.2.8). Este par de valores característicos se expresa en una forma motivada por los valores característicos de un sistema sobreamortiguado de 1GDL (apéndice A14.6) como

$$\lambda_n = -\zeta_n\omega_n + \omega_{nD} \qquad \lambda_r = -\zeta_n\omega_n - \omega_{nD} \tag{14.10.1}$$

donde‡

$$\omega_{nD} = \omega_n\sqrt{\zeta_n^2 - 1} \tag{14.10.2}$$

y ω_n y ζ_n son cantidades con valores reales y positivos que pueden determinarse a partir de los valores característicos conocidos λ_n y λ_r de la siguiente manera.

Si se multiplican las ecuaciones (14.10.1a) y (14.10.1b) y se usa la ecuación (14.10.2), resulta

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n\lambda_r} \tag{14.10.3}$$

Al sumar las ecuaciones (14.10.1a) y (14.10.1b), se obtiene

$$\zeta_n = -\frac{\lambda_n + \lambda_r}{2\omega_n} = -\frac{\lambda_n + \lambda_r}{2\sqrt{\lambda_n\lambda_r}} \tag{14.10.4}$$

Por último, si se resta la ecuación (14.10.1b) de (14.10.1a), resulta

$$\omega_{nD} = \frac{\lambda_n - \lambda_r}{2} \tag{14.10.5}$$

El movimiento representado por una combinación lineal de dos vectores característicos ψ_n y ψ_r con valores reales está dado por

$$\mathbf{u}_n(t) = B_n\psi_n e^{\lambda_n t} + B_r\psi_r e^{\lambda_r t} \tag{14.10.6}$$

†Esta terminología se utiliza para mantener consistencia con la sección 14.7, aunque el sistema vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar (sección 2.2.1).

‡Observe que la notación ω_{nD} representa aquí una cantidad diferente de la considerada en la ecuación (14.5.6).

donde B_n y B_r en este caso son constantes con valores reales (a diferencia de la ecuación 14.7.1, en la que estas constantes tenían valores complejos) que pueden determinarse a partir de la ecuación (14.7.4). Al sustituir la ecuación (14.10.1) y al expresar las funciones exponenciales en términos de funciones hiperbólicas, la ecuación (14.10.6) puede reescribirse como (vea el apéndice A14.7)

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t}[\boldsymbol{\beta}_n \cosh \omega_{nD} t - \boldsymbol{\gamma}_n \operatorname{senh} \omega_{nD} t] \tag{14.10.7}$$

donde

$$\boldsymbol{\beta}_n = B_r \boldsymbol{\psi}_r + B_n \boldsymbol{\psi}_n \tag{14.10.8}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n = B_r \boldsymbol{\psi}_r - B_n \boldsymbol{\psi}_n \tag{14.10.9}$$

Observe la similitud entre las soluciones modales asociadas con un par de valores característicos de valor real (ecuación 14.10.7) y con un par conjugado complejo de valores característicos de valor complejo (ecuación 14.7.6), con la única diferencia de que en el primer caso aparecen funciones hiperbólicas, en contraste con las funciones trigonométricas del segundo caso.

Ejemplo 14.11

Determine las características de vibración libre del sistema mostrado en la figura E14.11a, un marco de dos niveles idealizado como un edificio de cortante con un amortiguador en el segundo nivel, con $c = 2\sqrt{km}$. Demuestre que los vectores característicos satisfacen las propiedades de ortogonalidad.

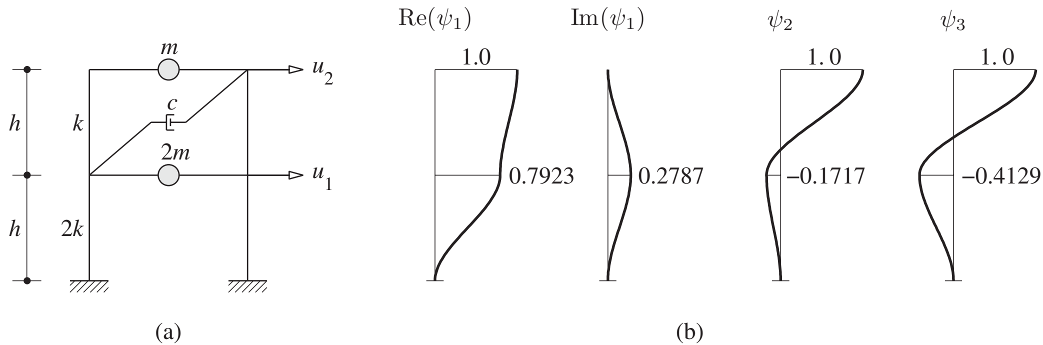


Figura E14.11 (a) Sistema con amortiguamiento no clásico, (b) partes real e imaginaria del vector característico ψ_1; y vectores característicos con valores reales ψ_2 y ψ_3.

Solución Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema son

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{a}$$

El problema de valor característico que debe resolverse está definido por la ecuación (A14.2.8), que se repite aquí por conveniencia:

$$\lambda \mathbf{a} \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{b} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \tag{b}$$

donde las matrices **a** y **b**, definidas en la ecuación (A14.2.5), para este sistema son

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 2m & 0 & c & -c \\ 0 & m & -c & c \end{bmatrix} \tag{c}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{d}$$

El problema de valor característico puede resolverse en forma numérica utilizando un algoritmo apropiado, por ejemplo, la función de Matlab *eig*(**b**, $-$**a**), que resulta en los valores característicos

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}(-0.0501 \pm 0.7955i) \tag{e.1}$$

$$\lambda_2 = -0.7232\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \lambda_3 = -2.1766\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{e.2}$$

Observe que dos de los valores característicos del sistema son un par conjugado complejo, mientras que otros dos tienen valores reales y negativos, con $|\lambda_3| > |\lambda_2|$.

A partir de los valores característicos λ_1 y $\bar{\lambda}_1$, ω_1 y ζ_1 pueden determinarse utilizando la ecuación (14.5.6):

$$\omega_1 = |\lambda_1| = 0.7971\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta_1 = -\frac{\text{Re}(\lambda_1)}{|\lambda_1|} = 0.0629 \tag{f}$$

Al sustituir los valores característicos λ_2 y λ_3 en las ecuaciones (14.10.3) y (14.10.4), se obtiene

$$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2\lambda_3} = 1.2546\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta_2 = -\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2\omega_2} = 1.1556 \tag{g}$$

A partir del valor característico λ_1 en la ecuación (e.1), la frecuencia correspondiente ω_{1D} del sistema amortiguado se determina mediante la ecuación (14.5.5):

$$\omega_{1D} = \text{Im}(\lambda_1) = 0.7955\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{h}$$

Sin embargo, ω_{2D} debe determinarse a partir de la ecuación (14.10.5):

$$\omega_{2D} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2} = 0.7267\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{i}$$

La solución del problema de valor característico (ecuación b) proporciona también los vectores característicos de 4×1, pero sólo los componentes tercero y cuarto (vea la ecuación A14.2.7) son relevantes y se muestran a continuación:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.7923 + 0.2787i \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} -0.1717 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi}_3 = \begin{Bmatrix} -0.4129 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{j}$$

Observe que ψ_1 tiene valores complejos y que ψ_2 y ψ_3 tienen valores reales (figura E14.11b).

Para verificar que los vectores característicos ψ_1 y ψ_2 son ortogonales se calculan los términos individuales en el lado izquierdo de las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2):

$$\boldsymbol{\psi}_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.7923 + 0.2787i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1717 \\ 1 \end{Bmatrix} = m\ (0.7279 - 0.0957i)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^T\mathbf{k}\boldsymbol{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.7923 + 0.2787i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1717 \\ 1 \end{Bmatrix} = k\ (-0.0287 - 0.4222i)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^T\mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.7923 + 0.2787i \\ 1 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1717 \\ 1 \end{Bmatrix} = \sqrt{km}\ (0.4868 - 0.6531i)$$

Al sustituir estos términos individuales en el lado izquierdo de las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2), se obtiene

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\ \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2 = \sqrt{km}\ (-0.7733 + 0.7955i)\ (0.7279 - 0.0957i) + \sqrt{km}\ (0.4868 - 0.6531i) = 0$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{k}\boldsymbol{\psi}_2 - \lambda_1\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 = k\ (-0.0287 - 0.4222i) - k(0.0362 - 0.5753i)\ (0.7279 - 0.0957i) = 0$$

Lo anterior verifica que los vectores característicos ψ_1 y ψ_2 calculados para el sistema son ortogonales; mediante cálculos similares es posible mostrar que otros pares de vectores característicos también son ortogonales.

Además, se reescriben las ecuaciones (h) e (i) para facilitar una observación interesante:

$$\omega_{1D} = 0.9743\sqrt{\frac{2k}{3m}} \qquad \omega_{2D} = 0.8900\sqrt{\frac{2k}{3m}} \tag{k}$$

Si el segundo entrepiso fuera rígido, el sistema de la figura E14.11a se reduciría a un sistema de 1GDL con la frecuencia de vibración natural $= \sqrt{2k/3m}$. Tenga en cuenta que las frecuencias del sistema amortiguado (ecuación k) están cerca de esta frecuencia de referencia debido a que la fracción de amortiguamiento es tan grande que el amortiguador proporciona una gran resistencia a la deformación en el segundo nivel.

Ejemplo 14.12

Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.11a con $c = 2\sqrt{km}$, debida a los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0) = \langle -\frac{1}{2} \quad 2\rangle^T$.

Solución Los vectores del desplazamiento y la velocidad iniciales son

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

Si se sustituyen en la ecuación (14.7.3), junto con los valores de **m**, **c**, λ_n y ψ_n determinados en el ejemplo 14.11, resulta

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{mu}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{cu}(0) + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_1 \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_1} = -0.2747 - 0.2440i \tag{b.1}$$

$$B_2 = \frac{\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{mu}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{cu}(0) + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_2 \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_2} = 3.5317 \tag{b.2}$$

$$B_3 = \frac{\lambda_3 \boldsymbol{\psi}_3^T \mathbf{mu}(0) + \boldsymbol{\psi}_3^T \mathbf{cu}(0) + \boldsymbol{\psi}_3^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)}{2\lambda_3 \boldsymbol{\psi}_3^T \mathbf{m}\boldsymbol{\psi}_3 + \boldsymbol{\psi}_3^T \mathbf{c}\boldsymbol{\psi}_3} = -0.9824 \tag{b.3}$$

Si se usan la B_n de la ecuación (b) y la ψ_n del ejemplo 14.11, β_1 y γ_1 se determinan a partir de la ecuación (14.7.5), y β_2 y γ_2 de las ecuaciones (14.10.8) y (14.10.9) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \text{Re}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} -0.2992 \\ -0.5493 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_1 = \text{Im}(2B_1\boldsymbol{\psi}_1) = \begin{Bmatrix} -0.5397 \\ -0.4880 \end{Bmatrix} \tag{c.1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = B_2\boldsymbol{\psi}_2 + B_3\boldsymbol{\psi}_3 = \begin{Bmatrix} -0.2008 \\ 2.5493 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = B_2\boldsymbol{\psi}_2 - B_3\boldsymbol{\psi}_3 = \begin{Bmatrix} -1.0120 \\ 4.5142 \end{Bmatrix} \tag{c.2}$$

La respuesta a la vibración libre está dada por

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \tag{d}$$

donde $\mathbf{u}_1(t)$ se determina al sustituir β_1 y γ_1 de la ecuación (c.1) en el término $n = 1$ del lado derecho de la ecuación (14.7.5):

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{-0.0629\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.2992 \\ -0.5493 \end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t - \begin{Bmatrix} -0.5397 \\ -0.4880 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t\right] \tag{e}$$

y $\mathbf{u}_2(t)$ se determina mediante la sustitución de β_2 y γ_2 de la ecuación (c.2) en la ecuación (14.10.7):

$$\mathbf{u}_2(t) = e^{-1.1556\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.2008 \\ 2.5493 \end{Bmatrix}\cosh\omega_{2D}t - \begin{Bmatrix} -1.0120 \\ 4.5142 \end{Bmatrix}\operatorname{senh}\omega_{2D}t\right] \tag{f}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (e) y (f) en la ecuación (d), resulta la respuesta total $\mathbf{u}(t)$.

14.10.2 Respuesta al impulso unitario

Recuerde que la aceleración del terreno de impulso unitario $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$ imparte al sistema las velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0) = -\boldsymbol{\iota}$ pero no hay desplazamientos iniciales, es decir, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ (sección 14.3). Para estas condiciones iniciales, las constantes B_n^g están dadas por la ecuación (14.8.1), y la ecuación (14.10.7) puede expresarse en una forma análoga al término del n-ésimo modo en la ecuación (14.8.3):

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}\left[\boldsymbol{\beta}_n^g \cosh\omega_{nD}t - \boldsymbol{\gamma}_n^g \operatorname{senh}\omega_{nD}t\right] \tag{14.10.10}$$

donde

$$\boldsymbol{\beta}_n^g = B_r^g \boldsymbol{\psi}_r + B_n^g \boldsymbol{\psi}_n \tag{14.10.11}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_n^g = B_r^g \boldsymbol{\psi}_r - B_n^g \boldsymbol{\psi}_n \tag{14.10.12}$$

De la misma forma que en la sección 14.8, es preferible expresar la ecuación (14.10.10) en términos de la función de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$ para la deformación de un sistema sobreamortiguado de 1GDL con la frecuencia natural no amortiguada ω_n definida por la ecuación (14.10.3), y la fracción de amortiguamiento ζ_n por la ecuación (14.10.4), respectivamente (vea el apéndice A14.6):

$$h_n(t) = -\frac{1}{\omega_{nD}} e^{-\zeta_n\omega_n t} \operatorname{senh}\omega_{nD}t \tag{14.10.13}$$

y su primera derivada

$$\dot{h}_n(t) = -e^{-\zeta_n\omega_n t}\cosh\omega_{nD} - \zeta_n\omega_n h_n(t) \tag{14.10.14}$$

que puede escribirse como

$$-e^{-\zeta_n\omega_n t}\cosh\omega_{nD} = \dot{h}_n(t) + \zeta_n\omega_n h_n(t) \tag{14.10.15}$$

Ahora, las funciones hiperbólicas que multiplican a los vectores β_n^g y γ_n^g en la ecuación (14.10.10) se sustituyen por las expresiones correspondientes obtenidas de las ecuaciones (14.10.13) y (14.10.15), en términos de $h_n(t)$ y $\dot{h}_n(t)$ con el fin obtener el vector de respuesta al impulso unitario para los desplazamientos $\mathbf{u}_n(t)$:

$$\mathbf{h}_n(t) = -\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g \omega_n h_n(t) + \boldsymbol{\beta}_n^g \dot{h}_n(t)\right] \tag{14.10.16}$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha}_n^g = \zeta_n \boldsymbol{\beta}_n^g - \sqrt{\zeta_n^2 - 1}\, \boldsymbol{\gamma}_n^g \tag{14.10.17}$$

Los vectores β_n^g y γ_n^g están dados por las ecuaciones (14.10.11) y (14.10.12), en las que las B_n^g están definidas por la ecuación (14.8.1). Observe que la forma de la ecuación (14.10.16) es idéntica a la ecuación (14.8.7), pero la ecuación (14.10.17) es una versión modificada de la ecuación (14.8.8).

Ejemplo 14.13

Determine la respuesta del marco de cortante de dos niveles de la figura E14.11a con $c = 2\sqrt{km}$, debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$.

Solución Las B_n^g se determinan al sustituir $\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$ y ψ_n a partir del ejemplo 14.11 en la ecuación (14.8.1):

$$B_1^g = \frac{-\psi_1^T \mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_1 \psi_1^T \mathbf{m}\psi_1 + \psi_1^T \mathbf{c}\psi_1} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,(0.2232 + 0.7311i) \tag{a.1}$$

$$B_2^g = \frac{-\psi_2^T \mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_2 \psi_2^T \mathbf{m}\psi_2 + \psi_2^T \mathbf{c}\psi_2} = -0.5408\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{a.2}$$

$$B_3^g = \frac{-\psi_3^T \mathbf{m}\boldsymbol{\iota}}{2\lambda_3 \psi_3^T \mathbf{m}\psi_3 + \psi_3^T \mathbf{c}\psi_3} = 0.0945\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{a.3}$$

Si se usan la B_n^g en la ecuación (a) y la ψ_n en la ecuación (i) del ejemplo 14.10, β_1^g y γ_1^g se determinan a partir de la ecuación (14.8.2), y β_2^g y γ_2^g de las ecuaciones (14.10.11) y (14.10.12) de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}_1^g = \mathrm{Re}\left(2B_1^g \psi_1\right) = \begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\gamma}_1^g = \mathrm{Im}\left(2B_1^g \psi_1\right) = \begin{Bmatrix} 1.2828 \\ 1.4621 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{b.1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^g = B_2^g \psi_2 + B_3^g \psi_3 = \begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boldsymbol{\gamma}_2^g = B_2^g \psi_2 - B_3^g \psi_3 = \begin{Bmatrix} -0.1319 \\ 0.6353 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{b.2}$$

La respuesta del sistema está dada por

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \tag{c}$$

donde $\mathbf{u}_1(t)$ se determina mediante la sustitución de β_1^g y γ_1^g a partir de la ecuación (b.1) en el término $n = 1$ del lado derecho de la ecuación (14.8.3):

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{-\zeta_1 \omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t - \begin{Bmatrix} 1.2828 \\ 1.4621 \end{Bmatrix}\operatorname{sen}\omega_{1D}t\right]\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{d}$$

y $\mathbf{u}_2(t)$ se determina mediante la sustitución de β_2^g y γ_2^g a partir de la ecuación (b.2) en la ecuación (14.10.10):

$$\mathbf{u}_2(t) = e^{-\zeta_2 \omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\cosh\omega_{2D}t - \begin{Bmatrix} -0.1319 \\ 0.6353 \end{Bmatrix}\operatorname{senh}\omega_{2D}t\right]\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{e}$$

Al sustituir las ecuaciones (d) y (e) en la ecuación (c), se obtiene la respuesta total $\mathbf{u}(t)$. Los términos individuales (ecuaciones d y e) y la respuesta total se grafican en la figura E14.13; tenga en cuenta que $\mathbf{u}_2(t)$ se grafica en una escala diferente de la de $\mathbf{u}_1(t)$.

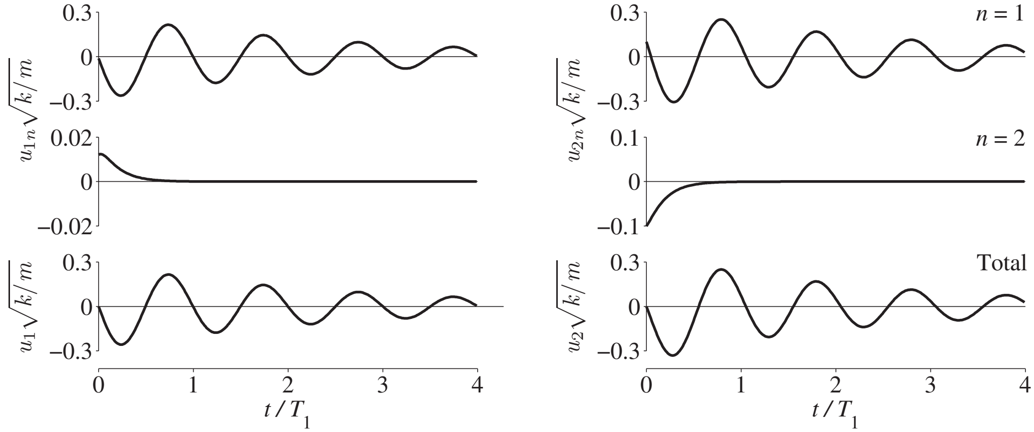


Figura E14.13 Desplazamientos de nivel de un sistema con amortiguamiento no clásico, debidos a la aceleración del terreno de impulso unitario: contribuciones modales $u_{1n}(t)$ y $u_{2n}(t)$, y respuestas totales $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

La respuesta también puede expresarse en términos de las funciones de respuesta al impulso unitario $h_n(t)$. Para este propósito, las ecuaciones (14.8.8) y (14.10.17) dan

$$\boldsymbol{\alpha}_1^g = \zeta_1\boldsymbol{\beta}_1^g - \sqrt{1-\zeta_1^2}\,\boldsymbol{\gamma}_1^g = \begin{Bmatrix} -1.2836 \\ -1.4312 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{f.1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2^g = \zeta_2\boldsymbol{\beta}_2^g - \sqrt{\zeta_2^2-1}\,\boldsymbol{\gamma}_2^g = \begin{Bmatrix} 0.1386 \\ -0.8838 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{f.2}$$

La respuesta del sistema puede determinarse a partir de

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) \tag{g}$$

El primer término $\mathbf{u}_1(t)$ se determina al sustituir α_1^g de la ecuación (f.1) y β_1^g de la ecuación (b.1) en el término $n = 1$ del lado derecho de la ecuación (14.8.7):

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0231 \\ 1.1407 \end{Bmatrix} h_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_1(t) \tag{h}$$

donde $h_1(t)$ y $\dot{h}_1(t)$ están dadas por las ecuaciones (14.8.4) y (14.8.5), respectivamente. El segundo término $\mathbf{u}_2(t)$ en la ecuación (g) se determina al sustituir α_2^g de la ecuación (f.2) y β_2^g de la ecuación (b.2) en la ecuación (14.10.16):

$$\mathbf{u}_2(t) = \begin{Bmatrix} -0.1739 \\ 1.1088 \end{Bmatrix} h_2(t) + \begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_2(t) \tag{i}$$

donde $h_2(t)$ y $\dot{h}_2(t)$ están dadas por las ecuaciones (14.10.13) y (14.10.14), respectivamente.

Los vectores β_n^g y γ_n^g satisfacen la ecuación (14.8.9):

$$\boldsymbol{\beta}_1^g + \boldsymbol{\beta}_2^g = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{j}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \omega_n\left[\boldsymbol{\alpha}_n^g - 2\zeta_n\boldsymbol{\beta}_n^g\right] = \omega_1\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} -1.2836 \\ -1.4312 \end{Bmatrix} - 2\zeta_1\begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix}\right]$$
$$+\ \omega_2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\begin{Bmatrix} 0.1386 \\ -0.8838 \end{Bmatrix} - 2\zeta_2\begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{k}$$

La ecuación (k) puede verificarse al sustituir ω_1 y ω_2 a partir del ejemplo 14.11.

14.10.3 Respuesta sísmica

Para un sistema sometido a una aceleración arbitraria $\ddot{u}_g(t)$ del terreno, la respuesta asociada a una combinación lineal de dos vectores característicos con valores reales ψ_n y ψ_r, y los valores característicos con valores reales asociados λ_n y λ_r, se sigue describiendo mediante el n-ésimo término de la sumatoria de la ecuación (14.9.2). Lo anterior es evidente si $\mathbf{h}(t)$ en la ecuación (14.9.1) se sustituye por $\mathbf{h}_n(t)$, definida en la ecuación (14.10.16). Dadas las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4), $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ representan las respuestas de deformación y de velocidad relativa de un sistema sobreamortiguado de 1GDL con la frecuencia natural no amortiguada ω_n, definida por la ecuación (14.10.3), y la fracción de amortiguamiento de la ecuación (14.10.4); por su parte, los vectores α_n^g y β_n^g están dados por las ecuaciones (14.10.17) y (14.10.11), respectivamente. Tenga en cuenta que las respuestas $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ del sistema de 1GDL suelen calcularse mediante uno de los métodos numéricos presentados en el capítulo 5 y no por medio de la evaluación de las integrales de convolución de las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4).

Ejemplo 14.14

Deduzca las ecuaciones para los desplazamientos de nivel del marco de cortante de la figura E14.11a con $c = 2\sqrt{km}$, sometido a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$.

Solución Al sustituir las α_n^g y β_n^g determinadas en el ejemplo 14.13 en la ecuación (14.9.2), se obtienen las ecuaciones para los desplazamientos de nivel:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 1.0231 \\ 1.1407 \end{Bmatrix} D_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.0539 \\ -0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.1739 \\ 1.1088 \end{Bmatrix} D_2(t) + \begin{Bmatrix} -0.0539 \\ 0.4463 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_2(t)$$

donde $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ representan las respuestas de deformación y de velocidad relativa del n-ésimo modo del sistema de 1GDL; vea las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4). Recuerde que en estas ecuaciones, $h_1(t)$ y $\dot{h}_1(t)$ están dadas por la ecuación (14.8.4) y (14.8.5), respectivamente, mientras que $h_2(t)$ y $\dot{h}_2(t)$ están dadas por la ecuación (14.10.13) y (14.10.14), respectivamente.

14.11 ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

En la parte B del capítulo 13 se presentó el procedimiento del análisis del espectro de respuesta para los sistemas con amortiguamiento clásico, a fin de estimar la respuesta máxima directamente del espectro de respuesta sísmico (o de diseño). Los investigadores también han desarrollado procedimientos del análisis del espectro de respuesta para los sistemas

con amortiguamiento no clásico. La razón para no incluirlos aquí es la siguiente: estos procedimientos requieren dos espectros de respuesta: (1) el espectro de respuesta de pseudo-aceleración (o pseudo-velocidad o deformación), que fue necesario para los procedimientos de análisis del espectro de respuesta presentados en el capítulo 13, y (2) el espectro de respuesta de velocidad relativa. Como este último no está disponible o no se especifica como parte de los criterios de diseño estructural, con frecuencia se aproxima mediante el espectro de respuesta de pseudo-velocidad. Como se mencionó en la sección 6.12, esta aproximación sólo es válida en un intervalo limitado de periodos de vibración y fracciones de amortiguamiento.

14.12 RESUMEN

El análisis precedente de la respuesta sísmica de un sistema de N grados de libertad con amortiguamiento no clásico y matrices de masa, rigidez y amortiguamiento conocidas m, **k** y **c**, a la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$ se resume a continuación como una secuencia de pasos:

1. Calcule los valores característicos λ_n y los vectores característicos ψ_n asociados al resolver el problema de valor característico (ecuación A14.2.8).
2. Determine las frecuencias naturales amortiguada y pseudo-amortiguada, ω_{nD} y ω_n, así como la fracción de amortiguamiento modal ζ_n, a partir de las ecuaciones (14.5.5) y (14.5.6) para un par conjugado complejo de valores característicos, λ_n y $\bar{\lambda}_n$, o con base en las ecuaciones (14.10.3) a (14.10.5) para un par de valores característicos con valor real, λ_n y λ_r.
3. Determine las constantes con valores complejos B_n^g (ecuación 14.8.1).
4. Determine β_n^g, γ_n^g y α_n^g de la siguiente manera: para un par conjugado complejo de valores característicos λ_n y $\bar{\lambda}_n$, calcule el producto de valor complejo $2B_n^g\psi_n$, después determine β_n^g y γ_n^g a partir de la ecuación (14.8.2) y α_n^g de la ecuación (14.8.8). Para un par de valores característicos reales λ_n y λ_r, calcule β_n^g, γ_n^g y α_n^g a partir de las ecuaciones (14.10.11), (14.10.12) y (14.10.17), respectivamente.
5. Calcule la respuesta de deformación $D_n(t)$ y la respuesta de velocidad relativa $\dot{D}_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL con las ω_n y ζ_n determinadas en el paso 2, a la aceleración prescrita del terreno $\ddot{u}_g(t)$ por medio de uno de los métodos numéricos en el tiempo paso a paso (capítulo 5).
6. Calcule los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ a partir de la ecuación (14.9.2), utilizando las α_n^g y β_n^g apropiadas para cada término de la sumatoria; vea el paso 4.

El análisis de los sistemas con amortiguamiento no clásico difiere del de los sistemas con amortiguamiento clásico (sección 13.2.4) en dos formas principales:

1. El problema de valor característico que debe resolverse (ecuación A14.2.8) ahora es de orden $2N$.
2. Además de la deformación $D_n(t)$ del n-ésimo modo del sistema de 1GDL, ahora se requiere su velocidad relativa $\dot{D}_n(t)$. Sin embargo, en una evaluación numérica por pasos de la respuesta de un sistema de 1GDL (capítulo 5), por lo general $\dot{D}_n(t)$ se calcula durante el proceso de obtención de $D_n(t)$.

LECTURAS ADICIONALES

Caughey, T. K. y O'Kelly, M. E. J., "Effect of Damping on the Natural Frequencies of Linear Dynamic Systems", *Journal of the Acoustical Society of America*, **33**, 1961, pp. 1458-1461.

Caughey, T. K. y O'Kelly, M. E. J., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **32**, 1965, pp. 583-588.

Veletsos, A. S. y Ventura, C. E., "Modal Analysis of Non-classically Damped Linear Dynamic Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **14**, 1986, pp. 217-243.

APÉNDICE 14: DEDUCCIONES

A14.1 Constantes de valor complejo: vibración libre de los sistemas con amortiguamiento clásico

Los desplazamientos dados por la ecuación (14.2.3) se repiten aquí por conveniencia:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^{N} \left(B_r \phi_r e^{\lambda_r t} + \bar{B}_r \phi_r e^{\bar{\lambda}_r t} \right) = 2\sum_{r=1}^{N} \text{Re}\left(B_r \phi_r e^{\lambda_r t} \right) \tag{A14.1.1}$$

Estos desplazamientos pueden diferenciarse para obtener la respuesta de velocidad:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{r=1}^{N} \left(\lambda_r B_r \phi_r e^{\lambda_r t} + \bar{\lambda}_r \bar{B}_r \phi_r e^{\bar{\lambda}_r t} \right) \tag{A14.1.2}$$

Si se establece $t = 0$ en las ecuaciones (A14.1.1) y (A14.1.2), resulta

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{r=1}^{N} \left(B_r + \bar{B}_r \right) \phi_r \qquad \dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{r=1}^{N} \left(\lambda_r B_r + \bar{\lambda}_r \bar{B}_r \right) \phi_r \tag{A14.1.3}$$

Con los desplazamientos iniciales $\mathbf{u}(0)$ y las velocidades iniciales $\dot{\mathbf{u}}(0)$ conocidos, cada una de estas dos ecuaciones representa N ecuaciones algebraicas en las $2N$ incógnitas $\text{Re}(B_r)$ e $\text{Im}(B_r)$. Si se multiplican antes ambos lados de las ecuaciones (A14.1.3a) y (A14.1.3b) por $\phi_n^T \mathbf{m}$ y se utiliza la propiedad de ortogonalidad de los modos (ecuación 10.4.1), se obtiene

$$\phi_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}(0) = \left(B_n + \bar{B}_n \right) \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \qquad \phi_n^T \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0) = \left(\lambda_n B_n + \bar{\lambda}_n \bar{B}_n \right) \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \tag{A14.1.4}$$

que puede escribirse como

$$B_n + \bar{B}_n = q_n(0) \qquad \lambda_n B_n + \bar{\lambda}_n \bar{B}_n = \dot{q}_n(0) \tag{A14.1.5}$$

donde se ha utilizado la ecuación (10.8.5), que define el desplazamiento inicial $q_n(0)$ y la velocidad inicial $\dot{q}_n(0)$ de la coordenada modal $q_n(t)$. Las dos ecuaciones (A14.1.5) se resuelven para determinar las partes real e imaginaria de B_n:

$$\text{Re}(B_n) = \frac{q_n(0)}{2} \qquad \text{Im}(B_n) = -\frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n \omega_n q_n(0)}{2\omega_{nD}} \tag{A14.1.6}$$

las cuales conducen a la ecuación (14.2.4) para la constante B_n de valor complejo.

A14.2 Ecuaciones de movimiento de primer orden y el problema de valor característico

La ecuación (14.1) se escribe en forma aumentada:

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{A14.2.1}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{u}_g(t) \tag{A14.2.2}$$

Los dos conjuntos anteriores de ecuaciones pueden combinarse para obtener una formulación estado-espacio de las ecuaciones de movimiento:

$$\mathbf{a}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{b}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}(t) \tag{A14.2.3}$$

en la que $\hat{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{e}(t)$ son vectores de $2N$ elementos definidos como

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{e}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} \tag{A14.2.4}$$

y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son matrices cuadradas de orden $2N$ dadas por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{A14.2.5}$$

Por lo tanto, el sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden (ecuación 14.1), se redujo a un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden (A14.2.3).

La solución de la forma homogénea de la ecuación (A14.2.3) tiene la forma

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\kappa}e^{\lambda t} \tag{A14.2.6}$$

donde λ es un valor característico y κ es el vector característico asociado de $2N$ elementos. Los N elementos inferiores de κ representan los desplazamientos modales ψ deseados y los N elementos superiores representan las correspondientes velocidades modales $\lambda\psi$; es decir,

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \lambda\boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} \tag{A14.2.7}$$

Si se sustituye la ecuación (A14.2.6) en la forma homogénea de la ecuación (A14.2.3), es decir, la ecuación que controla la vibración libre de los sistemas con amortiguamiento no clásico, conduce al problema de valor característico:

$$\lambda\mathbf{a}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{b}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \tag{A14.2.8}$$

Las $2N$ raíces de λ tienen valores reales y negativos o bien se presentan en pares conjugados complejos con partes reales negativas (o iguales a cero); este último hecho puede demostrarse de la siguiente manera: si λ_n y κ_n son un par de valor característico-vector característico, éstos satisfacen

$$(\lambda_n\mathbf{a} + \mathbf{b})\boldsymbol{\kappa}_n = \mathbf{0} \tag{A14.2.9}$$

Si se toma el conjugado de ambos lados y se tiene en cuenta que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen valores reales, es decir, $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ y $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, resulta

$$\left(\bar{\lambda}_n\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n = \mathbf{0} \tag{A14.2.10}$$

lo que implica que $\bar{\lambda}_n$ y $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n$ también satisfacen la ecuación (A14.2.8) y, por lo tanto, representan un par valor característico-vector característico.

†En matemáticas, física, ingeniería eléctrica y teoría del control existen otras versiones populares del análisis estado-espacio que son matemáticamente equivalentes a la que aquí se presenta.

A14.3 Ortogonalidad de los modos

Dado que **a** y **b** en la ecuación (A14.2.3) son matrices simétricas de valor real, los vectores característicos κ_n y κ_r correspondientes a cualquier par de valores característicos distintos λ_n y λ_r pueden mostrarse para satisfacer las relaciones de ortogonalidad

$$\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a} \boldsymbol{\kappa}_r = 0 \qquad \boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{b} \boldsymbol{\kappa}_r = 0 \tag{A14.3.1}$$

Estas relaciones también son válidas para un par conjugado complejo κ_n y $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n$ puesto que los valores característicos asociados λ_n y $\bar{\lambda}_n$ son diferentes. Si se sustituyen las ecuaciones (A14.2.5) y (A14.2.7) en la ecuación (A14.3.1), se llega a las relaciones de ortogonalidad expresadas por las ecuaciones (14.6.1) y (14.6.2).

Caso especial. Para un sistema con amortiguamiento clásico $\psi_n = \bar{\psi}_n = \phi_n$, $\omega_n = \omega_n^o$,

$$\lambda_n = -\zeta_n \omega_n^o + i\omega_n^o \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{A14.3.2}$$

y el problema de valor característico es

$$\mathbf{k}\phi_n = \left(\omega_n^o\right)^2 \mathbf{m}\phi_n \tag{A14.3.3}$$

Al especificar la ecuación (14.5.3) para el n-ésimo par de valor característico y vector característico, y al sustituir ψ_n por ϕ_n, se obtiene

$$\lambda_n^2 \mathbf{m}\phi_n + \lambda_n \mathbf{c}\phi_n + \mathbf{k}\phi_n = \mathbf{0} \tag{A14.3.4}$$

Si se sustituye la ecuación (A14.3.3) para el último término del lado izquierdo de la ecuación (A14.3.4), se combina con el primer término y se hace uso de la ecuación (A14.3.2), se obtiene la relación

$$\mathbf{c}\phi_r = 2\zeta_r \omega_r^o \mathbf{m}\phi_r \tag{A14.3.5}$$

donde el subíndice n se ha sustituido por r. Al multiplicar antes ambos lados de la ecuación (A14.3.5) por ϕ_n^T, y al reconocer que $\psi_n = \phi_n$, resulta

$$\psi_n^T \mathbf{c}\psi_r = \phi_n^T \mathbf{c}\phi_r = 2\zeta_r \omega_r^o \phi_n^T \mathbf{m}\phi_r \tag{A14.3.6}$$

Si se hace uso de la ecuación (A14.3.6), la primera condición de ortogonalidad dada por la ecuación (14.6.1) se reduce a

$$\phi_n^T \mathbf{m}\phi_r = 0 \tag{A14.3.7}$$

Además, la sustitución de la ecuación (A14.3.7) en la ecuación (14.6.2) conduce a la segunda condición de ortogonalidad:

$$\phi_n^T \mathbf{k}\phi_r = 0 \tag{A14.3.8}$$

Las ecuaciones (A14.3.7) y (A14.3.8) son las relaciones de ortogonalidad conocidas para los sistemas con amortiguamiento clásico que se presentaron en la sección 10.4.

A14.4 Constantes de valor complejo: vibración libre de los sistemas con amortiguamiento no clásico

El vector $\hat{\mathbf{u}}$ puede expandirse en términos de los $2N$ vectores característicos

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \boldsymbol{\kappa}_n \hat{q}_n(t) = \boldsymbol{\kappa}\hat{q}(t) \tag{A14.4.1†}$$

†^ Aparece en $\hat{q}_n$ y $\hat{\mathbf{q}}$ para distinguirlas de las coordenadas modales para sistemas con amortiguamiento clásico, que se introdujeron en la sección 10.7.

donde $\kappa = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \cdots \quad \kappa_{2N}]$, los $\hat{q}_n$ son multiplicadores escalares y $\hat{\mathbf{q}} =< \hat{q}_1 \;\; \hat{q}_2 \;\; \cdots \;\; \hat{q}_{2N} >^T$. Los $\hat{q}_n$ deben determinarse para las condiciones iniciales prescritas. La sustitución de la ecuación (A14.4.1) en la forma homogénea de la ecuación (A14.2.3) da

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{b}\boldsymbol{\kappa}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Al multiplicar antes cada término por κ^T, se obtiene

$$(\boldsymbol{\kappa}^T\mathbf{a}\boldsymbol{\kappa})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + (\boldsymbol{\kappa}^T\mathbf{b}\boldsymbol{\kappa})\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Debido a las relaciones de ortogonalidad de la ecuación (14.3.1), las dos matrices de coeficientes son matrices diagonales, lo que resulta en un conjunto de $2N$ ecuaciones desacopladas que controlan a $\hat{q}_n(t)$:

$$A_{nn}\dot{\hat{q}}_n + B_{nn}\hat{q}_n = 0 \tag{A14.4.2}$$

donde

$$A_{nn} = \boldsymbol{\kappa}_n^T\mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}_n \qquad B_{nn} = \boldsymbol{\kappa}_n^T\mathbf{b}\boldsymbol{\kappa}_n \tag{A14.4.3}$$

Al multiplicar antes la ecuación (A14.2.9) por κ_n^T da $B_{nn} = -\lambda_n A_{nn}$, que se sustituye en la ecuación (A14.4.2) para obtener

$$\dot{\hat{q}}_n - \lambda_n\hat{q}_n = 0 \tag{A14.4.4}$$

que es la ecuación que controla a $\hat{q}_n(t)$ asociada con el vector característico κ_n (y el valor característico λ_n). Existe una ecuación acompañante para el vector característico conjugado complejo $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n$. Puede demostrarse que

$$\bar{A}_{nn} = \bar{\boldsymbol{\kappa}}_n^T\mathbf{a}\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n \qquad \bar{B}_{nn} = \bar{\boldsymbol{\kappa}}_n^T\mathbf{b}\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n \tag{A14.4.5}$$

y $\bar{B}_{nn} = -\bar{\lambda}_n\bar{A}_{nn}$. A partir de estas relaciones es posible demostrar que la ecuación acompañante es

$$\dot{\hat{q}}_n - \bar{\lambda}_n\hat{q}_n = 0 \tag{A14.4.6}$$

Las soluciones generales de las ecuaciones (A14.4.4) y (A14.4.6) son

$$\hat{q}_n(t) = B_n e^{\lambda_n t} \qquad \hat{q}_n(t) = \bar{B}_n e^{\bar{\lambda}_n t} \tag{A14.4.7}$$

respectivamente, donde las constantes B_n y $\bar{B}_n$ deben determinarse a partir de los desplazamientos y las velocidades iniciales prescritos que dan comienzo a la vibración libre. Por lo tanto, la respuesta asociada con el par de vectores característicos κ_n y $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n$ está dada por los dos términos correspondientes en la sumatoria de la ecuación (A14.4.1):

$$\hat{\mathbf{u}}_n(t) = B_n\boldsymbol{\kappa}_n e^{\lambda_n t} + \bar{B}_n\bar{\boldsymbol{\kappa}}_n e^{\bar{\lambda}_n t} \tag{A14.4.8}$$

donde las N ecuaciones inferiores son iguales a la ecuación (14.7.1), lo cual se hace evidente después de sustituir las ecuaciones (A14.2.4a) y (A14.2.7). Al combinar estas contribuciones a la respuesta para los N pares de vectores característicos, se obtiene la solución completa de la forma homogénea de la ecuación (A14.2.3):

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \sum_{r=1}^{N} B_r\boldsymbol{\kappa}_r e^{\lambda_r t} + \sum_{r=1}^{N} \bar{B}_r\bar{\boldsymbol{\kappa}}_r e^{\bar{\lambda}_r t} \tag{A14.4.9}$$

Las constantes de valor complejo B_n deben determinarse a partir de las condiciones iniciales

$$\hat{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(0) \\ \mathbf{u}(0) \end{Bmatrix} \tag{A14.4.10}$$

donde $\mathbf{u}(0)$ y $\dot{\mathbf{u}}(0)$ son los vectores de desplazamiento y velocidad iniciales, respectivamente. Si se especifica la ecuación (A14.4.9) para $t = 0$, resulta

$$\hat{\mathbf{u}}(0) = \sum_{r=1}^{N} B_r \boldsymbol{\kappa}_r + \sum_{r=1}^{N} \bar{B}_r \bar{\boldsymbol{\kappa}}_r \tag{A14.4.11}$$

Al multiplicar antes ambos lados de la ecuación (A14.4.11) por $\kappa_n^T \mathbf{a}$, se obtiene

$$\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\hat{\mathbf{u}}(0) = \sum_{r=1}^{N} B_r \boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}_r + \sum_{r=1}^{N} \bar{B}_r \boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\bar{\boldsymbol{\kappa}}_r \tag{A14.4.12}$$

Debido a la condición de ortogonalidad de la ecuación (A14.3.1a), todos los términos de ambas sumatorias desaparecen excepto el término $r = n$ en la primera suma; por lo tanto,

$$\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\hat{\mathbf{u}}(0) = \left(\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}_n\right) B_n$$

Los productos de matriciales de ambos lados de esta ecuación son escalares. Por lo tanto,

$$B_n = \frac{\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\hat{\mathbf{u}}(0)}{\boldsymbol{\kappa}_n^T \mathbf{a}\boldsymbol{\kappa}_n} \tag{A14.4.13}$$

que, mediante la sustitución de las ecuaciones (A14.2.5), (A14.2.7) y (A14.4.10), se reduce a la ecuación (14.7.4).

Caso especial: sistemas con amortiguamiento clásico. Para los sistemas con amortiguamiento clásico, $\psi_n = \phi_n$, $\omega_n = \omega_n^o$, λ_n está dada por la ecuación (A14.3.2), la ecuación (A14.3.5) se multiplica antes por ϕ_r^T y el subíndice r se sustituye por n para obtener

$$\phi_n^T \mathbf{c}\, \phi_n = 2\zeta_n \omega_n^o \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \tag{A14.4.14}$$

y la siguiente versión generalizada de la ecuación (A14.3.6) es válida:

$$\phi_n^T \mathbf{c}\, \mathbf{u}(0) = 2\zeta_n \omega_n^o \phi_n^T \mathbf{m}\, \mathbf{u}(0) \tag{A14.4.15}$$

Al hacer uso de estos resultados y de las ecuaciones (A14.3.2) y (A14.3.6), la ecuación (14.7.4) se reduce a la ecuación (14.2.4).

A14.5 Deducción de la ecuación (14.8.9)

Si se diferencia la ecuación (14.8.3), resulta el vector de velocidad $\dot{\mathbf{u}}(t)$ que se especifica para $t = 0$ con el fin de obtener

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^{N} -\omega_n \left[\zeta_n \boldsymbol{\beta}_n^g + \sqrt{1 - \zeta_n^2}\, \boldsymbol{\gamma}_n^g\right] \tag{A14.5.1}$$

Al expresar el segundo término del lado derecho en términos de α_n^g y β_n^g utilizando la ecuación (14.8.8), se obtiene

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{n=1}^{N} \omega_n \left[\boldsymbol{\alpha}_n - 2\zeta_n \boldsymbol{\beta}_n^g\right] \tag{A14.5.2}$$

Si se impone la condición inicial $\dot{\mathbf{u}}(0) = -\boldsymbol{\iota}$ en esta ecuación, se llega a la ecuación (14.8.9b).

A14.6 Sistema de 1GDL sobreamortiguado

La ecuación característica de la deducción 2.2 (capítulo 2) se reescribe para la fracción de amortiguamiento $\zeta > 1$ como

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_D \tag{A14.6.1}$$

donde

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{A14.6.2}$$

La solución de la ecuación (2.2.1b) es

$$u(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \tag{A14.6.3}$$

que después de sustituir la ecuación (A14.6.1) se convierte en

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(a_1 e^{\omega_D t} + a_2 e^{-\omega_D t}\right) \tag{A14.6.4}$$

Las constantes de integración a_1 y a_2 se determinan al imponer el requisito de que $u(t)$ debe satisfacer el desplazamiento inicial dado y que la velocidad inicial en $t = 0$.

Una aceleración del terreno de impulso unitario $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$ aplicada en el momento $t = 0$ imparte al sistema la velocidad inicial $\dot{u}(0) = -1$ y el desplazamiento inicial $u(0) = 0$. Para estas condiciones iniciales, las constantes son

$$a_1 = \frac{1}{2\omega_D} \qquad a_2 = -\frac{1}{2\omega_D} \tag{A14.6.5}$$

Al sustituir la ecuación (A14.6.5) en la ecuación (A14.6.4), se llega a la respuesta a la vibración libre resultante:

$$u(t) = -\frac{1}{2\omega_D} e^{-\zeta\omega_n t}\left(e^{\omega_D t} - e^{-\omega_D t}\right) \tag{A14.6.6}$$

Las funciones exponenciales dentro de los paréntesis están relacionadas con funciones hiperbólicas de la siguiente manera:

$$e^{\omega_D t} = \cosh\omega_D t + \operatorname{senh}\omega_D t \qquad e^{-\omega_D t} = \cosh\omega_D t - \operatorname{senh}\omega_D t \tag{A14.6.7}$$

Si se sustituyen estas relaciones en la ecuación (A14.6.6), resulta

$$h(t) = -\frac{1}{\omega_D} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{senh}\omega_D t \tag{A14.6.8}$$

donde $h(t)$ indica la respuesta al impulso unitario de un sistema de 1GDL sobreamortiguado.

Si se interpreta la ω_n según lo indica la ecuación (14.10.3) y se cambia la notación de ω_D a ω_{nD} (ecuación 14.10.2), y de ζ a ζ_n (ecuación 14.10.4), la ecuación (A14.6.8) puede reescribirse como la ecuación (14.10.13).

A14.7 Deducción de la ecuación (14.10.7)

Al sustituir la ecuación (14.10.1) en la ecuación (14.10.6) se llega a

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}\left(B_n\psi_n e^{\omega_{nD} t} + B_r\psi_r e^{-\omega_{nD} t}\right) \tag{A14.7.1}$$

Las funciones exponenciales dentro de los paréntesis están relacionadas con funciones hiperbólicas de la siguiente manera:

$$e^{\omega_{nD} t} = \cosh\omega_{nD} t + \operatorname{senh}\omega_{nD} t \qquad e^{-\omega_{nD} t} = \cosh\omega_{nD} t - \operatorname{senh}\omega_{nD} t \tag{A14.7.2}$$

Si se sustituyen estas relaciones en la ecuación (A14.7.1) y se unen los términos que contengan cosh $\omega_{nD}t$ y aquellos en los que aparece senh $\omega_{nD}t$, resulta

$$\mathbf{u}_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t}[(B_r\psi_r + B_n\psi_n)\cosh\omega_{nD}t - (B_r\psi_r - B_n\psi_n)\,\mathrm{senh}\,\omega_{nD}t] \quad \text{(A14.7.3)}$$

Con β_n y γ_n definidos por las ecuaciones (14.10.8) y (14.10.9), la ecuación (A14.7.3) es equivalente a la ecuación (14.10.7).

PROBLEMAS

14.1 Determine las frecuencias naturales, los modos naturales y las fracciones de amortiguamiento modal para el marco de cortante de dos niveles con amortiguamiento de la figura P9.5. La matriz de amortiguamiento de Rayleigh proporciona una fracción de amortiguamiento del 5% en ambos modos. Utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico, desarrollada en la sección 14.5, con el fin de resolver este problema para un sistema con amortiguamiento clásico. Verifique que los vectores característicos son ortogonales. Verifique que los resultados coincidan con la solución del problema 10.6 mediante el análisis modal clásico.

14.2 Determine las frecuencias naturales, los modos naturales y las fracciones de amortiguamiento modal para el marco de cortante de dos niveles de la figura P9.5, el cual tiene un amortiguador sólo en el primer entrepiso con una fracción de amortiguamiento $c_1 = 0.4\sqrt{km}$, donde $k = 24EI/h^3$ es la rigidez del nivel; exprese las frecuencias en términos de m y k. Demuestre que los modos naturales satisfacen las propiedades de ortogonalidad.

14.3 Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del problema 14.1, un sistema con amortiguamiento clásico, debida a los desplazamientos iniciales de la figura P10.8a. Para resolver este problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.7. Verifique que los resultados coincidan con la solución del problema 10.9 mediante el análisis modal clásico.

14.4 Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del problema 14.2, debida a los desplazamientos iniciales de la figura P10.8a.

14.5 Determine la respuesta del marco de cortante de dos niveles del sistema del problema 14.1, un sistema con amortiguamiento clásico, debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$. Para resolver este problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.8. Compare el resultado con la solución dada por las ecuaciones (14.3.6) y (14.3.7) para los sistemas con amortiguamiento clásico.

14.6 Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del problema 14.2 debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$. Verifique la satisfacción de la ecuación (14.8.9).

14.7 Para el marco de cortante de dos niveles del problema 14.1, un sistema con amortiguamiento clásico, excitado por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine la respuesta de desplazamiento de los niveles en términos de $D_n(t)$. Para resolver este problema utilice la teoría de los sistemas con amortiguamiento no clásico desarrollada en la sección 14.9. Compare el resultado con el que se determinó en el problema 13.1.

14.8 Para el marco de cortante de dos niveles del problema 14.2, excitado por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine la respuesta de desplazamiento de los niveles en términos de $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$.

14.9 Determine las frecuencias naturales, los modos naturales y las fracciones de amortiguamiento modal para el marco de dos niveles de la figura P9.5, con amortiguadores $c_1 = 0.6\sqrt{km}$ en el primer entrepiso y $c_2 = 1.2\sqrt{km}$ en el segundo entrepiso, donde $k = 24EI/h^3$ es la rigidez de entrepiso; exprese las frecuencias en términos de m y k. Demuestre que los modos naturales satisfacen las propiedades de ortogonalidad.

14.10 Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del problema 14.9 debida a los desplazamientos iniciales de la figura P10.8a.

14.11 Determine la respuesta a la vibración libre del marco de cortante de dos niveles del problema 14.9 debida a la aceleración del terreno de impulso unitario, $\ddot{u}_g(t) = \delta(t)$. Verifique la satisfacción de la ecuación (14.8.9).

14.12 Para el marco de cortante de dos niveles del problema 14.9, excitado por el movimiento horizontal del terreno $\ddot{u}_g(t)$, determine la respuesta de desplazamiento de los niveles en términos de $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$.

14.13 Considere un edificio de un solo nivel con una masa m, rigidez lateral k y coeficiente de amortiguamiento c (figura 20.2.1a). En una base fija este sistema de 1GDL tiene la frecuencia natural ω_f, el periodo natural $T_f = 0.4$ s y la fracción de amortiguamiento $\zeta_f = 2\%$; se eligió el subíndice f en lugar de n para enfatizar que éstas son las propiedades de la estructura sobre una base fija. Como se muestra en la figura 20.1.1b, este edificio de un nivel está montado sobre una losa de base con masa $m_b = 2m/3$, que a su vez se apoya en un sistema de aislamiento de la base con una rigidez lateral k_b y un amortiguamiento viscoso lineal c_b. El sistema de aislamiento se caracteriza por dos parámetros:

$$T_b = 2\pi \div \sqrt{\frac{k_b}{m + m_b}} \qquad \zeta_b = \frac{c_b}{2\,(m + m_b)\,\omega_b}$$

que están dados: $T_b = 2.0$ s, $\zeta_b = 10\%$.

Determine la respuesta de este sistema con amortiguamiento no clásico al movimiento del terreno de El Centro mediante tres métodos:

1. La resolución de las ecuaciones acopladas de movimiento.
2. El uso de la teoría desarrollada en las secciones 14.5 a 14.9. Compruebe que estos resultados coincidan con los del método 1.
3. El análisis modal del sistema, aproximándolo como clásico amortiguado al despreciar los términos fuera de la diagonal en **C**, la matriz de amortiguamiento en las coordenadas modales (vea la ecuación 10.9.5).

Nota

Las páginas 657 a 882 (capítulos 15 a 23)
se encuentran en el sitio web del libro:

www.pearsonenespañol.com/anilchopra



Método en el dominio de la frecuencia para el análisis de respuesta

AVANCE

En este apéndice se presenta el método en el dominio de la frecuencia para el análisis de la respuesta de los sistemas lineales a excitaciones que varían con el tiempo de manera arbitraria (una alternativa al método del dominio en el tiempo simbolizado por la integral de Duhamel, sección 4.2). Se inicia con la definición de la *función compleja de la respuesta en frecuencia*, que contiene las respuestas de estado estacionario a las fuerzas sinusoidales y cosenoidales deducidas en la sección 3.2 mediante métodos clásicos. Esta función, junto con la forma compleja de la serie de Fourier, proporciona un enfoque alternativo (respecto a la sección 3.13) para determinar la respuesta a una excitación periódica. Cuando la excitación no es periódica, está representada por la *integral de Fourier* que involucra a la *transformada de Fourier* de la excitación. El producto de esta transformada y la función compleja de la respuesta en frecuencia proporciona la transformada de Fourier directa de la respuesta; entonces, la *transformada de Fourier inversa* proporciona la respuesta como una función del tiempo. Lo anterior se conoce como el método en el dominio de la frecuencia para el análisis de la respuesta dinámica.

Las transformadas de Fourier directa e inversa deben evaluarse en forma numérica para los problemas prácticos relacionados con excitaciones que varían con el tiempo de manera arbitraria. Este enfoque numérico conduce al método de la *transformada discreta de Fourier* (DFT por sus siglas en inglés), que es el tema tratado en el resto del apéndice. Después de definir las transformadas discretas de Fourier directa e inversa, se desarrolla un método general para la evaluación numérica de la respuesta, un método que se convirtió en una realidad práctica con la publicación del algoritmo de Cooley-Tukey para la *transformada rápida de Fourier* en 1965. Posteriormente, se analizan los errores en la solución de la transformada discreta de Fourier (que representa la respuesta en estado estacionario a una extensión periódica de la excitación arbitraria) con el objetivo de comprender los requisitos para que la solución sea precisa. Por último, se desarrolla una solución mejorada de la trans-

formada discreta de Fourier para determinar la respuesta "exacta" a partir de la respuesta de estado estacionario mediante la superposición de una solución correctiva.

A.1 FUNCIÓN COMPLEJA DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

A.1.1 Sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso

Considere un sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso que se somete a la fuerza externa $p(t)$. La ecuación de movimiento para el sistema es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{A.1.1}$$

La solución particular de esta ecuación diferencial para una fuerza armónica se presentó en las ecuaciones (3.2.3), (3.2.4) y (3.2.26). Esta solución, conocida como la respuesta de estado estacionario, se repite aquí por conveniencia. El desplazamiento (o deformación) $u(t)$ debido a la fuerza externa $p(t) = p_o$ sen ωt es

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right] \operatorname{sen} \omega t - [2\zeta(\omega/\omega_n)] \cos \omega t}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{A.1.2}$$

y el desplazamiento debido a $p(t) = p_o \cos \omega t$ es

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right] \cos \omega t + [2\zeta(\omega/\omega_n)] \operatorname{sen} \omega t}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{A.1.3}$$

Ahora considere la fuerza externa:

$$p(t) = 1e^{i\omega t} \qquad \text{o} \qquad p(t) = 1(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \tag{A.1.4}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. La ecuación (A.1.4) es una representación compacta de las fuerzas sinu -soidales y cosenoidales. La respuesta de estado estacionario del sistema será el movimiento armónico en la frecuencia de excitación, ω, que puede expresarse como

$$u(t) = H_u(\omega)e^{i\omega t} \tag{A.1.5}$$

donde $H_u(\omega)$ aún debe determinarse. Para hacerlo, se diferencia la ecuación (A.1.5) con el fin de obtener

$$\dot{u}(t) = i\omega H_u(\omega)e^{i\omega t} \qquad \ddot{u}(t) = -\omega^2 H_u(\omega)e^{i\omega t} \tag{A.1.6}$$

y las ecuaciones (A.1.5) y (A.1.6) se sustituyen en la ecuación (A.1.1):

$$H_u(\omega)e^{i\omega t}(-\omega^2 m + i\omega c + k) = e^{i\omega t}$$

Al cancelar el término $e^{i\omega t}$ en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$H_u(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k}$$

que puede expresarse como

$$H_u(\omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right] + i\,[2\zeta(\omega/\omega_n)]} \tag{A.1.7}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$, y $\zeta = c/2m\omega_n$. Recuerde del capítulo 2 que ω_n es la frecuencia natural de vibración y ζ es la fracción de amortiguamiento del sistema.

La ecuación (A.1.7) contiene las respuestas de estado estacionario a las dos fuerzas armónicas $p(t) = p_o$ sen ωt y $p(t) = p_o \cos \omega t$, definidas por las ecuaciones (A.1.2) y (A.1.3). Para demostrar este hecho, la ecuación (A.1.7) se sustituye en la ecuación (A.1.5), que se maneja para entonces obtener (vea la deducción A.1)

$$u(t) = u^c(t) + iu^s(t) \tag{A.1.8}$$

donde

$$u^c(t) = \frac{1}{k}\frac{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]\cos\omega t + [2\zeta(\omega/\omega_n)]\,\text{sen}\,\omega t}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{A.1.9}$$

$$u^s(t) = \frac{1}{k}\frac{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]\text{sen}\,\omega t - [2\zeta(\omega/\omega_n)]\cos\omega t}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \tag{A.1.10}$$

Observe que las ecuaciones (A.1.9) y (A.1.10) son idénticas a las ecuaciones (A.1.3) y (A.1.2), respectivamente, especificadas para $p_o = 1$. Esto implica que (1) la parte real de la ecuación (A.1.5) es la respuesta a $p(t) = 1 \cos \omega t$, la parte real de la fuerza $p(t) = 1e^{i\omega t}$, y que (2) la parte imaginaria de la ecuación (A.1.5) es la respuesta a $p(t) = 1$ sen ωt, la parte imaginaria de la fuerza $p(t) = 1e^{i\omega t}$. Esto demuestra la afirmación al inicio de este párrafo.

Observe que las ecuaciones (A.1.5) y (A.1.7) son una presentación más compacta de la respuesta a la excitación armónica, en relación con las ecuaciones (A.1.2) y (A.1.3). También note que la deducción de la ecuación (A.1.7) presentada con anterioridad es más sencilla que la deducción de las ecuaciones (A.1.2) y (A.1.3), que se presentó en la sección 3.2. Sin embargo, para deducir la función compleja de la respuesta en frecuencia se requiere álgebra compleja, mientras que los métodos clásicos proporcionan las soluciones particulares (ecuaciones A.1.2 y A.1.3) de la ecuación diferencial (A.1.1).

La función $H_u(\omega)$ se conoce como la *función compleja de la respuesta en frecuencia*. Describe la respuesta de estado estacionario del sistema a la fuerza definida por la ecuación (A.1.4a), una fuerza armónica de amplitud unitaria (es decir, $p_o = 1$). $H_u(\omega)$ está definida por la ecuación (A.1.7) y es una función con valores complejos de la frecuencia de excitación y de los parámetros del sistema k, ω_n y ζ.

El valor absoluto de esta función con valores complejos es

$$\frac{|H_u(\omega)|}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{A.1.11}$$

donde $(u_{st})_o \equiv p_o/k = 1/k$. La ecuación (A.1.11) es equivalente a la ecuación (3.2.11) para la amplitud de la respuesta de estado estacionario del sistema a una excitación armónica, que se representa en la figura 3.2.6. Las partes real e imaginaria de $H_u(\omega)$, indicadas mediante Re(·) e Im(·), respectivamente, se relacionan de la siguiente manera:

$$\frac{-\text{Im}[H_u(\omega)]}{\text{Re}[H_u(\omega)]} = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{A.1.12}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación (3.2.12) para el ángulo de fase o el retardo de fase de la respuesta, que se grafica en la figura 3.2.6. Por lo tanto, es evidente que la función compleja de la respuesta en frecuencia define la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta.

El subíndice u en $H_u(\omega)$, que se define mediante la ecuación (A.1.7), indica que esta función describe la deformación u; las funciones complejas de la respuesta en frecuencia pueden obtenerse de manera similar para otras cantidades de respuesta (velocidad $\dot{u}$, aceleración $\ddot{u}$, fuerza elástica restauradora $f_S = ku$, etcétera). Después, el subíndice u se descartará por conveniencia de la notación.

Deducción A.1

Si se sustituye la ecuación (A.1.7) en la ecuación (A.1.5), resulta

$$u(t) = \frac{1}{k}\frac{1}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right] + i\,[2\zeta(\omega/\omega_n)]}e^{i\omega t} \tag{a}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por $[1 - (\omega/\omega_n)^2] - i[2\zeta(\omega/\omega_n)]$, el conjugado complejo del denominador, y al utilizar la ecuación (A.1.4) se obtiene

$$u(t) = \frac{1}{k}\frac{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right] - i\,[2\zeta(\omega/\omega_n)]}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}(\cos\omega t + i\ \mathrm{sen}\ \omega t) \tag{b}$$

Si se multiplican las dos partes del numerador y se unen los términos reales e imaginarios por separado, resultan las ecuaciones (A.1.8) a (A.1.10).

A.1.2 Sistema de 1GDL con amortiguamiento independiente de la frecuencia

La ecuación que controla el movimiento armónico (en la frecuencia ω) de un sistema de 1GDL con amortiguamiento lineal independiente de la frecuencia, presentada en un principio como la ecuación (3.10.3), es

$$m\ddot{u} + \frac{\eta k}{\omega}\dot{u} + ku = p(t) \tag{A.1.13}$$

La respuesta de estado estacionario del sistema a la función de excitación armónica $p(t) = 1e^{i\omega t}$ también está dada por la ecuación (A.1.5). Al sustituir las ecuaciones (A.1.5) y (A.1.6a) en la ecuación (A.1.13) se llega a

$$m\ddot{u} + k(1 + i\eta)u = p(t) \tag{A.1.14}$$

El término complejo $k(1 + i\eta)u$ representa la unión de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento; $k(1 + i\eta)$ se conoce con frecuencia como la *rigidez compleja* del sistema.

Si se sustituyen las ecuaciones (A.1.5) y (A.1.6b) en la ecuación (A.1.14), resulta

$$H_u(\omega)e^{i\omega t}\left[-\omega^2 m + k(1 + i\eta)\right] = e^{i\omega t}$$

Al cancelar el término $e^{i\omega t}$ en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$H_u(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + k(1 + i\eta)}$$

que puede expresarse como

$$H_u(\omega) = \frac{1}{k}\frac{1}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right] + i\eta} \tag{A.1.15}$$

A.2 RESPUESTA A LA EXCITACIÓN PERIÓDICA

En el capítulo 3 se desarrolló un procedimiento para determinar la respuesta de estado estacionario de un sistema de 1GDL a una fuerza periódica. La excitación se separó en sus componentes armónicos (seno y coseno) utilizando la *serie de Fourier* (sección 3.12). A continuación, la respuesta a cada componente de la fuerza se escribió adaptando las ecuaciones (A.1.2) y (A.1.3). Por último, estas respuestas a los términos individuales de la serie de Fourier se combinaron para determinar la respuesta de un sistema lineal a una excitación periódica (sección 3.13). La función compleja de la respuesta en frecuencia proporciona un enfoque alternativo para determinar la respuesta a una excitación periódica. Para definir este método primero se desarrollará una forma alternativa de la serie de Fourier.

A.2.1 Serie compleja de Fourier

Una excitación $p(t)$ que es periódica con periodo T_0 puede separarse en sus componentes armónicos utilizando la *serie compleja de Fourier*:

$$p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j e^{i(j\omega_0 t)} \tag{A.2.1}$$

donde el primer armónico o armónico fundamental en la excitación tiene la frecuencia

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{A.2.2}$$

y $\omega_j \equiv j\omega_0$ es la frecuencia circular del j-ésimo armónico. Los coeficientes de Fourier P_j pueden expresarse en términos de $p(t)$ debido a que las funciones exponenciales son ortogonales (vea la deducción A.2):

$$P_j = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)e^{-i(j\omega_0 t)}\,dt \qquad j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{A.2.3}$$

El coeficiente de valor complejo P_j define la amplitud y la fase del j-ésimo armónico. Observe que la serie compleja de Fourier, ecuaciones (A.2.1) y (A.2.3), es compacta en comparación con la forma tradicional de la serie de Fourier, ecuaciones (3.12.1) a (3.12.5). También note que la función de tiempo se indica con una letra minúscula, y que los coeficientes de Fourier de la función se indican con la misma letra en mayúsculas.

La ecuación (A.2.3) indica que

$$P_{-j} = \overline{P}_j \tag{A.2.4}$$

donde la barra superior indica el complejo conjugado, y

$$P_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)\,dt \tag{A.2.5}$$

En otras palabras, P_0 es el valor promedio de $p(t)$.

A pesar de que la fuerza aplicada $p(t)$ tiene valores reales, cada término del lado derecho de la ecuación (A.2.1) es un producto de un coeficiente de valor complejo y una función exponencial de valor complejo. Sin embargo, puede demostrarse (1) que la suma de cada par de los términos j-ésimo y $-j$-ésimo tiene valores reales a causa de la ecuación (A.2.4),

y (2) que el término $j = 0$ se simplifica como P_0, el cual tiene valor real (ecuación A.2.5). Por lo tanto, la suma de todos los términos adopta valores reales, como debería ser para una $p(t)$ de valores reales.

De manera alternativa, las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.3) pueden deducirse a partir de la forma convencional de la serie de Fourier, como lo representan las ecuaciones (3.12.1) a (3.12.5). Esto se consigue usando el teorema de De Moivre, que relaciona las funciones seno y coseno con las funciones exponenciales de exponente complejo:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \tag{A.2.6}$$

donde $x \equiv j\omega_0 t$. Al sustituir la ecuación (A.2.6) en el j-ésimo término de la serie del seno y el j-ésimo término de la serie del coseno en la ecuación (3.12.1), la suma de los dos términos puede expresarse como $P_j e^{i(j\omega_0 t)} + P_{-j} e^{-i(j\omega_0 t)}$. Éstos son dos términos de la serie de la ecuación (A.2.1), lo que indica que es equivalente a la ecuación (3.12.1).

A.2.2 Respuesta de estado estacionario

La respuesta de un sistema lineal a una fuerza periódica puede determinarse mediante la combinación de las respuestas a los términos de excitación individuales en la serie de Fourier de la ecuación (A.2.1). Para determinar estas respuestas individuales, recuerde que la respuesta a $p(t) = 1e^{i\omega t}$ está dada por la ecuación (A.1.5), donde $H_u(\omega)$ se define mediante la ecuación (A.1.7). Por lo tanto, la respuesta $u_j(t)$ del sistema a una fuerza aplicada igual al j-ésimo término en la serie de —Fourier $p_j(t) = P_j e^{i(j\omega_0 t)}$— se obtiene al reemplazar ω por $j\omega_0$ en las ecuaciones (A.1.5) y (A.1.7), y al multiplicar la ecuación (A.1.5) por P_j, lo que conduce a

$$u_j(t) = U_j e^{i(j\omega_0 t)} \tag{A.2.7}$$

donde

$$U_j = H(j\omega_0) P_j \tag{A.2.8}$$

Si se suman estas respuestas debidas a todos los términos de excitación de la ecuación (A.2.1), resulta la respuesta total:

$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H(j\omega_0) P_j e^{i(j\omega_0 t)} \tag{A.2.9}$$

donde los coeficientes de Fourier P_j están definidos por la ecuación (A.2.3) y la función compleja de la respuesta en frecuencia por la ecuación (A.1.7) o (A.1.15). Observe que la ecuación (A.2.9) es una presentación más compacta de la respuesta a la excitación periódica en comparación con la forma tradicional, ecuación (3.13.6).

El procedimiento simbolizado por la ecuación (A.2.9) se conoce como el método en el dominio de la frecuencia para el análisis de la respuesta estructural a una excitación periódica; éste se muestra de manera esquemática en la figura A.2.1. La excitación $p(t)$ se transforma del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, donde está descrita por los coeficientes de Fourier P_j (ecuación A.2.3). La respuesta al j-ésimo armónico se define mediante la ecuación (A.2.8) en el dominio de la frecuencia. Al sumar las respuestas a todas las excitaciones armónicas se obtiene la respuesta $u(t)$ en el dominio del tiempo (ecuación A.2.9).

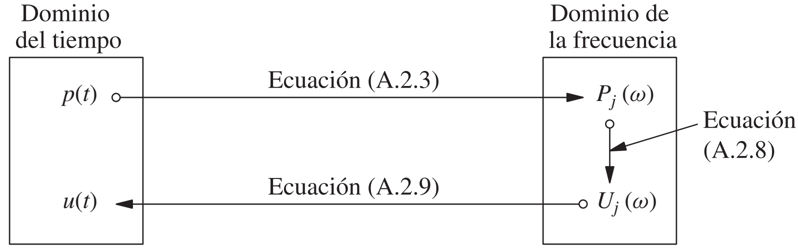


Figura A.2.1 Solución de la respuesta a una excitación periódica mediante la transformación al dominio de la frecuencia.

Deducción A.2

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (A.2.1) por $e^{-i(n\omega_0 t)}$ y se integra sobre un periodo, de 0 a T_0, resulta

$$\int_0^{T_0} p(t)e^{-i(n\omega_0 t)}\,dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j \int_0^{T_0} e^{-i(n\omega_0 t)}e^{i(j\omega_0 t)}\,dt \tag{a}$$

Para evaluar P_j se observa que

$$\int_0^{T_0} e^{-i(n\omega_0 t)}e^{i(j\omega_0 t)}\,dt = \begin{cases} 0 & j \neq n \\ T_0 & j = n \end{cases} \tag{b}$$

Así, todos los términos en el lado derecho de la ecuación (a) son iguales a cero, con excepción del n-ésimo término, lo que conduce a

$$P_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)e^{-i(n\omega_0 t)}\,dt \tag{c}$$

que es idéntica a la ecuación (A.2.3), excepto por un índice que es distinto (n en vez de j).

Ejemplo A.1

Resuelva el ejemplo 3.8 mediante el método en el dominio de la frecuencia.

Solución **a.** *Determine los coeficientes de Fourier.*

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)e^{-i(j\omega_0 t)}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\left[p_o \int_0^{T_0/2} e^{-i(j\omega_0 t)}dt + (-p_o)\int_{T_0/2}^{T_0} e^{-i(j\omega_0 t)}dt\right] \\ &= \frac{-p_o}{ij\omega_0 T_0}\left[e^{-i(j\omega_0 t)}\Big|_0^{T_0/2} - e^{-i(j\omega_0 t)}\Big|_{T_0/2}^{T_0}\right] \end{aligned} \tag{a}$$

Para evaluar los términos exponenciales se observa que $\omega_0 T_0 = 2\pi$ a partir de la ecuación (A.2.2). Por lo tanto,

$$e^{-i(j\omega_0 T_0/2)} = e^{-i(j\pi)} = \begin{cases} +1 & j \text{ par} \\ -1 & j \text{ impar} \end{cases} \tag{b}$$

$$e^{-ij\omega_0 T_0} = e^{-i(2j\pi)} = 1 \tag{c}$$

Usando las ecuaciones (b) y (c), la ecuación (a) se convierte en

$$P_j = \frac{ip_o}{2\pi j}\left[2e^{-i(j\pi)} - 1 - e^{-i(2j\pi)}\right]$$

o

$$P_j = \begin{cases} 0 & j \text{ par} \\ -\dfrac{2p_o i}{j\pi} & j \text{ impar} \end{cases} \tag{d}$$

b. *Determine la respuesta.*

$$U_j = H(j\omega_0)P_j \tag{e}$$

donde P_j está dada por la ecuación (d) y $H(j\omega_0)$ para un sistema no amortiguado está dada por la ecuación (A.1.7), especificada para $\zeta = 0$ y $\omega = j\omega_0$:

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{k}\frac{1}{1-\beta_j^2} \tag{f}$$

donde $\beta_j = j\omega_0/\omega_n$. Al sustituir las ecuaciones (d) y (f) en la ecuación (e), se obtiene

$$U_j = -\frac{2p_o i}{\pi k}\frac{1}{j}\frac{1}{1-\beta_j^2} \tag{g}$$

para los valores impares de j; $U_j = 0$, para los valores pares de j. Si se sustituye la ecuación (g) en la ecuación (A.2.7), resulta la respuesta en el dominio del tiempo:

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \text{ impar}}}^{\infty} -i\frac{1}{j}\frac{1}{1-\beta_j^2} e^{i(j\omega_0 t)} \tag{h}$$

Resulta interesante comparar esta solución con la obtenida anteriormente mediante la serie de Fourier clásica. Al especificar la ecuación (f) del ejemplo 3.8 para los sistemas no amortiguados, se obtiene

$$u(t) = (u_{\text{st}})_o \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{j}\frac{1}{1-\beta_j^2} \operatorname{sen} j\omega_0 t \tag{i}$$

Se observa que los coeficientes de valor complejo de la ecuación (h) tienen una amplitud que es la mitad de la amplitud de los coeficientes de valor real en la ecuación (i). La contribución de los términos $-j$ en la serie compleja de Fourier representan la diferencia.

A.3 RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN ARBITRARIA

A.3.1 Integral de Fourier

En la sección anterior se vio que una excitación periódica puede representarse mediante una serie de Fourier como en las ecuaciones (3.12.1) y (A.2.1). Cuando la excitación $p(t)$ no es periódica, puede representarse por medio de la integral de Fourier:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{A.3.1}$$

donde

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t}\, dt \tag{A.3.2}$$

La ecuación (A.3.2) representa la *transformada de Fourier* (también conocida como la *transformada directa de Fourier*) de la función de tiempo $p(t)$, y la ecuación (A.3.1) es la *transformada inversa de Fourier* de la función de frecuencia $P(\omega)$. Las dos ecuaciones en conjunto se denominan un *par de transformadas de Fourier*. Observe que la función de tiempo se indica con una letra minúscula, y la transformada de Fourier de la función con la misma letra en mayúsculas.

En la ecuación (A.3.1), $p(t)$ se ha expresado como la superposición de funciones armónicas $[P(\omega)/2\pi]e^{i\omega t}$, donde el coeficiente de valor complejo $P(\omega)$ para una $p(t)$ dada se determina a partir de la ecuación (A.3.2). En la superposición se incluye un número infinito de funciones armónicas con frecuencias variables continuas. En contraste, una función periódica se representa como la superposición de un número infinito de funciones armónicas con frecuencias discretas $j\omega_0$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Las ecuaciones (A.3.1) y (A.3.2) pueden deducirse iniciando desde las ecuaciones de la serie de Fourier (A.2.1) y (A.2.3), y dejando que el periodo T_0 tienda al infinito.

A.3.2 Respuesta a una excitación arbitraria

La respuesta de un sistema lineal a la excitación $p(t)$ puede determinarse mediante la combinación de las respuestas a los términos de excitación armónica individuales en la integral de Fourier de la ecuación (A.3.1). La respuesta del sistema a la excitación $P(\omega)e^{i\omega t}$ está dada por $H(\omega)P(\omega)e^{i\omega t}$. La superposición de las respuestas a todos los términos armónicos de la ecuación (A.3.1) proporciona la respuesta total:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \tag{A.3.3}$$

donde

$$U(\omega) = H(\omega)P(\omega) \tag{A.3.4}$$

Esto se conoce como el método en el dominio de la frecuencia para el análisis de la respuesta estructural a una excitación arbitraria. La ecuación (A.3.3) es la transformada inversa de Fourier de $U(\omega)$, el producto de la función compleja de la respuesta en frecuencia y la transformada de Fourier de la excitación.

De acuerdo con la ecuación (A.3.2), resulta claro que la integración directa es adecuada para determinar la transformada directa de Fourier. Por el contrario, para evaluar la transformada inversa de Fourier de la ecuación (A.3.3) es necesario una integración de contorno en el plano complejo. Este proceso de integración no se describe aquí porque no suele ser analíticamente factible para los problemas de dinámica estructural que se plantean en la práctica de la ingeniería.

A.4 RELACIÓN ENTRE LA RESPUESTA COMPLEJA EN LA FRECUENCIA Y LA RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO

En este punto se presenta una breve explicación para desarrollar la relación entre la función compleja de la respuesta en frecuencia $H(\omega)$, que se presentó en las secciones anteriores,

y la función de respuesta al impulso unitario $h(t)$, que se definió en el capítulo 4. $H(\omega)$ describe la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia a una excitación armónica unitaria. $h(t)$ describe la respuesta del sistema en el dominio del tiempo a una excitación impulsiva unitaria, $p(t) = \delta(t)$. Por ejemplo, para un sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso, $H(\omega)$ está dada por la ecuación (A.1.7) y $h(t)$ por la ecuación (4.1.7), la cual se especifica para $\tau = 0$ y se repite aquí por conveniencia:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_D t \tag{A.4.1}$$

Se demostrará que $H(\omega)$ y $h(t)$ forman un par de transformadas de Fourier. Para ello se utilizará el procedimiento del análisis en el dominio de la frecuencia (sección A.3) con el fin de determinar la respuesta a una excitación impulsiva unitaria $p(t) = \delta(t)$. Al sustituir esta $p(t)$ en la ecuación (A.3.2) se obtiene la transformada de Fourier del impulso unitario:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = 1 \tag{A.4.2}$$

Si se sustituye $P(\omega) = 1$ en las ecuaciones (A.3.4) y (A.3.3), resulta

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \tag{A.4.3}$$

Al comparar este resultado con las definiciones de la transformada de Fourier, ecuación (A.3.2), y la transformada inversa de Fourier, ecuación (A.3.1), resulta claro que $h(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $H(\omega)$ y que $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{A.4.4}$$

Observe que la elección del símbolo h para representar la respuesta al impulso unitario y H para indicar la respuesta en frecuencia compleja se ajusta a las notaciones seleccionadas con anterioridad para un par de transformadas de Fourier.

A.5 MÉTODOS DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

El análisis en el dominio de la frecuencia para la respuesta dinámica de las estructuras, desarrollado en el punto A.3, requiere la determinación tanto de la transformada de Fourier de $p(t)$, ecuación (A.3.2), como de la transformada inversa de Fourier de $U(\omega)$, ecuación (A.3.3). La evaluación analítica de estas transformadas directa e inversa de Fourier sólo es posible para las excitaciones descritas mediante funciones simples aplicadas a sistemas estructurales sencillos. Estas integrales deben evaluarse de manera numérica para las excitaciones que varían con el tiempo de manera arbitraria, para los sistemas de vibración complejos o para las situaciones donde la respuesta compleja en la frecuencia (o la respuesta al impulso unitario) se describe en forma numérica. La evaluación numérica requiere truncar estas integrales de intervalo infinito en un intervalo finito, por lo que dicha evaluación es equivalente a aproximar la excitación que varía con el tiempo de manera arbitraria, $p(t)$, mediante una función periódica. Estas ideas se desarrollan a continuación.

A.5.1 Discretización de la excitación

El sistema se excita mediante una fuerza $p(t)$ de duración t_d, como se muestra en la figura A.5.1. El objetivo aquí es determinar el desplazamiento resultante $u(t)$ del sistema, que se supone en estado inicial de reposo. Como la respuesta máxima del sistema (o el máximo absoluto) puede alcanzarse después de terminada la excitación, el análisis debe llevarse a cabo sobre una duración de tiempo T_0 que es más largo que t_d. Si el pico se produce después de que la excitación ha terminado, éste se alcanzará en el primer medio ciclo de la vibración libre, porque el movimiento se reducirá en los ciclos subsecuentes, debido al amortiguamiento. Por lo tanto, se debe elegir

$$T_0 \geq t_d + \frac{T_n}{2} \tag{A.5.1}$$

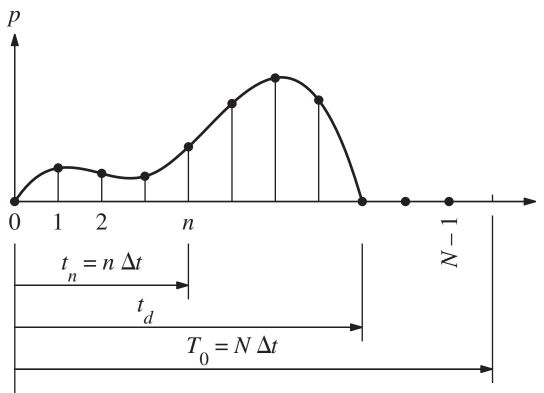


Figura A.5.1 Excitación $p(t)$ y su versión discretizada.

La función de excitación $p(t)$ a lo largo del tiempo de duración T_0 se muestrea en N instantes de tiempo con deltas iguales, numerados desde 0 hasta $N - 1$ (figura A.5.1). El intervalo de muestreo se indica mediante Δt; por lo tanto,

$$T_0 = N\,\Delta t \tag{A.5.2}$$

Entonces, la función de excitación $p(t)$ está definida por un conjunto de valores discretos $p_n \equiv p(t_n) \equiv p(n\,\Delta t)$, que se muestran como la serie de puntos de la figura A.5.1.

El delta de muestreo Δt debe ser suficientemente corto en comparación con los periodos de los armónicos significativos en la excitación y con el periodo natural T_n del sistema. El primer requisito asegura una representación exacta de la excitación y del componente de vibración forzada de la respuesta, y el segundo requisito asegura una representación precisa del componente de vibración libre de la respuesta. El segundo requisito también asegura la representación exacta de la respuesta de los sistemas de 1GDL ligeramente amortiguados a excitaciones con una frecuencia de banda amplia, como la mayoría de los movimientos del terreno registrados durante los sismos; recuerde que el periodo dominante de dicha respuesta es T_n (figura 6.4.1).

A.5.2 Representación de excitaciones con series de Fourier

Considere una extensión periódica de la excitación $p(t)$, con su periodo definido como T_0 (ecuación A.5.1), la cual se muestra de manera esquemática en la figura A.5.2, y sustituya $p(t)$ por un vector p_n que describe la función de fuerza discretizada. A partir de la serie compleja de Fourier para la función $p(t)$ (ecuación A.2.1), el vector p_n puede expresarse (vea la deducción A.3) como una superposición de N funciones armónicas:

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(j\omega_0 t_n)} = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(2\pi nj/N)} \tag{A.5.3}$$

en el que $\omega_0 = 2\pi/T_0$, la frecuencia del primer armónico o armónico fundamental en la extensión periódica de $p(t)$; $\omega_j = j\omega_0$ es la frecuencia circular del j-ésimo armónico; y P_j es un coeficiente de valor complejo que define la amplitud y la fase del j-ésimo armónico. A partir de la ecuación (A.2.3), que define P_j para la función $p(t)$, el P_j asociado con el vector p_n puede expresarse como (vea la deducción A.3)

$$P_j = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(j\omega_0 t_n)}\, \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(2\pi nj/N)} \tag{A.5.4}$$

Las ecuaciones (A.5.3) y (A.5.4) definen un *par de transformadas discretas de Fourier*; el arreglo P_j es la transformada discreta de Fourier de la secuencia de excitación p_n, y el vector p_n es la transformada discreta inversa de la secuencia P_j. Estas ecuaciones pueden interpretarse como aproximaciones numéricas de las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.3).

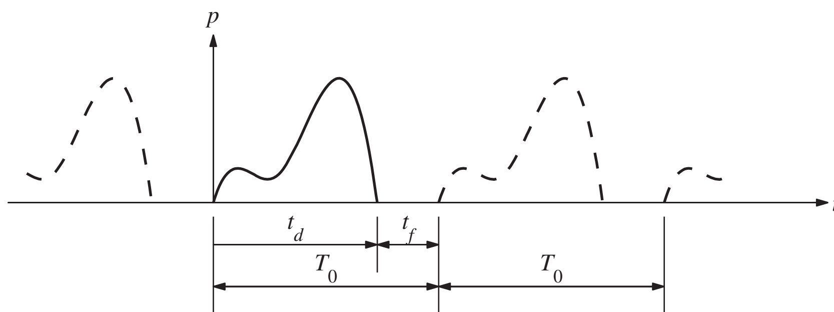


Figura A.5.2 Extensión periódica de $p(t)$.

Las transformadas continua y discreta de Fourier difieren de manera importante. Mientras que la transformada continua (ecuación A.3.1) es una representación verdadera de la función de excitación, la transformada discreta (ecuación A.5.3) representa sólo una versión periódica de la función. La implicación de esta distinción se discutirá más adelante.

Observe que en las ecuaciones (A.5.3) sólo se consideran las frecuencias positivas; por lo tanto, ésta se denomina una expansión de Fourier de un solo lado. En contraste, la ecuación (A.2.1) original es una expansión de Fourier de dos lados que contiene frecuencias positivas y negativas. Así como las frecuencias negativas no tienen ninguna significancia física en la expansión de dos lados, las frecuencias correspondientes a $N/2 < j \leq N-1$ no tienen ninguna significancia física; son las contrapartes de las frecuencias negativas. Si la

sumatoria en la ecuación (A.2.1) se truncara para ir desde $j = -N/2$ hasta $N/2$, ω se extendería desde $-\omega_{N/2}$ hasta $\omega_{N/2}$. Por lo tanto, $\omega_{N/2}$ también define la frecuencia del armónico con frecuencia mayor incluido en la ecuación (A.5.3). Esta frecuencia, que también se indica mediante $\omega_{\text{máx}}$, se conoce como la *frecuencia de Nyquist* y está dada por

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{N}{2}\omega_0 = \frac{\pi}{\Delta t} \tag{A.5.5}$$

donde la frecuencia ω_0 del armónico fundamental o primer armónico se define en la ecuación (A.2.2) que, junto con la ecuación (A.5.2), proporciona la segunda mitad de la ecuación (A.5.5). Los periodos más corto y más largo de los armónicos incluidos en la expansión de Fourier se determinan a partir de las ecuaciones (A.5.5) y (A.2.2) como $2\Delta t$ y T_0, respectivamente. Recuerde que en la expansión de Fourier de dos lados P_j y P_{-j} eran complejos conjugados entre sí (ecuación A.2.4). Por consiguiente, en la expansión de un solo lado, los valores de P_j a ambos lados de $\omega_{N/2}$ son complejos conjugados entre sí:

$$P_j = \overline{P}_{N-j} \qquad \frac{N}{2} < j \le N-1 \tag{A.5.6}$$

A.5.3 Función compleja de la respuesta en frecuencia

Esta función $H(\omega)$ se calcula a partir de las ecuaciones (A.1.7) o (A.1.15) para cada $\omega = \omega_j$, y este valor se indica mediante H_j. Una expansión de Fourier de dos lados incluye tanto las frecuencias positivas como las negativas ω_j y $-\omega_j$ (ecuación A.2.1) y H_{-j} es el complejo conjugado de H_j; esta afirmación puede probarse con facilidad a partir de la ecuación (A.1.7). En una expansión de Fourier de un solo lado se incluyen sólo las frecuencias positivas (ecuación A.5.3); las frecuencias correspondientes a $N/2 < j \le N-1$ son las contrapartes de las frecuencias negativas. Por lo tanto, los valores de H_j a cada lado de $j = N/2$ deben ser complejos conjugados entre sí. Los valores H_j pueden determinarse a partir de la ecuación (A.1.7) con la siguiente interpretación de ω_j:

$$\omega_j = \begin{cases} j\omega_0 & 0 \le j \le N/2 \\ -(N-j)\omega_0 & N/2 < j \le N-1 \end{cases} \tag{A.5.7}$$

A.5.4 Cálculo de la respuesta

En el método transformada discreta de Fourier primero se calcula la respuesta a cada componente armónico de la excitación en el dominio de la frecuencia. Como se ve en la ecuación (A.2.8), esto requiere el cálculo de los productos

$$U_j = H_j P_j \qquad 0 \le j \le N-1 \tag{A.5.8}$$

Entonces, la respuesta $u_n \equiv u(t_n)$ en los instantes de tiempo discretos $t_n \equiv n\,\Delta t$ se calcula a partir de una versión truncada de la ecuación (A.2.9):

$$u_n = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(j\omega_0 t_n)} = \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{i(2\pi nj/N)} \tag{A.5.9}$$

La ecuación (A.5.9) corresponde a la ecuación (A.5.3), lo que indica que la secuencia u_n representa la transformada discreta inversa de la secuencia U_j. Esto se llama la solución clásica de la transformada discreta de Fourier.

A.5.5 Transformada rápida de Fourier

El método de la transformada discreta de Fourier para determinar la respuesta dinámica de un sistema requiere el cálculo de la transformada discreta de la secuencia p_n (ecuación A.5.4) y de la transformada discreta inversa de la secuencia U_j (ecuación A.5.9). Estos cálculos se convirtieron en una realidad práctica con la publicación del algoritmo de Cooley-Tukey para la *transformada rápida de Fourier* (FFT, por sus siglas en inglés) en 1965. Ésta no representa un nuevo tipo de transformada, sino que es un algoritmo bastante eficiente y preciso para calcular las transformadas discretas dicecta e inversa. El algoritmo original requería que el número de puntos, N, fuera una potencia entera de 2, pero se ha generalizado para permitir la consideración de un valor arbitrario de N.

Es importante reconocer que el esfuerzo de cálculo requerido se reduce mucho mediante el uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Una medida de la cantidad de cálculos involucrados en la ecuación (A.5.4) o (A.5.9) es el número de productos de cantidades con valor complejo. Resulta claro que hay N sumas, cada una de las cuales requiere N productos complejos, o que se necesitan N^2 productos para calcular todos los P_j o u_n. El número de productos complejos para el algoritmo original de la transformada rápida de Fourier está dado por $(N/2)\log_2 N$. Por ejemplo, si $N = 2^{10} = 1024$, el algoritmo de la transformada rápida requiere 0.5% del esfuerzo necesario para el cálculo estándar.

A.5.6 Resumen

El procedimiento de la transformada discreta de Fourier clásico para el análisis de la respuesta de un sistema de 1GDL (controlado por la ecuación A.1.1) puede resumirse como una secuencia de pasos:

1. Defina una extensión periódica de la excitación $p(t)$ con su periodo definido como T_0 (ecuación (A.5.1) y discretice $p(t)$ por medio de un arreglo $p_n \equiv p(t_n) \equiv p(n\Delta t)$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.
2. Calcule P_j, la transformada discreta de Fourier de p_n, de acuerdo con la ecuación (A.5.4); $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.
3. Determine la función de la respuesta en frecuencia $H_j \equiv H(\omega_j)$, donde $H(\omega)$ está definida por la ecuación (A.1.7), y ω_j por la ecuación (A.5.7).
4. Calcule U_j que está definida por la ecuación (A.5.8).
5. Calcule la transformada discreta inversa del vector U_j a partir de la ecuación (A.5.9) para obtener la respuesta $u_n \equiv u(t_n)$ en los instantes de tiempo discretos $t_n \equiv n\Delta t$.

Deducción A.3

La extensión periódica de $p(t)$ con el periodo T_0 está representada por la serie de Fourier de la ecuación (A.2.1), con los coeficientes de Fourier definidos por la ecuación (A.2.3). Al truncar la serie para incluir sólo un número finito de funciones armónicas, se obtiene

$$p(t) = \sum_{j=-M}^{M} P_j e^{i(j\omega_0 t)} \tag{a}$$

La frecuencia del armónico mayor incluido en la ecuación (a) es $M\omega_0$.

La integral de la ecuación (A.2.3) se evalúa en forma numérica mediante la regla trapezoidal aplicada a los valores del integrando en los instantes de tiempo discretos $t_n = n\Delta t$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots, N$:

$$P_j = \frac{\Delta t}{T_0}\left[\frac{1}{2}p_0 e^{-i(j\omega_0 t_0)} + \sum_{n=1}^{N-1} p_n e^{-i(j\omega_0 t_n)} + \frac{1}{2}p_N e^{-i(j\omega_0 t_N)}\right] \quad \text{(b)}$$

donde $t_0 = 0\ \Delta t = 0$, $t_n = n\ \Delta t$, y $t_N = N\ \Delta t$. El primer término se reduce a $p_0/2$ y el último término a $p_N/2$ porque ambos exponenciales pueden establecerse iguales en la unidad. Como la secuencia p_n es periódica con periodo N, $p_0 = p_N$, y si se reconoce que $T_0 = N\ \Delta t$, la ecuación (b) puede reescribirse como

$$P_j = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(j\omega_0 t_n)} \quad \text{(c)}$$

Ahora los términos exponenciales en las ecuaciones (a) y (c) se reescriben reconociendo que $\omega_0 = 2\pi/T_0$, $T_0 = N\ \Delta t$ y $t_n = n\ \Delta t$; así

$$j\omega_0 t_n = j\frac{2\pi}{N\ \Delta t}n\ \Delta t = \frac{2\pi nj}{N} \quad \text{(d)}$$

Recuerde que j es el número de frecuencia del armónico y n es el número del paso de tiempo. Al sustituir la ecuación (d) en las ecuaciones (a) y (c), se obtiene

$$p_n = \sum_{j=-M}^{M} P_j e^{i(2\pi nj/N)} \quad \text{(e)}$$

$$P_j = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-i(2\pi nj/N)} \quad \text{(f)}$$

Suponga que se seleccionan los enteros positivos grandes M y N de manera que $2M + 1 = N$ (es decir, el número de frecuencias es igual al número de pasos de tiempo). Entonces, la secuencia P_j también es periódica con periodo N y la sumatoria de la ecuación (e) en el intervalo desde $j = -M$ hasta $j = M$ puede reescribirse como una sumatoria en el intervalo de $j = 0$ a $N - 1$, la cual se presenta sin la demostración correspondiente:

$$p_n = \sum_{j=0}^{N-1} P_j e^{i(2\pi nj/N)} \quad \text{(g)}$$

Lo anterior completa la deducción de las ecuaciones (A.5.3) y (A.5.4).

A.6 ERRORES POSIBLES EN LA SOLUCIÓN CON LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER CLÁSICA

Debe quedar claro que, por lo general, la solución de la transformada discreta de Fourier clásica dada por la ecuación (A.5.9) no representa la respuesta deseada del sistema a la excitación que se muestra en la figura A.5.1. En cambio, representa la respuesta de estado estacionario del sistema a una extensión periódica de la excitación (figura A.5.2). En esta sección se examinan los errores en la solución de la transformada discreta de Fourier

clásica, con el objetivo de comprender los requisitos para que la solución sea precisa. La solución de la transformada de Fourier clásica será cada vez más precisa a medida que la duración t_f de la vibración libre, que se muestra en la figura A.5.2, se vuelva más larga. Esta afirmación debería ser obvia porque una t_f más larga implica un periodo T_0 más largo de la extensión periódica de la excitación, lo que es mejor porque una excitación arbitraria (no periódica) puede interpretarse como una excitación periódica con un periodo infinitamente largo. Sin embargo, con el fin de identificar los factores que influyen en la t_f necesaria para obtener una solución precisa, se presentan resultados numéricos.

Se desea determinar la respuesta dinámica de un sistema de 1GDL con amortiguamiento viscoso, que inicia desde las condiciones de reposo hasta un ciclo completo de una fuerza sinusoidal, $p(t) = p_o$ sen ω_t, y se muestra en la figura A.6.1. Como se mencionó en la sección A.5.1, la respuesta dinámica del sistema debe determinarse en el tiempo de duración $T_0 = t_d + T_n/2$ o en un tiempo más largo (por lo tanto, el menor $t_f = T_n/2$). Sin embargo, también se presentarán las soluciones de la transformada discreta de Fourier con t_f más largos a fin de demostrar la sensibilidad de estas soluciones a la elección de t_f. Con un t_f seleccionado, la extensión periódica de la excitación se muestra a lo largo de un periodo en los intervalos $\Delta t = t_d/40$, y la respuesta se evalúa en los mismos intervalos. Por lo tanto, la frecuencia circular del armónico con frecuencia mayor en la representación de la serie de Fourier de la función de excitación (ecuación A.5.3) será $\omega_{\text{máx}} = 40\pi/t_d$ (a partir de la ecuación A.5.5) y el periodo asociado es $t_d/20$. Todas las transformadas discretas de Fourier en estas soluciones que se presentarán se calcularon mediante las rutinas de la transformada rápida de Fourier en MATLAB.

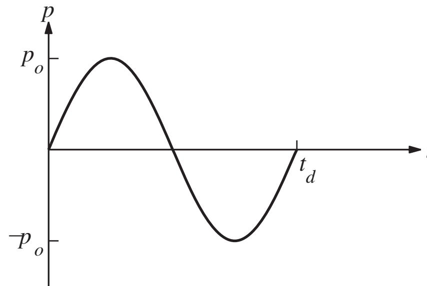


Figura A.6.1

En las figuras A.6.2 y A.6.3 se muestra la extensión periódica de la excitación y la respuesta de desplazamiento del sistema, calculadas mediante el método de la transformada discreta de Fourier clásico utilizando dos valores diferentes de t_f. La duración t_d de la fuerza y el periodo de vibración natural T_n del sistema se eligen de manera que $t_d/T_n = 0.5$; la fracción de amortiguamiento ζ del sistema es del 5%. La escala de tiempo en las gráficas de la historia de la respuesta se normaliza con respecto a t_d, y el desplazamiento $u(t)$ se normaliza con respecto a $(u_{st})_o \equiv p_o/k$, el desplazamiento estático debido al valor máximo de la fuerza aplicada. Los resultados demuestran que la solución de la transformada discreta de Fourier depende de la duración t_f de la vibración libre. A partir de la figura A.6.2, resulta claro que $t_f = 4.75T_n$, que implica que $T_0 = 10.5t_d$, no proporciona un número suficientemente grande de ciclos de vibración libre (durante $t > t_d$) para que el sistema se detenga, dejando un desplazamiento y una velocidad significativos al final del periodo T_0, lo cual viola las condiciones iniciales de reposo. Por lo tanto, no puede esperarse que la solución con la transformada discreta de Fourier sea precisa. En la figura A.6.3 se demuestra que $t_f = 9.75T_n$, que implica

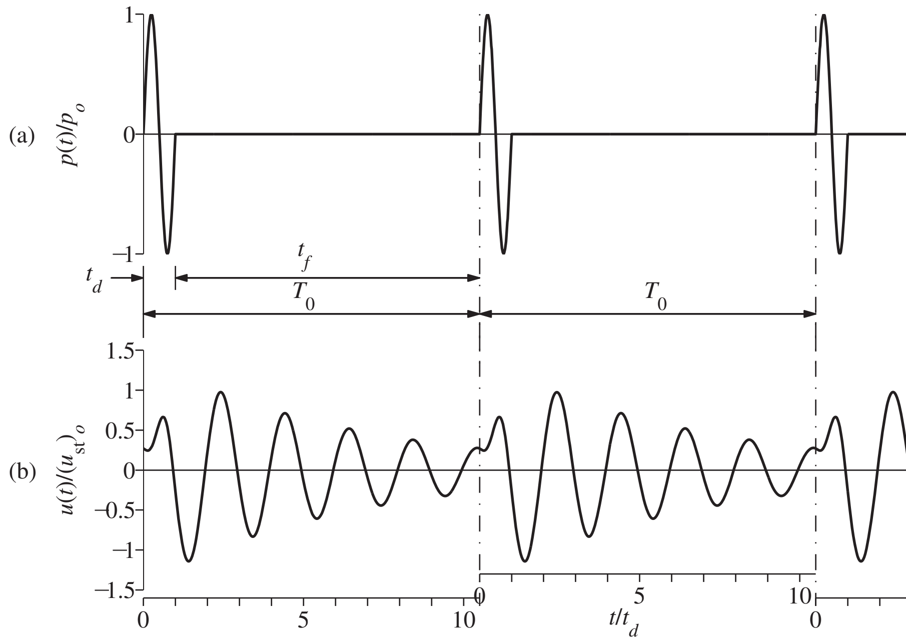


Figura A.6.2 (a) Extensión periódica de $p(t)$ con $t_f = 4.75T_n$ (es decir, $T_0 = 10.5t_d$); (b) respuesta determinada por el método de la transformada discreta de Fourier clásico; $t_d/T_n = 0.5$; $\zeta = 5\%$.

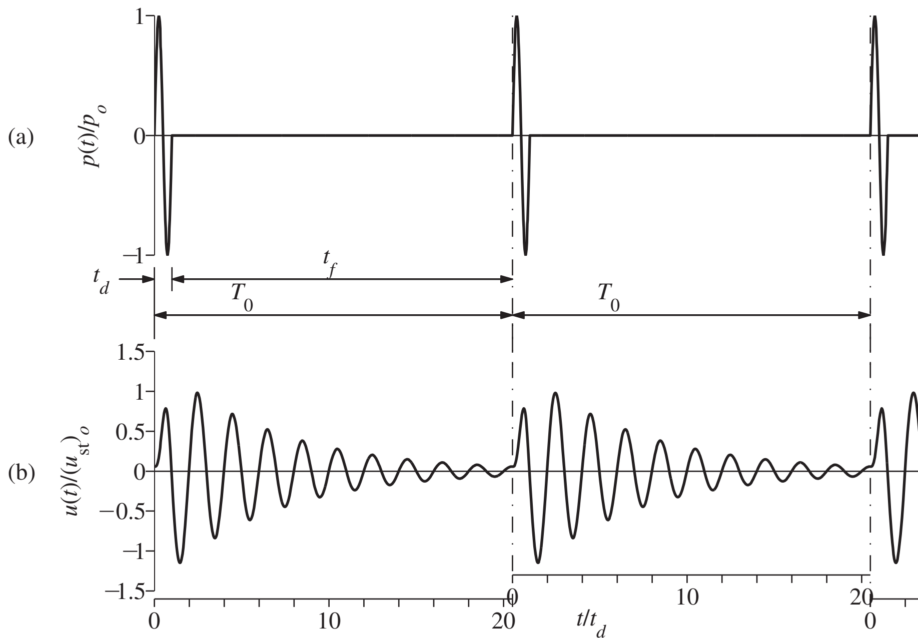


Figura A.6.3 (a) Extensión periódica de $p(t)$ con $t_f = 9.75T_n$ (es decir, $T_0 = 20.5t_d$); (b) respuesta determinada por el método de la transformada discreta de Fourier clásico; $t_d/T_n = 0.5$; $\zeta = 5\%$.

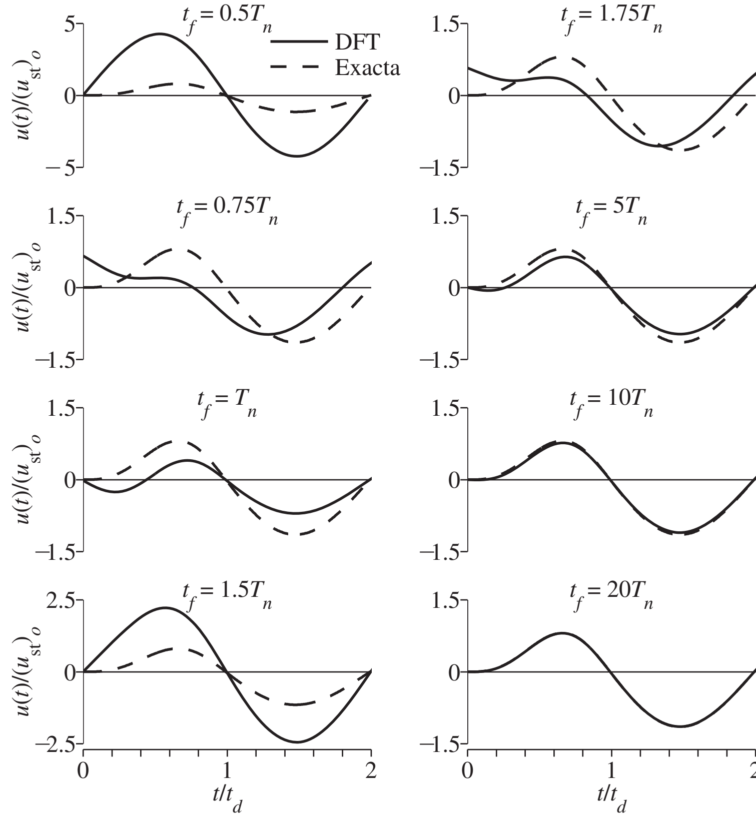


Figura A.6.4 Comparación de las soluciones con la transformada discreta de Fourier (DFT) utilizando diferentes valores de t_f con la respuesta exacta; $t_d/T_n = 0.5$; $\zeta = 5\%$.

$T_0 = 20.5t_d$, proporciona un número adecuado de ciclos de vibración libre del sistema para que su movimiento se reduzca hasta un valor pequeño al final del periodo T_0, satisfaciendo así las condiciones iniciales de reposo. Por lo tanto, se espera que la solución con la transformada discreta de Fourier sea exacta.

Estas suposiciones se confirman con los resultados presentados en la figura A.6.4, donde la solución exacta se compara con las soluciones de la transformada discreta de Fourier usando diferentes valores de t_f. La solución exacta se obtiene resolviendo la ecuación de movimiento mediante los métodos desarrollados en la sección 4.8. Aunque la respuesta se determinó por el método de la transformada discreta de Fourier para el periodo de la función de excitación extendida $T_0 = t_d + t_f$, sólo se grafica su parte inicial en la duración deseada $t_d + T_n/2$. Los resultados muestran con claridad que a menos que la t_f sea bastante larga, la solución de la transformada discreta de Fourier puede diferir bastante de la solución exacta. Para el ejemplo considerado con $t_d/T_n = 0.5$ y $\zeta = 5\%$, los errores en la figura A.6.4 son notables incluso para $t_f = 10T_n$, pero se vuelven insignificantes para $t_f = 20T_n$.

La duración t_f de la vibración libre necesaria para obtener una solución con la transformada discreta de Fourier exacta está controlada por el número de ciclos requeridos para que la vibración libre decaiga hasta tener valores de la velocidad y el desplazamiento cercanos a cero. Para que el movimiento de los sistemas ligeramente amortiguados decaiga lo sufi-

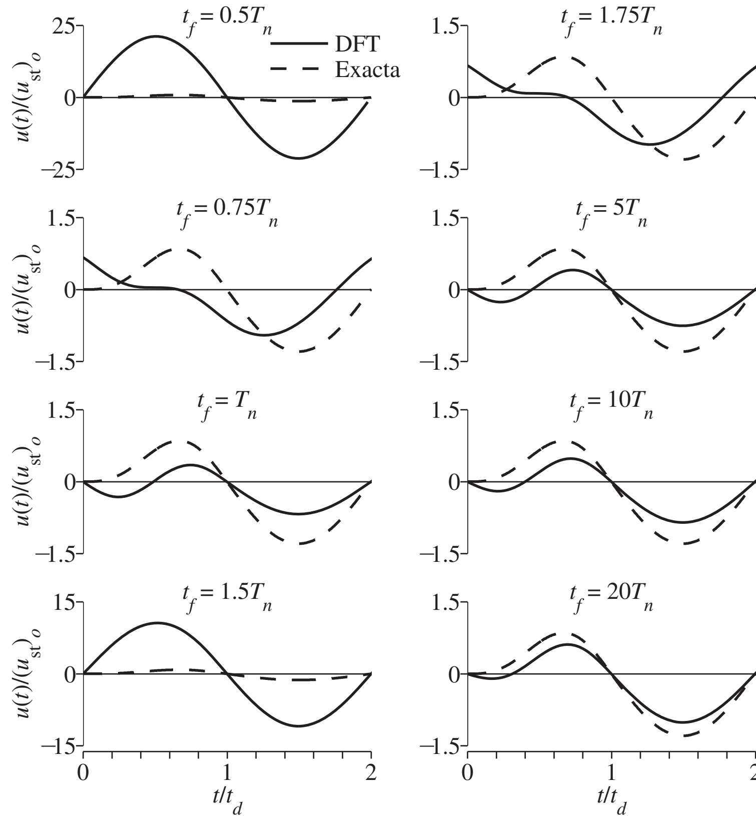


Figura A.6.5 Comparación de las soluciones con la transformada discreta de Fourier (DFT) utilizando diferentes valores de t_f con la respuesta exacta; $t_d/T_n = 0.5$; $\zeta = 1\%$.

ciente, se requieren más ciclos (vea la figura 2.2.4). Esto implica que si se elige t_f como un múltiplo fijo de T_n, se espera que el error en la solución con la transformada discreta de Fourier sea más grande para los sistemas ligeramente amortiguados. En la figura A.6.5 se representan las soluciones con la transformada discreta de Fourier y exacta para los sistemas con $\zeta = 1\%$ con varias opciones diferentes de t_f. Al comparar la figura A.6.5 con la figura A.6.4, se demuestra que para cada valor de t_f/T_n, la solución con la transformada discreta de Fourier es menos precisa para los sistemas con 1% de amortiguamiento en comparación con los sistemas que tienen 5% de amortiguamiento. Por lo tanto, para evitar errores en la solución con la transformada discreta de Fourier por debajo de un límite de tolerancia seleccionado, se requerirían t_f más largas para los sistemas con menos amortiguamiento.

A.7 SOLUCIÓN CON LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER MEJORADA

En la sección A.6 se demostró que la solución con la transformada discreta de Fourier puede errar mucho, a menos que la duración t_f de la vibración libre incluida en la extensión periódica de la excitación sea bastante larga. t_f debe seleccionarse como un múltiplo del periodo de vibración natural T_n del sistema. Este múltiplo depende de la fracción de

amortiguamiento del sistema y de la precisión deseada en la solución con la transformada discrtea de Fourier. Por lo tanto, los cálculos en la transformada discreta de Fourier deben aplicarse para una extensión periódica de la excitación con un periodo T_0 más largo que la duración $t_d + T_n/2$ sobre la que se desea obtener la respuesta; T_0 debe ser mucho más largo que $t_d + T_n/2$ para los sistemas ligeramente amortiguados, en especial para los sistemas con periodo de vibración largo. Por ejemplo, considere un sistema con $T_n = 10$ s y $\zeta = 5\%$, para el que se requiere $t_f = 20T_n$ a fin de alcanzar una precisión suficiente en la solución de la transformada discrtea de Fourier clásica. Si la duración de la excitación, t_d, es 30 s, la respuesta debe calcularse para $T_0 = t_d + 20T_n = 30 + 20(10) = 230$ s, aunque en realidad se necesite la respuesta sólo para $t_d + T_n/2 = 35$ s. Se han desarrollado procedimientos mejorados para evitar el esfuerzo de cálculo adicional, y en apariencia innecesario, requerido en la solución con la transformada discrteta de Fourier clásica.

En el método mejorado el periodo de la extensión periódica de la excitación es igual a la duración en la que realmente se desea conocer la respuesta del sistema (es decir, $T_0 = t_d + T_n/2$); la respuesta de estado estacionario $\tilde{u}(t)$ durante este periodo se calcula mediante el método con la transformada discreta de Fourier clásico;† y la respuesta "exacta" $u(t)$ se obtiene a partir de la respuesta de estado estacionario al superponer una solución correctiva $\upsilon(t)$:

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \upsilon(t) \tag{A.7.1}$$

Suponga que se determina la respuesta $u(t)$ de un sistema a una determinada función de excitación $p(t)$, iniciando con $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = 0$. Sin embargo, como se muestra en la figura A.6.2, la solución con la transformada de Fourier clásica no satisface esas condiciones iniciales. Dado que la excitación durante el periodo T_0 tanto para la solución con la transformada discreta de Fourier como para la respuesta exacta es la misma, la diferencia en las dos soluciones que se muestran en la figura A.6.4 debe surgir de las diferencias en los estados iniciales de los dos movimientos. Por lo tanto, la solución correctiva es tan sólo la solución de vibración libre, lo que garantiza que el desplazamiento inicial y la velocidad del movimiento deseados se ajusten a las condiciones iniciales prescritas. Si el desplazamiento y la velocidad iniciales asociados con la solución con la transformada discreta de Fourier son $\tilde{u}(0)$ y $\dot{\tilde{u}}(0)$, que suelen ser distintos de cero, la solución correctiva es la respuesta de vibración libre debida al desplazamiento inicial $\tilde{u}(0)$ y a la velocidad inicial $\dot{\tilde{u}}(0)$. Esta solución correctiva para los sistemas con amortiguamiento viscoso está dada por la ecuación. (2.2.4) con los cambios apropiados en la notación:

$$\upsilon(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[-\tilde{u}(0)\cos\omega_D t + \left(\frac{-\dot{\tilde{u}}(0) - \zeta\omega_n\tilde{u}(0)}{\omega_D}\right)\operatorname{sen}\omega_D t\right] \tag{A.7.2}$$

donde

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{A.7.3}$$

Este procedimiento mejorado se ilustra mediante su aplicación para determinar la respuesta de un sistema de 1GDL con $\zeta = 5\%$ sometido al ciclo de fuerza sinusoidal con duración t_d considerado anteriormente (figura A.6.1). Se supone que el sistema está en un principio en reposo y su periodo natural $T_n = t_d/1.4$. La respuesta se evalúa para una duración $T_0 = t_d + T_n/2 = 1.4T_n + 0.5T_n = 1.9T_n$. El delta de muestreo se elige como antes, $\Delta t = t_d/40$. En la figura A.7.1 se muestra el desplazamiento de estado estacionario $\tilde{u}(t)$, obtenido mediante el procedimiento con la transformada discreta de Fourier clásico.

†A partir de este punto, la solución de la transformada discreta de Fourier clásica se indica mediante $\tilde{u}(t)$ para distinguirla de la solución "exacta" $u(t)$.

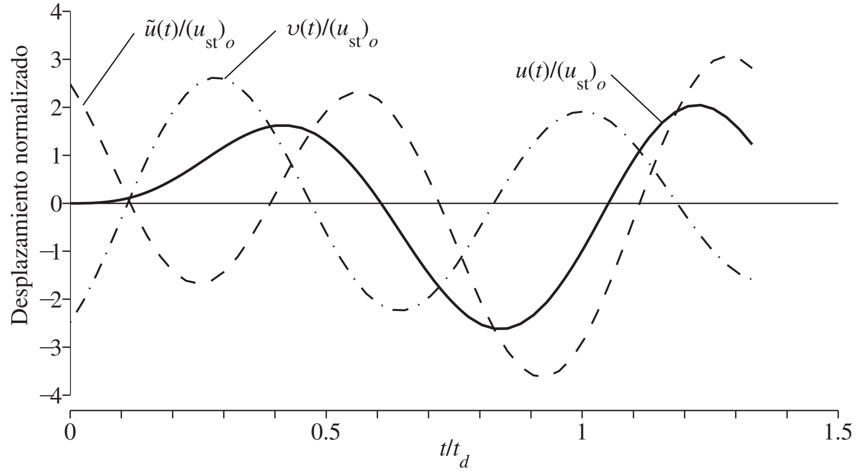


Figura A.7.1 Respuesta de estado estacionario $\tilde{u}(t)$, solución correctiva $\upsilon(t)$, y respuesta "exacta" $u(t)$; $t_d/T_n = 1.4$ (es decir, $T_0 = 1.9\ T_n$); y $\zeta = 5\%$. (Adaptada de Veletsos y Ventura, 1985).

El valor inicial de este desplazamiento es $\tilde{u}(0) = 2.486(u_{st})_o$ y la velocidad inicial† es $\dot{\tilde{u}}(0) = -1.761\omega_n(u_{st})_o$. Si se sustituyen estos valores de $\tilde{u}(0)$ y $\dot{\tilde{u}}(0)$ en la ecuación (A.7.2), resulta la solución correctiva $\upsilon(t)$ mostrada en la figura A.7.1. La respuesta "exacta" deseada, que se determina mediante la combinación de $\tilde{u}(t)$ y $\upsilon(t)$ de acuerdo con la ecuación (A.7.1), también se muestra en la figura A.7.1. Es en esencia idéntica a la solución analítica obtenida mediante la resolución de la ecuación diferencial del movimiento por los métodos de la sección 4.8.

A.8 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

El procedimiento con la transfromada discreta de Fourier mejorado puede extenderse con facilidad para determinar la respuesta de los sistemas de varios grados de libertad para los que es aplicable el método de superposición modal clásico. Como se muestra en los capítulos 12 y 13, las ecuaciones de movimiento para los sistemas con amortiguamiento clásico pueden transformarse en un conjunto de ecuaciones no acopladas en coordenadas modales, tantas ecuaciones como el número de grados de libertad en el sistema. Cada ecuación modal tiene la misma forma que la ecuación que controla el movimiento de un sistema de 1GDL. Por lo tanto, cada ecuación modal puede resolverse mediante el método con la transformada discreta de Fourier clásico y combinarse con la solución correctiva descrita en la sección A.7 para determinar las respuestas modales en forma precisa. Por lo tanto, el método en el dominio de

†La velocidad inicial está dada por

$$\dot{\tilde{u}} = -\frac{4\pi}{T_0}\sum_{j=0}^{N/2} j\,\mathrm{Im}(U_j) \qquad \text{(A.7.4)}$$

en la que $\mathrm{Im}(U_j)$ indica la parte imaginaria de U_j. La ecuación (A.7.4) se obtiene al diferenciar la ecuación (A.5.9), haciendo uso de los siguientes hechos: $j\omega_0 = 2\pi j/T_0$ y los valores de U_j para $j = N/2 + 1, N/2 + 2, ..., N - 1$ son los conjugados complejos de aquellos para $j = N/2 - 1, N/2 - 2, ..., 1$, respectivamente.

la frecuencia puede utilizarse para determinar las respuestas modales (paso 3a de la sección 12.5), pero los pasos restantes del procedimiento del análisis modal permanecen sin cambio.

Los investigadores también han desarrollado procedimientos con la transformada discreta de Fourier para el análisis de sistemas con amortiguamiento no clásico, ya sean con parámetros constantes o dependientes de la frecuencia. La última situación se plantea en el análisis dinámico de estructuras, incluyendo los efectos de la interacción suelo-estructura o de la interacción fluido-estructura.

LECTURAS ADICIONALES

Bergland, G. D., "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform", *IEEE Spectrum*, **6**, 1969, pp. 41-52.

Blackwell, R., *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978, pp. 232-236.

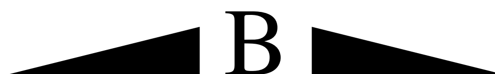
Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

Clough, R. W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993, capítulos 4, 6 y 12.

Cooley, J. W. y Tukey, J. W., "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation*, **19**, 1965, pp. 297-301.

Humar, J. L., *Dynamics of Structures*, CRC Press/Balkema, Leiden, Países Bajos, 2012, capítulo 9.

Veletsos, A. S. y Ventura, C. E., "Dynamic Analysis of Structures by the DFT Method", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **111**, 1985, pp. 2625-2642.



Notación

Todos los símbolos utilizados en este libro se definen la primera vez que aparecen. Para la conveniencia del lector, este apéndice (dividido en cuatro partes para seguir la organización del texto) contiene los significados principales de las notaciones utilizadas comúnmente. Se advierte que algunos símbolos indican más de una cantidad, pero el significado resultará claro cuando se lea en su contexto.

Abreviaturas

1GDL	un solo grado de libertad
AER	análisis del espectro de respuesta
AHR	análisis de la historia de la respuesta
AHRMD	análisis de la historia de la respuesta modal desacoplada
APM	análisis pushover modal
CM	centro de la masa
CQC	combinación cuadrática completa
EC	*Eurocódigo 8*
FDT	transformada discreta de Fourier
FFT	transformada rápida de Fourier
GDL	grado de libertad
IBC	*Código Internacional de Construcción*
NBCC	*Código Nacional de Construcción de Canadá*
PDN	procedimiento dinámico no lineal
PEN	procedimiento estático no lineal
RCDF	*Código de Construcciones del Distrito Federal*
SRSS	raíz cuadrada de la suma de los cuadrados
UBC	*Código Uniforme de Construcción*
VGDL	varios grados de libertad

Acentos

$\bar{(\;)}$	factor de contribución modal para $(\;)$
$\check{(\;)}$	valor desplazado de $(\;)$
$\dot{(\;)}$	$\frac{d}{dt}(\;)$
$\hat{\mathbf{k}}$	condensada $\mathbf{k}$
$\tilde{(\;)}$	aproximación a $(\;)$
$\tilde{(\;)}$	generalizada $(\;)$

Prefijos

δ, $\boldsymbol{\delta}$	incremento en un paso de tiempo extendido
$\delta(\cdot)$	$(\cdot)$virtual
Δ, $\boldsymbol{\Delta}$	incremento en un paso de tiempo

Subíndices

A	aceleración
b	base; viga; sistema de aislamiento de la base
c	columna; solución complementaria
cr	crítico
d	duración
D	amortiguamiento; amortiguado; desplazamiento
e	excéntrico; elemento
ef	efectivo
eq	equivalente
f	sistema de base fija
F	fricción
g	terreno
i	número de pasos de tiempo; número máximo
i, j	número de entrepiso; número de nivel; GDL; número de marco
I	inercia; entrada
K	cinética
m	valor máximo para los sistemas inelásticos; máximo
n	natural, número de modo
o	valor máximo
p	solución particular
sec	secante
st	estático
S	resorte (elástico o inelástico); deformación
T	tangente; transmitido
V	velocidad
x, y, θ	direcciones o componentes
y	ceder
Y	cedencia

Superíndices

s	cuasi-estático
st	estático
t	total

PARTE I: CAPÍTULOS 1-8

Símbolos romanos

a	vea la tabla 5.3.1
a_1, a_2	constantes arbitrarias
a_1, a_2, a_3	vea la tabla 5.4.2 o 5.7.1
a_j	coeficientes de los cosenos de Fourier
a_y	f_y/m
a_0	coeficiente de Fourier
A	constante de integración; constante arbitraria; coeficiente en la ecuación (5.2.5); ordenada del espectro de pseudo-aceleración
A'	coeficiente en la ecuación (5.2.5)
$A(t)$	pseudo-aceleración
A_y	$\omega_n^2 u_y$
b	vea la tabla 5.3.1; constante de valor complejo
b_j	coeficientes de los senos de Fourier
B	constante de integración; constante arbitraria; coeficiente en la ecuación (5.2.5)
B'	coeficiente en la ecuación (5.2.5)
B_1, B_2	constantes arbitrarias

c	coeficiente de amortiguamiento
$\tilde{c}$	amortiguamiento generalizado
c_{cr}	coeficiente de amortiguamiento crítico
C	constante arbitraria; coeficiente en la ecuación (5.2.5)
C'	coeficiente en la ecuación (5.2.5)
D	constante arbitraria; coeficiente en la ecuación (5.2.5); ordenada del espectro de deformación
D'	coeficiente en la ecuación (5.2.5)
D_y	ordenada del espectro de deformación de cedencia
e	excentricidad de masa en rotación
E	módulo de elasticidad
E_D	energía disipada por amortiguamiento
E_F	energía disipada por fricción
E_I	energía de entrada
E_K	energía cinética
E_{Ko}	energía cinética máxima
E_S	energía de deformación
E_{So}	energía de deformación máxima
E_Y	energía disipada por cedencia
$EI(x)$	rigidez a la flexión
f	frecuencia de excitación (Hz)
f_D	fuerza de amortiguamiento
f_I	fuerza de inercia
$f_I(x, t)$	fuerzas de inercia distribuidas
f_{Ij}	fuerza de inercia en el grado de libertad j
f_{jo}	valor máximo de la fuerza en el j-ésimo nivel
f_n	frecuencia natural (no amortiguada)(Hz)
$f_o(x)$	valor máximo de $f_S(x, t)$
f_S	fuerza restauradora elástica o inelástica; fuerza estática equivalente
$(f_s)^j$	f_s después de j ciclos de iteración
$(\hat{f}_s)_i$	vea la ecuación (5.7.10)
$(f_S)_i$	valor de f_s en el tiempo i
$\tilde{f}_S(u)$	definida por la ecuación (7.3.3)
f_{So}, f_o	valor máximo de $f_S(t)$
f_T	fuerza transmitida
f_y	resistencia a la cedencia
$\bar{f}_y$	resistencia a la cedencia normalizada
F	fuerza de fricción
g	aceleración debida a la gravedad
h	altura de un marco de un nivel; altura del nivel
$h(t)$	respuesta al impulso unitario
$H(\omega)$	respuesta compleja en la frecuencia
i	número de pasos de tiempo
I	segundo momento de área
$\mathcal{I}$	magnitud del impulso
I_b	I para una viga
I_c	I para una columna
I_O	momento de inercia alrededor de O
k	rigidez o constante del resorte
$\mathbf{k}$	matriz de rigidez
$\hat{k}$	vea la ecuación (5.3.5) o (5.4.11)
$\tilde{k}$	rigidez generalizada
k_i	$(k_i)_T$
$\hat{k}_i$	definida en la ecuación (5.7.6)
k_j	rigidez del j-ésimo entrepiso
k_T	rigidez tangente
$\hat{k}_T$	definida en la ecuación (5.7.8)
$k_T^{(j)}$	rigidez tangente en $u^{(j)}$
L	ancho del marco, longitud de viga o torre
$\tilde{L}$	vea las ecuaciones (8.3.12) y (8.4.12)
$\tilde{L}^\theta$	definida en la ecuación (8.4.18)
$m(x)$	masa por unidad de longitud
m	masa
$\mathbf{m}$	matriz de masa
$\tilde{m}$	masa generalizada
m_e	masa giratoria excéntrica
m_j	masa en el j-ésimo grado de libertad o en el j-ésimo nivel
$\mathcal{M}(x, t)$	momentos flexionantes en un sistema de masa distribuida
M_a, M_b	momentos flexionantes en los nodos a y b
M_b	momento de volteo en la base
M_{bo}	valor máximo de $M_b(t)$
M_{io}	valor máximo del momento de volteo en el i-ésimo nivel

$\mathcal{M}_o(x)$	valor máximo de $\mathcal{M}(x, t)$
N	fuerza normal entre superficies deslizantes; número de grados de libertad
p	fuerza externa
$P(\omega)$	transformada de Fourier de $p(t)$
$\tilde{p}(t)$	fuerza externa generalizada
p_{ef}	fuerza sísmica efectiva
$(p_{\mathrm{ef}})_o$	valor máximo de $p_{\mathrm{ef}}(t)$
p_i	valor de $p(t)$ en el tiempo i
$\hat{p}_i$	vea la ecuación (5.3.6), (5.4.12) o (5.6.3)
p_o	amplitud de $p(t)$
$r(t)$	cualquier cantidad de respuesta
r_o	$\max_t \lvert r(t)\rvert$, la respuesta máxima
R_a	factor de amplificación dinámica de aceleración
R_d	factor de amplificación dinámica de deformación (o desplazamiento)
$R^{(j)}$	fuerza residual al final del j-ésimo ciclo de iteración
$\hat{R}^{(j)}$	vea la ecuación (5.7.15)
R_v	factor de amplificación dinámica de velocidad
R_y	factor de reducción de la cedencia
t	tiempo
t'	tiempo variable
t_d	duración de una fuerza de impulso
t_i	tiempo en el i-ésimo pico en vibración libre; tiempo al final del i-ésimo paso de tiempo
t_o	tiempo cuando $u(t)$ es máximo
t_r	tiempo de elevación
$T_a, T_b, T_c, T_d, T_e, T_f$	periodos que definen las regiones espectrales
T_D	periodo natural (amortiguado)
T_n	periodo natural (no amortiguado)
T_0	periodo de excitación periódica
TR	transmisibilidad
u	desplazamiento; deformación; desplazamiento relativo al terreno
u^t	desplazamiento total
$\mathbf{u}$	vector de desplazamientos u_j
$\hat{u}(i\omega)$	transformada de Fourier de $u(t)$
$u(0)$	desplazamiento inicial
$\dot{u}(0)$	velocidad inicial
u_a, u_b	desplazamientos de los nodos a y b
u_c	solución complementaria
u_F	F/k
u_g	desplazamiento del terreno (o de un apoyo)
$\ddot{u}_g$	aceleración del terreno (o de un apoyo)
u_{go}	desplazamiento máximo del terreno
$\dot{u}_{go}$	velocidad máxima del terreno
$\ddot{u}_{go}$	aceleración máxima del terreno
$u_{g\theta}$	rotación del terreno respecto a un eje vertical
u_i	desplazamiento en el i-ésimo pico; desplazamiento en el tiempo i
$u^{(j)}$	u después de j iteraciones
${u^{(j)}}_i$	u_i después de j iteraciones
$\dot{u}_i$	velocidad en el instante i
$\ddot{u}_i$	aceleración en el i-ésimo pico; aceleración en el instante i
u_j	desplazamiento relativo del j-ésimo nivel
$u_j^c(t)$	respuesta a $p(t) = p_0 \cos j\omega_0 t$
$u_j^s(t)$	respuesta a $p(t) = p_0 \operatorname{sen} j\omega_0 t$
u_j^t	desplazamiento total del j-ésimo nivel
u_{jo}	valor pico o máximo de $u_j(t)$
$\dot{u}_{jo}$	valor máximo de $\dot{u}_j(t)$
u_m	$\max_t \lvert u(t)\rvert$ para un sistema inelástico
u_m^-	$\lvert \min_t [u(t)]\rvert$
u_m^+	$\max_t [u(t)]$
u_o	valor pico o máximo de $u(t)$
$\dot{u}_o$	valor máximo de $\dot{u}(t)$
$u_o(x)$	valor pico o máximo de $u(x, t)$
$\dot{u}_o(x)$	valor máximo de $\dot{u}_o(x, t)$
u_o^t	valor máximo de $u^t(t)$
$\ddot{u}_o^t$	valor máximo de $\ddot{u}^t(t)$
u_p	solución particular; deformación permanente
$u_{\mathrm{st}}(t)$	deformación estática debida a $p(t)$
$(u_{\mathrm{st}})_o$	deformación estática debida a p_o
u_x, u_y	desplazamientos en x y y
u_y	deformación de cedencia
$u_0(t)$	respuesta a $p(t) = a_0$
u_θ	rotación alrededor de un eje vertical

v	velocidad
V	ordenada del espectro de pseudo-velocidad
$\mathcal{V}(x, t)$	fuerzas cortantes en un sistema de masa distribuida
V_a, V_b	fuerzas cortantes en los nodos a y b
V_b	cortante basal
V_{bo}	valor máximo de $V_b(t)$
$\mathcal{V}_{bo}$	valor máximo de $\mathcal{V}_b(t)$
V_j	cortante en el j-ésimo entrepiso
V_{jo}	valor máximo de $V_j(t)$
$\mathcal{V}_o(x)$	valor máximo de $\mathcal{V}(x, t)$
V_y	$\omega_n u_y$
w	peso
x, y	coordenadas cartesianas
z	desplazamiento generalizado
z_o	valor máximo de $z(t)$
$\mathbf{1}$	vector de unos

Símbolos griegos

α_A, α_D, α_V	factores de amplificación espectral
β	parámetro en el método de Newmark
β_j	$j\omega_0/\omega_n$
γ	parámetro en el método de Newmark
λ	constante en $e^{\lambda t}$
$\tilde{\Gamma}$	$\tilde{L}/\tilde{m}$
δ	decremento logarítmico
$\delta\ (\cdot)$	función delta de Dirac
δ_{st}	mg/k
$\delta\ u(x)$	desplazamientos virtuales
$\delta\ \mathbf{u}$	vector de desplazamiento virtual
$\delta\ u_j$	desplazamiento virtual u_j
$\delta\ W_E$	trabajo virtual externo
$\delta\ W_I$	trabajo virtual interno
$\delta\ z$	desplazamiento virtual
$\delta\ \kappa(x)$	curvatura virtual
Δ_j	distorsión en el j-ésimo entrepiso
Δt	paso de tiempo
Δt_i	paso de tiempo i
$\Delta u^{(j)}$	cambio en u en el ciclo de iteración
ε	duración de una fuerza impulsiva
ε_R, ε_u, ε_w	valores de tolerancia en la ecuación (5.7.8)
ζ	fracción de amortiguamiento
$\bar{\zeta}$	fracción de amortiguamiento numérica
ζ_{eq}	fracción de amortiguamiento viscoso equivalente
η	coeficiente de amortiguamiento independiente de la frecuencia
$\ddot{\theta}$	aceleración rotacional
θ_a, θ_b	rotaciones en los nodos a y b
θ_g	rotación del terreno alrededor de un eje horizontal
$\kappa(x)$	curvatura
μ	coeficiente de fricción; factor de ductilidad
ρ	relación de rigidez entre la viga y la columna; coeficiente en $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$
σ	desviación estándar
τ	variable de tiempo ficticia
ϕ	ángulo de fase
$\psi(x)$	función de forma
$\boldsymbol{\psi}$	vector de forma
ψ_j	j-ésimo elemento de $\boldsymbol{\psi}$
ω	frecuencia de excitación (rad/s)
ω_D	frecuencia natural (amortiguada) (rad/s)
ω_n	frecuencia natural (no amortiguada) (rad/s)
ω_0	$2\pi/T_0$

PARTE II: CAPÍTULOS 9-18

Símbolos romanos

$\mathbf{a}_e$	matriz de transformación de elementos
a_{in}	definida por la ecuación (14.4.11)
a_l	coeficientes en la serie de Caughey
a_x, a_y, a_z	componentes x, y y z de la aceleración del terreno

a_1, a_2, a_3	componentes principales de la aceleración del terreno
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	vea la tabla 16.2.2 o 16.3.3
$\mathbf{a}_{xi}, \mathbf{a}_{yi}$	matrices de transformación
a_0, a_1	coeficientes de amortiguamiento de Rayleigh
$\mathcal{A}$	operador de ensamble directo
A_n	ordenada del espectro de pseudo-aceleración $A(T_n, \zeta_n)$
$A_n(t)$	pseudo-aceleración del n-ésimo modo de un sistema de 1GDL
$A_{nl}(t)$	$A_n(t)$ debida a $\ddot{u}_{gl}(t)$
$B_n, \bar{B}_n$	par de constantes conjugadas complejas
B_n^g	vea la ecuación (14.3.2)
$\mathbf{c}$	matriz de amortiguamiento
$\tilde{\mathbf{c}}$	definida por la ecuación (15.3.4)
c_{ij}	coeficiente de influencia del amortiguamiento
c_j	coeficiente de amortiguamiento del j-ésimo nivel
$\mathbf{c}_n$	matriz de amortiguamiento del n-ésimo modo
$\mathbf{C}$	$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{c}\mathbf{\Phi}$, matriz diagonal de C_n
C_n	amortiguamiento generalizado para el n-ésimo modo
C_{nr}	elemento de $\mathbf{C}$
$D_n(t)$	deformación del n-ésimo modo de un sistema de 1GDL
$\dot{D}_n(t)$	respuesta de velocidad relativa, n-ésimo modo de un sistema de 1GDL
$D_{nl}(t)$	$D_n(t)$ debida a $\ddot{u}_{gl}(t)$
D_{no}	valor máximo de $D_n(t)$
e_J	error en la respuesta estática; norma de error de la ecuación (15.5.3)
E	módulo de elasticidad
EI	rigidez a la flexión
$\hat{\mathbf{f}}$	matriz de flexibilidad
$\mathbf{f}_D, \mathbf{f}_D(t)$	fuerzas de amortiguamiento
f_{Dj}	fuerza de amortiguamiento en el grado de libertad j
$\hat{f}_{ij}$	coeficiente de influencia de la flexibilidad
$\mathbf{f}_I$	fuerzas de inercia
f_{Ij}	fuerza de inercia en el grado de libertad j

$\mathbf{f}_{in}$	valor máximo de $\mathbf{f}_{in}(t)$
$\mathbf{f}_{in}(t)$	fuerzas estáticas equivalentes: marco i, modo n
f_{jn}	j-ésimo elemento de $\mathbf{f}_n$; valor máximo de $f_{jn}(t)$
$f_{jn}(t)$	fuerza estática equivalente: grado de libertad j, modo n
f_{jyn}	j-ésimo elemento de $\mathbf{f}_{yn}$
$f_{j\theta n}$	j-ésimo elemento de $\mathbf{f}_{\theta n}$
f_n	n-ésima frecuencia natural, Hz
$f_n(x, t)$	fuerzas estáticas equivalentes, modo n
$\mathbf{f}_n$	valor máximo de $\mathbf{f}_n(t)$
$\mathbf{f}_n(t)$	fuerzas estáticas equivalentes, modo n
$f_{no}(x)$	valor máximo de $f_n(x, t)$
$\mathbf{f}_S$	fuerzas restauradoras elásticas
$\mathbf{f}_S(\mathbf{u})$	fuerzas restauradoras inelásticas
f_{SA}	fuerza lateral sobre el marco A
$\mathbf{f}_{Sg}, \mathbf{f}_{Sg}(t)$	fuerzas estáticas equivalentes en los grados de libertad del apoyo
f_{Sj}	fuerza restauradora elástica o inelástica en el grado de libertad j
$\mathbf{f}_{yn}$	valor máximo de $\mathbf{f}_{yn}(t)$
$\mathbf{f}_{yn}(t)$	fuerzas laterales estáticas equivalentes, modo n
$\mathbf{f}_{\theta n}$	valor máximo de $\mathbf{f}_{\theta n}(t)$
$\mathbf{f}_{\theta n}(t)$	pares de torsión estáticos equivalentes, modo n
h	altura de un marco de un nivel; altura de entrepiso
h_j	altura del j-ésimo nivel
h_n^*	altura modal efectiva, modo n
$h(t)$	función de respuesta al impulso unitario
$\mathbf{h}(t)$	vector de funciones de respuesta al impulso unitario
$h_n(t)$	$h(t)$ para la deformación del n-ésimo modo de un sistema de 1GDL
I	segundo momento de área
$\mathbf{I}$	matriz identidad
I_b	I para una viga
I_c	I para una columna
$\mathbf{I}_O$	matriz diagonal: $I_{jj} = I_{Oj}$
I_{Oj}	momento de inercia del j-ésimo nivel alrededor de O

I_{On}^*	definido por la ecuación (13.3.10)
J	número de vectores de Ritz
$\mathbf{k}$	matriz de rigidez
$\check{\mathbf{k}}$	$\mathbf{k} - \mu\mathbf{m}$
$\tilde{\mathbf{k}}$	definida por la ecuación (15.3.4); matriz de $\tilde{k}_{ij}$ en la ecuación (18.1.4)
$\mathbf{k}_A$	matriz de rigidez del marco A en el grado de libertad global
$\mathbf{k}_e$	matriz de rigidez elemental en los grados de libertad globales del elemento
$\hat{\mathbf{k}}$	vea la tabla 16.3.1, ecuación (16.3.5)
$\bar{\mathbf{k}}_e$	matriz de rigidez elemental en las coordenadas locales del elemento
$\mathbf{k}_{gg}^l$	l-ésima columna de $\mathbf{k}_{gg}$
$\mathbf{k}_i$	matriz de rigidez del marco i en el grado de libertad global
$\hat{\mathbf{k}}_i$	vea las tablas 16.3.1 y 16.3.3
k_{ij}	coeficiente de influencia de la rigidez
k_j	rigidez del j-ésimo entrepiso
$\hat{\mathbf{k}}_{tt}$	matriz de rigidez condensada
$\hat{\mathbf{k}}_T$	matriz de rigidez tangente; vea la tabla 16.3.3
k_{xi}, k_{yi}	rigidez lateral del marco i en las direcciones x y y
$\mathbf{k}_{xi}$, $\mathbf{k}_{yi}$	matriz de rigidez lateral del marco i en las direcciones x y y
k_y	rigidez lateral del marco A
$\mathbf{k}_{xy}$, $\mathbf{k}_{x\theta}$, $\mathbf{k}_{\theta y}$, $\mathbf{k}_{y\theta}$, $\mathbf{k}_{\theta\theta}$	submatrices de $\mathbf{k}$
$\mathbf{K}$	matriz diagonal de K_n
$\hat{\mathbf{K}}$	vea las tablas 16.2.1 y 16.2.2
K_n	rigidez generalizada, modo n
L	longitud de la viga; longitud del elemento finito
L_n^h	vea la ecuación (13.2.3) o (17.6.2)
L_n^θ	vea la ecuación (13.2.9b) o (17.6.17)
L_{nl}	definida por la ecuación (13.5.3)
m	masa de un sistema de 1GDL
$\mathbf{m}$	matriz de masa
$\tilde{\mathbf{m}}$	definida por la ecuación (15.3.4); matriz de $\tilde{m}_{ij}$ en la ecuación (18.1.4)
$m(x)$	masa por unidad de longitud
$\mathbf{m}_e$	matriz de masa elemental en los grados de libertad globales del elemento
$\bar{\mathbf{m}}_e$	matriz de masa elemental en las coordenadas locales del elemento
m_{ij}	coeficiente de influencia de la masa
m_j	masa en el j-ésimo grado de libertad o j-ésimo nivel
$\mathbf{m}_{tt}$	matriz de masa para el grado de libertad $\mathbf{u}_t$
$\mathbf{M}$	matriz diagonal de M_j
$\mathcal{M}(x, t)$	momento flexionante en un sistema de masa distribuida
$\mathcal{M}_b$	momento flexionante en la base
$\mathcal{M}_{bn}(t)$	$\mathcal{M}_b(t)$ debido al modo n
$M_{bn}(t)$	$M_b(t)$ debido al modo n
$\mathcal{M}_{bn}^{\mathrm{st}}$	n-ésima respuesta estática modal $\mathcal{M}_b$
$\mathcal{M}_{bn}^{\mathrm{st}}$	n-ésima respuesta estática modal M_b
M_i	momento de volteo del i-ésimo nivel
M_{in}^{st}	n-ésima respuesta estática modal M_i
M_n	masa generalizada, modo n
M_n^*	masa modal efectiva, modo n
N	número de grado de libertad
N_d	número de modos que responden dinámicamente
N_e	número de elementos finitos
N_g	Número de desplazamientos del terreno (o del apoyo)
$\mathbf{O}$	matriz nula
p	fuerza externa
$\mathbf{p}$	fuerzas externas
$\tilde{\mathbf{p}}$	vector de $\tilde{p}_i$ en la ecuación (18.2.6)

$p(\lambda)$	polinomio en λ
$\mathbf{p}_e$	vector de fuerza elemental en los grados de libertad globales del elemento
$\bar{\mathbf{p}}_e$	vector de fuerza elemental en las coordenadas locales del elemento
p_{ef}	fuerza sísmica efectiva
$\mathbf{p}_{\text{ef}}$	vector de fuerza sísmica efectiva
$\mathbf{p}_g$	fuerzas en los apoyos
$\mathbf{p}_g^s(t)$	fuerzas cuasi-estáticas en los apoyos
p_j	fuerza externa en el j-ésimo grado de libertad o el j-ésimo nivel
p_o	valor máximo de $p(t)$
$\mathbf{p}_t$	fuerzas externas en el grado de libertad $\mathbf{u}_t$
$\mathbf{P}(t)$	$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t)$
$\mathbf{P}(t)$	vector de $P_n(t)$
$\hat{\mathbf{P}}_i$	definida en la tabla 16.2.1
$P_n(t)$	fuerza generalizada, modo n
$\mathbf{q}$	vector de coordenadas modales
$\mathbf{q}_i$	coordenadas modales en el instante i
$q_n(t)$	n-ésima coordenada modal
r	radio de giro
$r(t)$	cualquier cantidad de respuesta
$r_a(t)$, $r_b(t)$	cantidades de respuesta
r_{ao}, r_{bo}	valores máximos de $r_a(t)$, $r_b(t)$
r_{an}^{st}, r_{bn}^{st}	n-ésimas respuestas modales estáticas r_a y r_b
r_α	proyección de la trayectoria de la respuesta en la dirección α
r_{ano}, r_{bno}	valores máximos de $r_{an}(t)$, $r_{bn}(t)$
r_{abo}	término cruzado entre las respuestas r_a y r_b en la ecuación (13.10.4)
r_{as}, r_{bs}	respuestas r_a, r_b debidas a las cargas estáticas iniciales
r_{cr}	respuesta crítica; mayor valor de $r(\theta)$
r_n	valor máximo de $r_n(t)$
$\bar{r}_n$	n-ésimo factor de contribución modal
$r_n(t)$	$r(t)$ debido al modo n
r_{no}	valor máximo de $r_n(t)$
r_o	valor máximo de $r(t)$
r^{st}	respuesta estática a las fuerzas $\mathbf{s}$
r_n^{st}	n-ésima respuesta estática modal
r_x, r_y, r_z	respuesta máxima r debida a los componentes x, y y z del movimiento del terreno
r_{xy}	término cruzado entre las contribuciones de la respuesta modal a r_x y r_y
R_{dn}	factor de amplificación dinámica del n-ésimo modo de un sistema
$\mathbf{R}^{(j)}$	vector de fuerza residual después del j-ésimo ciclo de iteración
$\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$	distribuciones espaciales de $\mathbf{p}(t)$
s_{jn}	j-ésimo elemento de $\mathbf{s}_n$
s_{jyn}	j-ésimo elemento de $\mathbf{s}_{yn}$
$s_{j\theta n}$	j-ésimo elemento de $\mathbf{s}_{\theta n}$
$\mathbf{s}_n$	definido por la ecuación (12.8.4) o (13.1.6)
$s_n(x)$	definido por la ecuación (17.6.4)
$\mathbf{s}_{yn}$, $\mathbf{s}_{\theta n}$	subvectores de $\mathbf{s}_n$
t	variable de tiempo
t_d	duración de una fuerza de pulso
T_b	par de torsión en la base
T_{bn}	valor máximo de $T_{bn}(t)$
T_{bn}^{st}	n-ésima respuesta estática modal T_b
$T_{bn}(t)$	$T_b(t)$ debido al modo n
T_i	par de torsión del i-ésimo nivel
$T_{in}(t)$	$T_i(t)$ debido al modo n
T_{bn}^{st}	n-ésima respuesta estática modal T_i
T_n	n-ésimo periodo natural (no amortiguado)
u	desplazamiento o deformación
$\mathbf{u}$	vector de desplazamiento
$\mathbf{u}^{(j)}$	$\mathbf{u}$ después de j ciclos de iteración
$\dot{\mathbf{u}}_i$	velocidades en el tiempo i
$\ddot{\mathbf{u}}_i$	aceleraciones en el tiempo i
$\mathbf{u}_n(t)$	$\mathbf{u}(t)$ debido al par de modos de ψ_n, $\bar{\psi}_n$; $\mathbf{u}(t)$ debido al modo ϕ_n
$\mathbf{u}^s$	desplazamientos cuasi-estáticos
$\mathbf{u}^t$	desplazamientos totales
u_A	desplazamiento en el marco A
$\mathbf{u}_x$	desplazamientos laterales en x
$\mathbf{u}_{xn}(t)$	$\mathbf{u}_x(t)$ debido al modo n
$\mathbf{u}_e$	desplazamientos elementales en los grados de libertad globales del elemento

u_g	desplazamiento del terreno (o del apoyo)
$\mathbf{u}_g$	vector de desplazamiento del terreno (o del apoyo)
$\ddot{u}_g$	aceleración del terreno (o del apoyo)
u_{gl}	l-ésimo desplazamiento del apoyo
$\ddot{u}_{gx}$, $\ddot{u}_{gy}$, $\ddot{u}_{g\theta}$	componentes en x, y y θ de la aceleración del terreno
u_i	desplazamiento en el grado de libertad i
$\mathbf{u}_i$	desplazamientos laterales del marco i; desplazamientos en el tiempo i
$\mathbf{u}_{in}$	$\mathbf{u}_i$ debido al modo n
u_j	valor máximo de $u_j(t)$
$u_j(t)$	desplazamiento relativo en el grado de libertad j o el nivel j
u_j^s	desplazamiento cuasi-estático en el grado de libertad j
u_j^t	desplazamiento total en el grado de libertad j o el nivel j
u_{jn}	valor máximo de $u_{jn}(t)$
u_{jn}^{st}	n-ésima respuesta estática modal u_j
$u_{jn}(t)$	$u_j(t)$ debido al modo n
u_{jx}, u_{jy}	desplazamientos del CM del nivel j a lo largo de los ejes x y y
u_{jyn}	valor máximo de $u_{jyn}(t)$
$u_{j\theta}$	rotación del nivel j alrededor del CM
$u_{j\theta n}$	valor máximo de $u_{j\theta n}(t)$
$\mathbf{u}_n$	valor máximo de $\mathbf{u}_n(t)$
$\mathbf{u}_n^{\text{st}}$	n-ésima respuesta estática modal $\mathbf{u}$
$u_n(x, t)$	$u(x, t)$ debido al modo n
$u_n^{\text{st}}(x)$	n-ésima respuesta estática modal $u(x)$
$\mathbf{u}_t$	grado de libertad dinámico
u_x, u_y	desplazamientos del CM en x y y
$\ddot{u}_x^t$, $\ddot{u}_y^t$, $\ddot{u}_\theta^t$	componentes en x, y y θ de la aceleración total
$\mathbf{u}_y$	desplazamientos laterales en y
$\mathbf{u}_{yn}(t)$	$\mathbf{u}_y(t)$ debido al modo n
$\mathbf{u}_0$	grado de libertad con masa cero
$\bar{u}_{5n}$	n-ésimo factor de contribución modal para u_5
u_θ	rotación alrededor del CM
$\mathbf{u}_\theta$	rotaciones de nivel
$\mathbf{u}_{\theta n}(t)$	$\mathbf{u}_\theta(t)$ debido al modo n
$\mathcal{V}(x, t)$	fuerza cortante transversal en un sistema de masa distribuida
V_b	valor máximo de $V_b(t)$
$\mathcal{V}_b$	cortante basal
$V_b(t)$	cortante basal
V_b^{st}	V_b debida a las fuerzas $\mathbf{s}$
V_{bn}	valor máximo de $V_{bn}(t)$
$\bar{V}_{bn}$	n-ésimo factor de contribución modal para V_b
$V_{bn}(t)$	$V_b(t)$ debida al modo n
$\mathcal{V}_{bn}(t)$	$\mathcal{V}_b(t)$ debida al modo n
V_{bn}^{st}	n-ésima respuesta estática modal V_b
$\mathcal{V}_{bn}^{\text{st}}$	n-ésima respuesta estática modal $\mathcal{V}_b$
V_{bo}	valor máximo de $V_b(t)$
V_i	valor máximo de $V_i(t)$
$V_i(t)$	cortante en el i-ésimo entrepiso
V_{in}^{st}	n-ésima respuesta estática modal V_i
x, y	coordenadas cartesianas
x_i, y_i	definen la ubicación del marco i
$\mathbf{x}_i$	vector de iteración
$\mathbf{y}_n$	vector característico de $\mathbf{A}$; definido por la ecuación (14.4.10)
$\mathbf{z}$	vector coordenadas generalizadas
z_j	coordenadas generalizadas
$\mathbf{z}_n$	vector característico
$\mathbf{0}$	vector de ceros
$\mathbf{1}$	vector de unos

Símbolos griegos

α	dirección arbitraria en el espacio de respuesta; fracción utilizada en la ecuación (13.11.13)
$\alpha^g{}_n$	definida en las ecuaciones (14.8.8) y (14.10.17)
β	parámetro en el método de Newmark

β_{in}	ω_i/ω_n
β_n	vea las ecuaciones (14.2.7), (14.7.5) y (14.10.8)
β_n^g	vea las ecuaciones (14.3.4), (14.8.2) y (14.10.10)
γ	parámetro en el método de Newmark; factor de intensidad del movimiento del terreno
γ_n	vea las ecuaciones (14.2.7), (14.7.5) y (14.10.9)
γ_n^g	vea las ecuaciones (14.3.4), (14.8.2) y (14.10.12)
Γ_n	vea la ecuación (12.8.3) o (13.2.3)
Γ_{nl}	definido por la ecuación (13.5.3)
$\delta u(x)$	desplazamiento virtual $u(x)$
δu_j	desplazamiento virtual u_j
δW_E	trabajo virtual externo
δW_I	trabajo virtual interno
$\delta(\cdot)$	función delta de Dirac
Δ_j	valor máximo de $\Delta_j(t)$
$\Delta_j(t)$	deformación o distorsión del j-ésimo entrepiso
χ	vector de coordenadas generalizadas en la ecuación (15.3.5)
χ_n	parte con valor imaginario de ψ_n
Δt	paso de tiempo
$\Delta\mathbf{u}^{(j)}$	cambio en $\mathbf{u}$, j-ésimo ciclo de iteración
$\Delta_{jn}(t)$	$\Delta_j(t)$ debido al modo n
Δ_{jn}	valor máximo de $\Delta_{jn}(t)$
ε_R, ε_u, ε_w	tolerancias en la ecuación (16.3.8)
ε'_R, ε'_u, ε'_w	tolerancias en la ecuación (16.3.9)
ε_{in}	definido por la ecuación (13.7.7a)
ζ_n	fracción de amortiguamiento para el n-ésimo modo
ζ'_n	definida por la ecuación (13.7.7b)
θ	ángulo de incidencia
θ_{cr}	ángulo crítico de incidencia
θ_g	rotación del terreno alrededor de un eje horizontal
ι	vector de influencia, matriz de influencia
ι_l	vector de influencia para u_{gl}
κ	constante de esfuerzo cortante
$\lambda(\chi)$	cociente de Rayleigh
$\lambda^{(j)}$	estimación del valor característico
λ	valor característico
λ_n, $\bar{\lambda}_n$	par complejo conjugado de valores característicos
$\check{\lambda}$	$\lambda - \mu$
λ_n	n-ésimo valor característico
μ	relación de masa del amortiguador de masa resonante; cambio del espectro de valor característico
μ_{ij}	elemento de μ definido en la ecuación (13.11.1)
μ	matriz de covarianza
ρ_{in}	coeficiente de correlación cruzada para los modos i y n
ϕ_{jn}	j-ésimo elemento de ϕ_n
ϕ_{jyn}, $\phi_{j\theta n}$	j-ésimos elementos de ϕ_{yn} y $\phi_{\theta n}$
$\phi_n(x)$	n-ésimo modo natural de vibración
$\tilde{\phi}_n(x)$	aproximación a $\phi_n(x)$
$\tilde{\phi}_n$	aproximación a ϕ_n
ϕ_n	n-ésimo modo natural de vibración; parte de ψ_n con valor real
ϕ_{yn}, $\phi_{\theta n}$	subvectores de ϕ_n
$\mathbf{\Phi}$	matriz modal
ψ	vector característico con valores complejos, vea la ecuación (14.5.3)
ψ_n	n-ésimo vector característico (valores complejos)
$\mathbf{\Psi}$	$\langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_J \rangle$
$\mathbf{\Psi}(x)$	$\langle \psi_1(x) \quad \psi_2(x) \quad \cdots \quad \psi_N(x) \rangle$
$\psi_i(x)$	función de prueba, de Ritz o de forma; función de interpolación del elemento finito
$\hat{\psi}_i(x)$	función de interpolación de una viga
ψ_j	vector de forma o vector de Ritz
$\hat{\psi}_n$	definido por la ecuación (14.4.12)
ω	frecuencia de excitación
ω_n	n-ésima frecuencia natural (no amortiguada) (rad/s)
ω'_n	ω_n de una viga considerando los efectos de la inercia rotacional y la fuerza cortante
$\tilde{\omega}_n$	aproximación a ω_n
Ω^2	matriz espectral

PARTE III: CAPÍTULOS 19-23

Símbolos romanos

A ordenada del espectro de pseudo-aceleración
A_m A/g máxima, RCDF
A_y A para un sistema en cedencia
c coeficiente de amortiguamiento del sistema de base fija
c_b coeficiente de amortiguamiento del sistema de aislamiento
$\mathbf{c}_f$ matriz de amortiguamiento del sistema de base fija
C coeficiente dependiente del periodo, IBC
C_e coeficiente sísmico elástico
C_s coeficiente sísmico
e_J error en la respuesta estática (ecuación 19.7.1)
EI_b rigidez a la flexión en vigas
EI_c rigidez a la flexión en columnas
f_{jn} fuerza lateral: nivel j, modo n
f_y resistencia a la cedencia de diseño
F_j fuerza lateral de código en el nivel j
F_{Sn} definida por la ecuación (20.6.12)
F_t fuerza lateral adicional en el nivel superior, NBCC
h altura de entrepiso
h_j altura del j-ésimo nivel
I factor de importancia, IBC y NBCC
J, J_i factores de reducción para los momentos de volteo
k rigidez lateral del sistema de base fija
k_b rigidez lateral del sistema de aislamiento
$\mathbf{k}_f$ matriz de rigidez del sistema de base fija
k_j rigidez del j-ésimo entrepiso
L_b longitud de vigas
L_c longitud de columnas
m masa concentrada del sistema de base fija
m_b masa de una losa en la base
$\mathbf{m}_f$ matriz de masa del sistema de base fija
M_v factor de los modos superiores, NBCC
OS factor de sobrerresistencia, EC
q factor de comportamiento sísmico, EC
q' factor de reducción sísmica, EC
Q factor de comportamiento sísmico, RCDF
Q' factor de reducción sísmica, RCDF
R factor de modificación de la respuesta, IBC
r coeficiente en C_e, RCDF
R_d factor de modificación de la fuerza, NBCC
R_O factor de modificación de la fuerza relacionado con la sobrerresistencia, NBCC
$\mathbf{s}_n^*$ definida por la ecuación (20.7.2)
T_b periodo de aislamiento
T_b, T_c periodos que definen la región espectral de A constante
T_f periodo natural del sistema de base fija
T_n periodo natural del sistema de 1GDL; n-ésimo periodo natural del sistema de VGDL
T_{nf} n-ésimo periodo natural del sistema de base fija
u_b deformación del aislador
u_{bn} u_b debido al modo n
u_{bn}^{st} n-ésima respuesta estática modal u_b
u_i desplazamiento del i-ésimo nivel debido a las fuerzas F_j ($j = 1, 2, ..., N$)
u_{jm} $\max_t |u_j(t)|$ para un sistema inelástico
u_{rn} desplazamiento del techo, n-ésimo modo
u_y desplazamiento de cedencia
V_b cortante basal
$V_b^{(1)}$, $V_b^{(2)}$ dos partes de V_b, RCDF
V_{by} valor de resistencia a la cedencia de V_b
$\bar{V}_{by}$ valor normalizado de V_{by}
V_j cortante en el j-ésimo entrepiso
V_{jy} resistencia a la cedencia del j-ésimo entrepiso
w peso de un sistema de 1GDL
w_i peso en el i-ésimo nivel
W peso total del edificio; carga muerta total y porción aplicable de otras cargas

Símbolos griegos

α, β coeficientes en el ajuste del error por mínimos cuadrados de la curva V_b-T_1
Δ_j deformación o distorsión del j-ésimo entrepiso
Δ_{jm} valor máximo de $\Delta_j(t)$ para un sistema inelástico
ζ fracción de amortiguamiento
ζ_b ζ del sistema de aislamiento con construcción rígida
ζ_f ζ para el sistema de base fija
ζ_{nf} ζ para el n-ésimo modo del sistema de base fija
μ factor de ductilidad
ϕ_n n-ésimo modo natural de vibración del sistema lineal correspondiente
ϕ_{nf} n-ésimo modo del sistema de base fija
ϕ_{rn} elemento de techo de ϕ_n
ω_f frecuencia natural del sistema de base fija
ω_n n-ésima frecuencia natural de vibración del sistema lineal correspondiente

APÉNDICE A

Símbolos romanos

c coeficiente de amortiguamiento
$h(t)$ respuesta al impulso unitario
H_j $H(\omega_j)$; vea la ecuación (A.5.7)
$H(\omega)$ respuesta compleja en la frecuencia
$H_u(\omega)$ respuesta compleja en la frecuencia para $u(t)$
k rigidez
m masa
M número de armónicos en una serie truncada
N número de instantes de tiempo con espacios iguales
p fuerza externa
p_n $p(t_n) \equiv p(n\ \Delta t)$
p_o amplitud de $p(t)$
$P(\omega)$ transformada de Fourier de $p(t)$
P_j coeficiente de Fourier (con valor complejo) para $p(t)$
$\bar{P}_j$ complejo conjugado de P_j
t_d duración de la excitación
t_f duración de la vibración libre
T_n periodo natural (no amortiguado)
T_0 periodo de extensión periódica de $p(t)$
u desplazamiento; deformación
$u(t)$ respuesta “exacta”
$\tilde{u}(t)$ respuesta de estado estacionario mediante el método de la transformada discreta de Fourier
$(u_{st})_o$ deformación estática debida a p_o
U_j vea la ecuación (A.2.8) o (A.5.8)

Símbolos griegos

β_j $j\omega_0/\omega_n$
$\delta(\cdot)$ función delta de Dirac
$\delta\ t$ intervalo de muestreo
ζ fracción de amortiguamiento
η coeficiente de amortiguamiento independiente de la frecuencia
$\upsilon(t)$ solución correctiva
ω frecuencia de la excitación (rad/s)
ω_D frecuencia natural (amortiguada) (rad/s)
ω_j $j\omega_0$
$\omega_{máx}$ frecuencia de Nyquist; vea la ecuación (A.5.5)
ω_n frecuencia natural (no amortiguada) (rad/s)
ω_0 $2\pi/T_0$



Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 1

1.1 $k_e = k_1 + k_2;\ m\ddot{u} + k_e u = p(t)$

1.3 $k_e = \dfrac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3};\ m\ddot{u} + k_e u = p(t)$

1.5 $\ddot{\theta} + \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}\theta = 0;\ \omega_n = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}}$

1.8 $\dfrac{mR^2}{2}\ddot{\theta} + \dfrac{\pi d^4 G}{32L}\theta = 0$

1.10 $\dfrac{w}{g}\ddot{u} + \dfrac{3EI}{L^3}u = 0$

1.12 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_e}{m}};\ k_e = \dfrac{k(48EI/L^3)}{k + 48EI/L^3}$

1.15 $m\ddot{u} + \left(\dfrac{120}{11}\dfrac{EI_c}{h^3}\right)u = p(t)$

1.16 $m\ddot{u} + \left(2\dfrac{EI_c}{h^3}\right)u = p(t)$

1.17 $m\ddot{u}_x + \left(\sqrt{2}\dfrac{AE}{h}\right)u_x = 0;\ m\ddot{u}_y + \left(\sqrt{2}\dfrac{AE}{h}\right)u_y = 0$

1.18 $\frac{mh^2}{6}\ddot{u}_\theta + \frac{AEh}{\sqrt{2}}u_\theta = 0$

Capítulo 2

2.1 $w = 40$ lb; $k = 16.4$ lb/pulg
2.2 $u(t) = 2\cos(9.82t)$
2.4 $u(t) = 0.565\,\text{sen}(60.63t)$ pulg
2.5 $u(t) = \frac{m_2 g}{k}(1 - \cos\omega_n t) + \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n}\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\text{sen}\omega_n t$
2.7 $EI = 8827$ lb-ft^2
2.11 $j_{10\%} = 0.366/\zeta$
2.13 **(a)** $T_n = 0.353$ s; **(b)** $\zeta = 1.94\%$
2.14 **(a)** $c = 215.9$ lb-s/pulg, $k = 1500$ lb/pulg
(b) $\zeta = 0.908$
(c) $\omega_D = 5.28$ rad/s

2.15 $k = 175.5$ lb/pulg; $c = 0.107$ lb-s/pulg
2.16 $\omega_n = 21.98$ rad/s; $\zeta = 0.163$; $\omega_D = 21.69$ rad/s
2.17 $T_D = 0.235$ s, $\zeta = 0.236\%$
2.19 1.449 pulg, 1.149 pulg
2.20 0.536 pulg; 8 ciclos

Capítulo 3

3.1 $m = 6.43/\text{g}$ lb/g; $k = 10.52$ lb/pulg
3.2 $\zeta = 0.05$
3.3 $\zeta = 0.0576$
3.5 $u_o = 2.035 \times 10^{-3}$ pulg; $\ddot{u}_o = 0.0052$g
3.10 $\zeta = 9.82\%$
3.11 $\zeta = 1.14\%$
3.12 **(b)** $\delta_{st} = 0.269$ pulg
3.13 474.8 lb
3.15 11.6 kips/pulg
3.17 Error = 0, 0.9, y 15% en $f = 10, 20$, y 30 Hz, respectivamente
3.19 $f \leq 20.25$ Hz
3.21 $f \geq 2.575$ Hz
3.25 0.308 pulg

3.26 **(a)** $p(t) = \frac{p_o}{2} + \frac{4p_o}{\pi^2} \sum_{j=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos j\omega_0 t$

(b) $\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{j^2(1-\beta_j^2)} \cos j\omega_0 t$, donde $(u_{st})_o = p_o/k$,

$\beta_j = j\omega_0/\omega_n$, y $\beta_j \neq 1$

(c) Dos términos son adecuados.

Capítulo 4

4.9 **(a)** $\frac{u(t)}{(u_{st})_o} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_D t\right)$

(b) $\frac{u_o}{(u_{st})_o} = 1 + \exp(-n\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$

4.12 $u_o \simeq 12.2$ pulg; $u_0 \simeq 6.1$ pulg

4.17 $u_o = 0.536$ pulg; $\sigma = 18.9$ ksi

4.18 $u_o = 2.105$ pulg; $\sigma = 37.2$ ksi

4.23 $u_o = \frac{p_o}{k} \frac{4}{\omega_n t_1} \operatorname{sen} \omega_n t_1 \operatorname{sen} \frac{\omega_n t_1}{2}$

4.24 $\frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{4\pi}{3} \frac{t_d}{T_n}$; error = 5.9%

4.26 **(a)** $V_b = 15.08$ kips, $M_b = 1206$ kip-pie; **(b)** el incremento de la masa tiene el efecto de reducir la respuesta dinámica.

Capítulo 5

5.2 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica de las tablas E5.1a, b.

5.4 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica de la tabla E5.2.

5.8 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica de la tabla E5.3.

5.9 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica de las tablas E5.1a, b; los resultados numéricos tienen un error grande, pero la solución es estable.

5.11 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica de la tabla E5.4.

Capítulo 6

6.4 $D = \frac{\dot{u}_{go}}{2\pi} T_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

$$V = \frac{2\pi}{T_n} D\,;\; A = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D$$

6.10 $u_o = 1.91$ pulg; $\sigma = 38.2$ ksi

6.11 **(a)** $u_o = 14.1$ pulg, $V_{bo} = 56.2$ kips
(b) $u_o = 9.93$ pulg, $V_{bo} = 79.5$ kips
(c) $u_o = 14.1$ pulg, $V_{bo} = 112.4$ kips

6.14 **(a)** $u_o = 0.674$ pulg, $M = 40.65$ kip-pie; **(b)** $u_o = 2.7$ pulg, $M = 81.30$ kip-pie

6.16 **(a)** $u_o = 0.316$ pulg, $M = 18.3$ kip-pie
(b) $u_o = 0.101$ pulg, $p_{\text{refuerzo}} = 3.53$ kips

6.17 $u_o = 1.3$ pulg, $M_{\text{corto}} = 60.39$ kip-pie, $M_{\text{largo}} = 15.1$ kip-pie

6.18 $u_o = 3.86$ pulg; momentos flexionantes (kip-pie) en las columnas: 569 en la base y 244 en la parte **superior; momentos flexionantes (kip-pie) en la viga: 244 en ambos extremos.**

6.19 **uo = 11.**1 pulg; momentos flexionantes (kip-pie) en las columnas: 0 en la base y 428 en la parte superior; momentos flexionantes (kip-pie) en la viga: 428 en ambos extremos.

6.20 $u_o = 0.76$ pulg; esfuerzos en la base de la columna: esfuerzo flexionante debido al sismo = 19.06 ksi; esfuerzo axial debido a las fuerzas del sismo y la gravedad = 3.28 ksi; esfuerzo total = 22.34 ksi.

6.22 Desplazamientos en esquinas = 0.582 pulg, 0.388 pulg; par de torsión en la base = 58.2 kip-pie; momentos flexionantes en la parte superior y la base de cada columna: My = 5.24 kip-pie, Mx = 2.33 kip-pie.

6.23 **(b)** $A(T_n)/\text{g} = 0.5$ para $T_n \le \frac{1}{33}$ s; $12.28T_n^{0.916}$ para $\frac{1}{33} < T_n \le \frac{1}{8}$ s;1.83 para $\frac{1}{8} < T_n \le 0.623$ s; $1.14T_n^{-1}$ para $0.623 < T_n \le 3.91$ s; $4.46T_n^{-2}$ para $3.91 < T_n \le 10$ s; $24.49T_n^{-2.74}$ para $10 < T_n \le 33$ s; y $1.84T_n^{-2}$ para $T_n > 33$ s

Capítulo 7

7.1 **(a)** $T_n = 0.502$ s, $\zeta = 2\%$
(b) no
(c) $T_n = 0.502$ s, $\zeta = 2\%$
(d) $\bar{f}_y = 0.323$, $R_y = 3.09$

7.5 $\mu = 1.44, 3.11$, y7.36

7.6 $A_y(T_n)/\text{g} = 0.5$ para $T_n \le \frac{1}{33}$ s; $1.68T_n^{0.348}$ para $\frac{1}{33} < T_n \le \frac{1}{8}$ s; 0.818 para $\frac{1}{8} < T_n \le 0.465$ s; $0.380T_n^{-1}$ para $0.465 < T_n \le 3.91$ s; $1.487T_n^{-2}$ para $3.91 < T_n \le 10$ s; $8.16T_n^{-2.74}$ para $10 < T_n \le 33$ s; y $0.614T_n^{-2}$ para $T_n > 33$ s

7.7

	$T_n = 0.02$ s		$T_n = 0.2$ s		$T_n = 2$ s	
μ	f_y/w	u_m (pulg)	f_y/w	u_m (pulg)	f_y/w	u_m (pulg)
1	0.50	1.955×10^{-3}	1.355	0.530	0.448	17.57
2	0.50	3.910×10^{-3}	0.782	0.612	0.224	17.57
4	0.50	7.820×10^{-3}	0.512	0.801	0.112	17.57
8	0.50	15.640×10^{-3}	0.350	1.095	0.056	17.57

Capítulo 8

8.2 **(a)** $\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + \tilde{k}\theta = \tilde{p}(t)$, $\tilde{m} = \dfrac{103mL^2}{64}$, $\tilde{c} = c$, $\tilde{k} = \dfrac{kL^2}{4}$, $\tilde{p}(t) = \dfrac{9L}{8}p(t)$

(b) $\omega_n\sqrt{16k/103m}$, $\zeta = 8c/\sqrt{103kmL^4}$; **(c)** $u(x,t) = \dfrac{72x}{103mL\omega_D}e^{-\zeta\omega_n t}$ sen $\omega_D t$

8.4 **(a)** $\tilde{m}\ddot{\theta} + \tilde{c}\dot{\theta} + \tilde{k}\theta = \tilde{p}(t)$; $\tilde{m} = \dfrac{mL^3}{12}$; $\tilde{c} = \dfrac{cL^3}{12}\tilde{k} = \dfrac{kL^3}{12}$; $\tilde{p}(t) = \dfrac{L^2}{6}p(t)$

8.5 $z =$ deflexión vertical del extremo inferior del resorte; $\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{c}\dot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$; $\tilde{m} = \dfrac{m}{3}$;

$\tilde{c} = \dfrac{c}{4}$; $\tilde{k} = \dfrac{k}{5}$; $\tilde{p}(t) = -\dfrac{2}{5}p(t)$

8.7 **(a)** $\mathcal{V}_o(L/2) = 1426$ kips, $\mathcal{M}_o(L/2) = 0.2399 \times 10^6$ kip-pie, $\mathcal{V}_{bo} = 1739$ kips, $\mathcal{M}_{bo} = 0.7368 \times 10^6$ kip-pie; **(b)** $u_o(L) = 25.1$ pulg

8.9 **(a)** $\mathcal{V}_o(L/2) = 216$ kips, $\mathcal{M}_o(L/2) = 3.629 \times 10^4$ kip-pie, $\mathcal{V}_{bo} = 263$ kips, $\mathcal{M}_{bo} = 11.15 \times 10^4$ kip-pie

(b) $u_o(L) = 3.79$ pulg

8.10 $u_{1o} = 0.519$, $u_{2o} = 0.830$, $u_{3o} = 0.934$ pulg; $V_{3o} = 41.2$, $V_{2o} = 114.4$, $V_{bo} = 160.2$ kips; $M_{2o} = 494$, $M_{1o} = 1867$, $M_{bo} = 3789$ kip-pie

8.12 $u_{1o} = 0.312$, $u_{2o} = 0.624$, $u_{3o} = 0.935$ pulg; $V_{3o} = 48.2$, $V_{2o} = 112.4$, $V_{1o} = 144.5$ kips; M_{2o} 578, $M_{1o} = 1927$, M_{bo} 3661 kip-pie

8.15 Desplazamientos de piso (pulg) = 1.34, 2.39, 3.39, 3.98, 4.28
Cortantes por nivel (kips): 38.5, 110, 171, 214, 238
Momentos de volteo en los pisos (kip-pie): 462, 1782, 3833, 6399, 9255.

8.17 $\omega_n = 0.726\sqrt{EI/mL^3}$

8.18 **(b)** $\omega_1 = \sqrt{2.536k/m}$, $\psi_1 = \langle 1 \quad 0.366 \rangle^T$; $\omega_2 = \sqrt{9.464k/m}$, $\psi_2 = \langle 1 \quad -1.366 \rangle^T$

8.19 $\omega_n^2 = \dfrac{\pi^4 EI/32L^3}{\sqrt{m\left[1 + (\pi^2/16)(R/L)^2\right]}}$ si $\psi(x) = 1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L}$

8.20 $\omega_n = \dfrac{1.657}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$

8.21 $\omega_n = 20.612$ rad/s

8.24 $\omega_n = 20.628$ rad/s

8.25
$$u(L/2,\ t) = \frac{2p_o}{\pi m}\frac{1}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\cos\frac{\pi v}{L}t + \frac{(\pi v/L)^2}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\cos\omega_n t\right]$$

$$t \le L/v$$

$$u(L/2,\ t) = \frac{2p_o}{\pi m}\frac{1}{\omega_n^2}\left\{2 - \left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\right]\cos\omega_n(t - t_d) + \frac{(\pi v/L)^2}{\omega_n^2 - (\pi v/L)^2}\cos\omega_n t\right\} \qquad t \ge L/v$$

Capítulo 9

9.2 $$\frac{mL}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{162EI}{5L^3}\begin{bmatrix}8 & -7\\-7 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\end{Bmatrix}$$

9.4 $$\mathbf{m}=\frac{m}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}28 & -10\\-10 & 4\end{bmatrix}$$

9.6 $$m\begin{bmatrix}1 & \\ & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix}37.15 & -15.12\\-15.12 & 10.19\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\end{Bmatrix}$$

9.9 $$m\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\ddot{u}_3\end{Bmatrix}+\frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix}40.85 & -23.26 & 5.11\\-23.26 & 31.09 & -14.25\\5.11 & -14.25 & 10.06\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\\p_3(t)\end{Bmatrix}$$

9.11 $$m\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\ddot{u}_3\end{Bmatrix}+\frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix}33.36 & -14.91 & 1.94\\ & 15.96 & -5.49\\(\text{sim}) & & 3.92\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\\p_3(t)\end{Bmatrix}$$

9.13 $\mathbf{u}=\langle u_1 \quad u_2 \quad u_3\rangle$, donde u_1 es el desplazamiento horizontal de las masas y u_2 y u_3 son los desplazamientos verticales de las masas derecha e izquierda, respectivamente.

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$$

$$\mathbf{m}=m\begin{bmatrix}5 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=\frac{3EI}{10L^3}\begin{bmatrix}28 & 6 & -6\\6 & 7 & 3\\-6 & 3 & 7\end{bmatrix},\ \mathbf{p}_{\text{ef}}(t)=-\mathbf{m}\iota\,\ddot{u}_g(t)$$

$$\iota^T=\begin{cases}\langle 1 \quad 0 \quad 0\rangle & \text{para } \ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{gx}(t)\\ \langle 0 \quad 1 \quad 1\rangle & \text{para } \ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{gy}(t)\\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle & \text{para } \ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{gbd}(t)\\ \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle & \text{para } \ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{gbc}(t)\\ \langle -L \quad L \quad -L\rangle & \text{para } \ddot{u}_g(t)=\ddot{u}_{g\theta}(t)\end{cases}$$

9.15 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$

$$\mathbf{m}=m\begin{bmatrix}2/3 & -1/6 & 1/2\\-1/6 & 2/3 & -1/2\\1/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=k\begin{bmatrix}5 & -2 & 2\\-2 & 5 & -2\\2 & -2 & 6\end{bmatrix},\ \mathbf{p}_{\text{ef}}(t)=-\mathbf{m}\iota\,\ddot{u}_g(t)$$

$$[\mathbf{m}\iota]^T=\begin{cases}m\langle 1/2 \quad 1/2 \quad 0\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } x\\ m\langle 1/2 \quad -1/2 \quad 1\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } x\\ m\langle 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1/\sqrt{2}\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } d\text{-}b\end{cases}$$

9.16 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}_{\text{ef}}(t)$

$$\mathbf{m}=m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & b/2\\0 & b/2 & 5b^2/12\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=k\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 6 & 2b\\0 & 2b & 7b^2/2\end{bmatrix},\ \mathbf{p}_{\text{ef}}(t)=-\mathbf{m}\iota\,\ddot{u}_g(t)$$

$$[\mathbf{m}\iota]^T=\begin{cases}m\langle 1 \quad 0 \quad 0\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } x\\ m\langle 0 \quad 1 \quad b/2\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } x\\ m\langle 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad b/2\sqrt{2}\rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } d\text{-}b\end{cases}$$

9.18 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{u}_g(t)$

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 0.9283 & 0.9088 & 0.2345 \\ & 1.4294 & 0.2985 \\ \text{symm} & & 0.3234 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\iota}^T = \begin{cases} \langle 1 \quad 0 \quad 0 \rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } x \\ \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } y \\ \langle 0 \quad 0 \quad 1 \rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } z \\ (1/\sqrt{3})\langle 1 \quad 1 \quad 1 \rangle & \text{para el movimiento del terreno en la dirección } a\text{–}d \end{cases}$$

9.20 $m\ddot{u} + \dfrac{6EI}{L^3}u = -m\,\langle 1/2 \quad 1/2 \rangle \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{g1}(t) \\ \ddot{u}_{g2}(t) \end{Bmatrix}$

9.21 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_g = \begin{Bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 176 & -48 \\ -48 & 176 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\iota} = \frac{1}{448}\begin{bmatrix} 266 & 182 \\ 42 & -42 \end{bmatrix}$$

9.22 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_g = \begin{Bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 140 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\iota} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0.5 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}$$

9.23 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$

$$\mathbf{u}^T = \langle u_x \quad u_y \quad u_\theta \rangle \qquad \mathbf{u}_g^T = \langle u_{ga} \quad u_{gb} \quad u_{gc} \quad u_{gd} \rangle^T$$

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & b^2/6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\iota} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & -1/b & 1/b & 1/b \end{bmatrix}$$

9.25 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\iota}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_g = \begin{Bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3.624 & \\ & 1.812 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = 10^4\begin{bmatrix} 0.9359 & 0.7701 \\ 0.7701 & 1.5088 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\iota} = \begin{bmatrix} 0.6035 & 0.3965 \\ -0.2143 & 1.2143 \end{bmatrix}$$

Capítulo 10

10.3 **(a)** $u_1(t) = 0.5\cos\omega_1 t + 0.5\cos\omega_2 t$; $u_2(t) = 0.5\cos\omega_1 t - 0.5\cos\omega_2 t$

10.6 **(a)** $\omega_1 = 3.750\sqrt{EI/mh^3}$, $\omega_2 = 9.052\sqrt{EI/mh^3}$,
$\phi_1 = \langle 1 \quad \sqrt{2} \rangle^T$, $\phi_2 = \langle 1 \quad -\sqrt{2} \rangle^T$

10.7 $\omega_1 = 1.971\sqrt{EI/mh^3}$, $\omega_2 = 8.609\sqrt{EI/mh^3}$, $\phi_1 = \langle 0.919 \quad 1\rangle^T$, $\phi_2 = \langle -0.544 \quad 1\rangle^T$

10.8 **(a)** $u_1(t) = 1.207\cos\omega_1 t - 0.207\cos\omega_2 t$, $u_2(t) = 1.707\cos\omega_1 t + 0.293\cos\omega_2 t$

10.10 $\omega_1 = 2.407\sqrt{EI/mh^3}$, $\omega_2 = 7.193\sqrt{EI/mh^3}$
$\phi_1 = \langle 0.482 \quad 1 \quad -0.490/h \quad -0.490/h \quad -0.304/h \quad -0.304/h\rangle^T$
$\phi_2 = \langle -1.037 \quad 1 \quad -0.241/h \quad -0.241/h \quad -1.677/h \quad -1.677/h\rangle^T$

10.12 $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mh^3}$, $\alpha_1 = 2.241$, $\alpha_2 = 4.899$, $\alpha_3 = 7.14$; $\phi_1 = \langle 0.314 \quad 0.686 \quad 1\rangle^T$, $\phi_2 = \langle -0.5 \quad -0.5 \quad 1\rangle^T$, $\phi_3 = \langle 3.186 \quad -2.186 \quad 1\rangle^T$

10.14 $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mh^3}$, $\alpha_1 = 1.423$, $\alpha_2 = 4.257$, $\alpha_3 = 6.469$; $\phi_1 = \langle 0.7 \quad 0.873 \quad 1\rangle^T$, $\phi_2 = \langle -0.549 \quad -0.133 \quad 1\rangle^T$, $\phi_3 = \langle 1.301 \quad -1.614 \quad 1\rangle^T$

10.15 **(a)**
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2440 \\ 2.1547 \\ 2.4880 \end{Bmatrix}\cos\omega_1 t + \begin{Bmatrix} -0.3333 \\ 0 \\ 0.3333 \end{Bmatrix}\cos\omega_2 t + \begin{Bmatrix} 0.0893 \\ -0.1547 \\ 0.1786 \end{Bmatrix}\cos\omega_3 t$$

10.16 **(a)**
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.935 \\ 2.04 \\ 2.98 \end{Bmatrix}\cos\omega_1 t + \begin{Bmatrix} 0.065 \\ -0.0448 \\ 0.0205 \end{Bmatrix}\cos\omega_3 t$$

10.23 **(a)** $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mL^3}$; $\alpha_n = 0.5259,\ 1.6135,\ 1.7321,$
$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.9492 \\ 1.9492 \end{Bmatrix},\ \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.2826 \\ -1.2826 \end{Bmatrix},\ \phi_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(b)
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3969 \\ -0.7736 \\ 0.7736 \end{Bmatrix}\cos\omega_1 t + \begin{Bmatrix} 0.6031 \\ 0.7736 \\ -0.7736 \end{Bmatrix}\cos\omega_2 t$$

10.24 $\omega_n = 5.96,\ 6.21,\ 10.90$ rad/s
$\phi_1 = \langle 0 \quad 2.0322 \quad 0.0033\rangle^T$, $\phi_2 = \langle 2.071 \quad 0 \quad 0\rangle^T$,
$\phi_3 = \langle 0 \quad -0.3988 \quad 0.0166\rangle^T$

10.28 **(a)** $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mL^3}$, $\alpha_1 = 0.4834$, $\alpha_2 = 0.4990$, $\alpha_3 = 1.4827$

10.29–10.32 Compare contra los resultados exactos.

Capítulo 11

11.1
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.824 & -0.257 & 0 \\ \text{(sym)} & 0.604 & -0.110 \\ & & 0.229 \end{bmatrix},\ \zeta_2 = 0.0430$$

11.2, 11.4
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.848 & -0.234 & -0.023 \\ \text{(sym)} & 0.628 & -0.133 \\ & & 0.252 \end{bmatrix}$$

Capítulo 12

12.1 $u_1(t) = (p_o/k)(1.207\mathcal{C}_1 - 0.207\mathcal{C}_2)\,\text{sen}\,\omega t$,
$u_2(t) = (p_o/k)(1.707\mathcal{C}_1 + 0.293\mathcal{C}_2)\,\text{sen}\,\omega t$, donde $\mathcal{C}_n = \left[1 - (\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$

12.4 $u_1(t) = \dfrac{p_o}{2m}\left(\dfrac{\text{sen}\omega_1 t}{\omega_1} + \dfrac{\text{sen}\omega_2 t}{\omega_2}\right)$, $u_2(t) = \dfrac{0.707 p_o}{m}\left(\dfrac{\text{sen}\omega_1 t}{\omega_1} - \dfrac{\text{sen}\omega_2 t}{\omega_2}\right)$

12.5 **(a)** $u_1(t) = \dfrac{p_o}{k}(1 - 0.853\cos\omega_1 t - 0.147\cos\omega_2 t)$, $u_2(t) =$
$\dfrac{p_o}{k}(1 - 1.207\cos\omega_1 t + 0.207\cos\omega_2 t)$

12.9 $u_{3o} = \omega^2 p_o\sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{C}_1}{K_1} + \dfrac{\mathcal{C}_2}{K_2} + \dfrac{\mathcal{C}_3}{K_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathcal{D}_1}{K_1} + \dfrac{\mathcal{D}_2}{K_2} + \dfrac{\mathcal{D}_3}{K_3}\right)^2}$, $\ddot{u}_{3o} = \omega^2 u_{3o}$,
donde $p_o = 1.242$ lb; $K_1 = 131.16$, $K_2 = 978.97$, y
$K_3 = 1826.80$ kips/pulg; y $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{D}_n$ son tal como se definieron en el ejemplo 12.5.

12.16
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} 1.736(1-\cos 10t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}(-0.116)(1-\cos 38.73t);\ t \le 0.3\text{ s}$$
$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}[3.455\cos 10(t-0.3) + 0.245\,\text{sen}\,10\,(t-0.3)]$$
$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}[-0.0483\cos 38.73(t-0.3) + 0.09419\,\text{sen}\,38.73(t-0.3)]\,;\ t \ge 0.3\text{ s}$$

12.18 Valores combinados de las fuerzas cortantes (en kips) y los momentos flexionantes (en kip-pulg):

$$V_a = V_b = 52.08; \quad V_c = V_d = -58.16; \quad V_e = V_f = 6.12$$
$$M_a = 0; \quad M_b = M_c = -2604; \quad M_d = M_e = 306; \quad M_f = 0$$

12.19 $\mathbf{u}_o = \begin{Bmatrix} 0.133 \\ 0.529 \end{Bmatrix}$ pulg, $\ddot{\mathbf{u}}_o = \begin{Bmatrix} 83.125 \\ 330.63 \end{Bmatrix}$ pulg/s^2

12.20 $M_{bo} = 948.8$ kip-pulg, $M_{do} = -1902$ kip-pulg

12.24 **(a)** $M(t) = \sum M^{\text{st}}\bar{M}_n\left[\omega_n^2 D_n(t)\right]$, donde

$$D_n(t) = \frac{p_o}{\omega_n^2}\frac{1}{1-(T_n/2t_d)^2}\left[\text{sen}\left(\pi\frac{t}{t_d}\right) - \frac{T_n}{2t_d}\,\text{sen}\left(2\pi\frac{t}{T_n}\right)\right]; \quad t \le t_d$$
$$D_n(t) = D_n(t_d)\cos\omega_n(t-t_d) + \frac{\dot{D}_n(t_d)}{\omega_n}\,\text{sen}\,\omega_n(t-t_d); \quad t \ge t_d$$
$$M^{\text{st}} = -0.3125L; \quad \bar{M}_1 = 0.3414, \quad \bar{M}_2 = 0.6000, \quad \bar{M}_3 = 0.0586$$

(b) $M(t) = M^{\text{st}}\left\{p(t) + \bar{M}_1\left[\omega_1^2 D_1(t) - p(t)\right]\right\}$

Capítulo 13

13.1 **(a)** $\mathbf{s}_1 = m\langle 0.854 \quad 0.604\rangle^T$, $\mathbf{s}_2 = m\langle 0.146 \quad -0.104\rangle^T$
(b) $u_1(t) = 0.854D_1(t) + 0.146D_2(t)$, $u_2(t) = 1.207D_1(t) - 0.207D_2(t)$
(c) $V_1(t) = 1.458mA_1(t) + 0.042mA_2(t)$, $V_2(t) = 0.604mA_1(t) - 0.104mA_2(t)$
(d) $M_b(t) = 2.062mhA_1(t) - 0.062mhA_2(t)$, $M_1(t) = 0.604mhA_1(t) - 0.104mhA_2(t)$

13.2 **(c)** Valores máximos de las respuestas totales: $u_1 = 0.679$ pulg, $u_2 = 0.964$ pulg, $V_b = 115.11$ kips, $V_2 = 49.56$ kips, $M_b = 1959.25$ kip-pie, $M_2 = 594.65$ kip-pie

13.4 **(a)** Desplazamientos totales: $u_1(t) = 0.647D_1(t) + 0.353D_2(t)$, $u_2 = 1.341D_1(t) - 0.341D_2(t)$
Rotaciones de los nudos en el primer y segundo pisos: $u_3(t) = (1/h)[-0.657D_1(t) + 0.082D_2(t)]$, $u_5(t) = (1/h)[-0.407D_1(t) + 0.572D_2(t)]$
(b) Momentos flexionantes en la columna del primer piso:
Parte superior: $M_a = mh\,[0.216A_1(t) + 0.0473A_2(t)]$
Parte inferior: $M_b = mh\,[0.443A_1(t) + 0.0441A_2(t)]$
Momento flexionante en los extremos de la viga del segundo piso:
$M_a = M_b = mh[-0.211A_1(t) + 0.0332A_2(t)]$

13.5 **(a)** $\mathbf{s}_1 = m\langle 0.622 \quad 1.077 \quad 0.622\rangle^T$, $\mathbf{s}_2 = m\langle 0.333 \quad 0 \quad -0.167\rangle^T$, $\mathbf{s}_3 = m\langle 0.045 \quad -0.077 \quad 0.045\rangle^T$
(b) $u_1(t) = 0.622D_1(t) + 0.333D_2(t) + 0.045D_3(t)$,
$u_2(t) = 1.077D_1(t) - 0.077D_3(t)$,
$u_3(t) = 1.244D_1(t) - 0.333D_2(t) + 0.089D_3(t)$
(c) $V_1(t) = 2.321mA_1(t) + 0.167mA_2(t) + 0.012mA_3(t)$,
$V_2(t) = 1.699mA_1(t) - 0.167mA_2(t) - 0.0326mA_3(t)$,
$V_3(t) = 0.622mA_1(t) - 0.167mA_2(t) + 0.045mA_3(t)$
(d) $M_b(t) = mh\,[4.642A_1(t) - 0.167A_2(t) + 0.024A_3(t)]$

13.7 Valores máximos de las respuestas totales: $u_1 = 0.580$ pulg, $u_2 = 0.957$ pulg, $u_3 = 1.103$ pulg, $V_b = 189.3$ kips, $V_2 = 138.1$ kips, $V_3 = 52.2$ kips, $M_b = 4321$ kip-pie, $M_2 = 2268$ kip-pie, $M_1 = 627$ kip-pie

13.9 $M_1^* = 2.3213m$, $M_2^* = 0.1667m$, $M_3^* = 0.0121m$
$h_1^* = 2h$, $h_2^* = -h$, $h_3^* = 2h$

13.11 **(a)** Desplazamientos de piso: $u_1(t) = 0.427D_1(t) + 0.377D_2(t) + 0.197D_3(t)$,
$u_2(t) = 1.007D_1(t) + 0.182D_2(t) - 0.189D_3(t)$,
$u_3(t) = 1.352D_1(t) - 0.508D_2(t) + 0.157D_3(t)$
(b) Momentos flexionantes en la columna del primer piso:
$M_{\text{superior}} = mh\,[0.301A_1(t) + 0.068A_2(t) + 0.023A_3(t)]$,
$M_{\text{base}} = mh\,[0.753A_1(t) + 0.084A_2(t) + 0.020A_3(t)]$
Momentos flexionantes en los extremos de las vigas del segundo piso:
$M_a = M_b = mh\,[-0.541A_1(t) + 0.057A_2(t) + 0.003A_3(t)]$

13.15 **(a)** $\mathbf{s}_1 = m\langle 0.849 \quad 0.594\rangle^T$, $\mathbf{s}_2 = m\langle -0.849 \quad 0.406\rangle^T$

(b) $u_1(t) = 0.283D_1(t) - 0.283D_2(t)$, $u_2(t) = 0.594D_1(t) + 0.406D_2(t)$
(c) $M_b(t) = 1.443mLA_1(t) - 0.443mLA_2(t)$

13.17 **(a)** $\mathbf{s}_1 = m\,\langle 1.985 \quad -0.774 \quad 0.774\rangle^T$, $\mathbf{s}_2 = m\,\langle 3.015 \quad 0.774 \quad -0.774\rangle^T$, $\mathbf{s}_3 = \langle 0 \quad 0 \quad 0\rangle^T$
(b) $u_1(t) = 0.397D_1(t) + 0.603D_2(t)$, $u_2(t) = -0.774D_1(t) + 0.774D_2(t)$, $u_3(t) = 0.774D_1(t) - 0.774D_2(t)$
(c) $M_b(t) = 3.533mLA_1(t) + 1.467mLA_2(t)$, $M_a(t) = -0.774mLA_1(t) + 0.774mLA_2(t)$

13.23 **(c)** Respuestas máximas: $u_{3o} = 44.58$ pulg, $V_{ao} = 0.879$ kip, $V_{bo} = 159.83$ kips
(d) Coeficientes sísmicos: 4.69 y 0.426 para el apéndice y la torre, respectivamente.

13.25 **(a)** $\mathbf{s}_1 = \langle 0 \quad 0.1588 \quad 3.816\rangle^T$, $\mathbf{s}_2 = \langle 0.1649 \quad 0 \quad 0\rangle^T$, $\mathbf{s}_3 = \langle 0 \quad 0.0061 \quad -3.816\rangle^T$
(c) $u_x(t) = 0.7071D_2(t)$, $u_y(t) = 0.6809D_1(t) + 0.0262D_3(t)$, $u_\theta(t) = 0.0011D_1(t) - 0.0011D_3(t)$
(d) $V_{bx}(t) = 0.1649A_2(t)$, $V_{by}(t) = 0.1588A_1(t) + 0.0061A_3(t)$, $T_b(t) = 3.816A_1(t) - 3.816A_3(t)$

13.26 **(c)** Respuestas pico: $u_{yo} = 4.182$ pulg, $(b/2)u_{\theta o} = 1.22$ pulg, $V_{bo} = 35.6$ kips, $T_{bo} = 1899$ kip-pulg

13.27 **(a)**
$$\mathbf{s}_1 = m\,\langle 0.603 \quad -0.382 \quad -0.305\rangle^T,$$
$$\mathbf{s}_2 = m\,\langle 0.043 \quad -0.081 \quad 0.187\rangle^T,$$
$$\mathbf{s}_3 = m\,\langle 0.353 \quad 0.463 \quad 0.118\rangle^T$$
(b)
$$u_x(t) = 0.603D_1(t) + 0.043D_2(t) + 0.353D_3(t),$$
$$u_y(t) = -0.382D_1(t) - 0.081D_2(t) + 0.463D_3(t),$$
$$u_z(t) = -0.305D_1(t) + 0.187D_2(t) + 0.118D_3(t)$$
(c)
$$M_x(t) = mL\,[-0.077A_1(t) - 0.268A_2(t) + 0.345A_3(t)],$$
$$M_y(t) = mL\,[-0.908A_1(t) + 0.144A_2(t) - 0.235A_3(t)],$$
$$T(t) = mL\,[0.986A_1(t) + 0.124A_2(t) - 0.110A_3(t)]$$

13.32 (i) $u(t) = 0.8889u_{go}\,\text{sen}\,6.667t$, $u^t(t) = 1.3889u_{go}\,\text{sen}\,6.667t$, $M = -(3EI/L^2)u(t)$; (ii) $u(t) = 1.7778u_{go}\,\text{sen}\,6.667t$, $u^t(t) = 2.7778u_{go}\,\text{sen}\,6.667t$, $M = -(3EI/L^2)u(t)$

13.34 **(a)**
$$\begin{aligned} u_1^t(t) &= 0.5u_g(t) + 0.5u_g(t-t') + 0.5D_1(t) \\ &\quad + 0.5D_1(t-t') + 0D_2(t) + 0D_2(t-t') \\ u_2^t(t) &= 0.3u_g(t) - 0.3u_g(t-t') + 0D_1(t) \\ &\quad + 0D_1(t-t') + 0.30D_2(t) - 0.30D_2(t-t') \\ M_a(t) &= (EI/L^2)\left[-7.2u_g(t) + 7.2u_g(t-t')\right] \\ &\quad + mL\left[0.0781A_1(t) + 0.0781A_1(t-t')\right. \\ &\quad \left. + 0.0075A_2(t) - 0.0075A_2(t-t')\right];\ \text{etc.} \end{aligned}$$

13.36 **(a)** $u_y^t(t) = -0.088u_g(t) + 0.088u_g(t-t') - 0.126D_1(t) + 0.126D_1(t-t') + 0D_2(t) + 0D_2(t-t') + 0.038D_3(t) - 0.038D_3(t-t')$; etc.

$V_{ax} = -0.69u_g(t) + 0.69u_g(t-t') + 0.0025A_1(t) + 0.0389A_2(t) + 0.0057A_3(t) - 0.0025A_1(t-t') + 0.0389A_2(t-t') - 0.0057A_3(t-t')$;

$V_{ay} = 0.5454u_g(t) - 0.5454u_g(t-t') - 0.0081A_1(t) + 0.0066A_3(t) + 0.0081A_1(t-t') - 0.0066A_3(t-t')$; etc.

13.38 **(a)** $u_2^t(t) = -0.2143u_g(t) + 1.2143u_g(t-t') - 0.3416D_1(t) - 0.0150D_1(t-t') + 0.1273D_2(t) + 1.2294D_2(t-t')$

(b) $u_2^t(t) = u_g(t) - 0.3567D_1(t) + 1.3566D_2(t)$

13.39 **(a)** $u_1 = 1.43$ pulg, $u_2 = 2.96$ pulg

(b) Columna del primer piso: $M_{\text{superior}} = 240$, $M_{\text{base}} = 483$ kip-pie
Viga del segundo piso: $M_{\text{izquierda}} = M_{\text{derecha}} = 232$ kip-pie

13.40 $u_1 = 0.680$ pulg, $u_2 = 0.962$ pulg
$V_b = 115.22$ kips, $V_2 = 48.24$ kips,
$M_b = 1955.43$ kip-pie, $M_1 = 578.87$ kip-pie

13.41 **(a)** $u_1 = 1.340$ pulg, $u_2 = 3.152$ pulg, $u_3 = 4.233$ pulg

(b) Columna del primer piso: $M_{\text{superior}} = 336$, $M_{\text{base}} = 821$ kip-pie
Viga del segundo piso: $M_{\text{izquierda}} = M_{\text{derecha}} = 590$ kip-pie

13.47 $u_1 = 1.207$ pulg, $u_2 = 2.484$ pulg, $M_b = 188.2$ kip-pulg

13.50 **(a)** $u_1 = 1.57$ pulg, $u_2 = 3.01$ pulg, $u_3 = 3.01$ pulg

(b) $M_b = 21.25$ kip-pie, $M_a = 7.38$ kip-pie

13.54

	u_3 (pulg)	V_a (kips)	V_b (kips)
RCSC	165.0	3.158	144.3
CCC	77.27	1.465	182.3

13.58

	u_x (pulg)	u_y (pulg)	$(b/2)u_\theta$ (pulg)	V_x (kips)	V_y (kips)	T (kip-pulg)
CCC	6.286	6.309	1.662	56.6	52.4	2331.4
RCSC	6.286	6.306	1.678	56.6	52.3	2357.8

Momentos flexionantes (kip-pulg):

	M_{ay}	M_{ax}	M_{by}	M_{bx}	M_{cy}	M_{cx}	M_{dy}	M_{dx}
CCC	1108	1055	554.0	845.5	824.2	845.5	1648	1055
RCSC	1405	1050	702.7	847.1	702.7	847.1	1405	1050

13.59

Desplazamiento	Regla RCSC (pulg)	Regla CCC (pulg)
u_x	0.724	0.767
u_y	0.470	0.544
u_z	0.421	0.195

Respuesta	Regla RCSC (kip-pulg)	Regla CCC (kip-pulg)
M_x	8.66	9.42
M_y	18.52	15.92
T	19.50	21.55

13.63 $M_\alpha = 11.21$ kip-pulg (regla RCSC) y 13.52 kip-pulg (regla CCC).

13.67 **(a)** $M_\alpha = (A\,\mathrm{sen}^2\,\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)^{1/2}$
donde $A = 343.1$, $B = -37.70$, $C = 75.00$, todo en kip-pulg (regla RCSC);
$A = 253.6$, $B = 122.3$, $C = 88.75$ (regla CCC)

(b) Valor máximo de $M_\alpha = 18.56$ kip-pulg para llegar a $\alpha = 86.0^{\mathrm{o}}$ (regla RCSC);
$M_\alpha = 16.55$ kip-pulg en $\alpha = 71.7^{\mathrm{o}}$ (regla CCC).

Capítulo 14

14.2 $\omega_1 = 0.7709\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\qquad$ $\omega_2 = 1.8346\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\psi_1 = \begin{Bmatrix} 0.7132 - 0.0775\,i \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \qquad \psi_2 = \begin{Bmatrix} -0.6732 - 0.1806\,i \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$$

$\zeta_1 = 0.1316$ $\qquad$ $\zeta_2 = 0.0537$

14.4
$$\mathbf{u}(t) = e^{-0.1316\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.1324 \\ -0.2294 \end{Bmatrix}\cos\omega_{1D}t - \begin{Bmatrix} 0.3046 \\ 0.4022 \end{Bmatrix}\mathrm{sen}\,\omega_{1D}t\right]$$
$$+\, e^{-0.0537\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.8676 \\ 1.2294 \end{Bmatrix}\cos\omega_{2D}t + \begin{Bmatrix} 0.0731 \\ 0.2212 \end{Bmatrix}\mathrm{sen}\,\omega_{2D}t\right]$$

14.6
$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0.8681 \\ 1.2287 \end{Bmatrix} h_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.0714 \\ 0.0736 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.1315 \\ -0.2283 \end{Bmatrix} h_2(t)$$
$$+ \begin{Bmatrix} 0.0714 \\ -0.0736 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{h}_2(t)$$

Donde $h_n(t)$ y $\dot{h}_n(t)$ están dadas por las ecuaciones (14.8.4) y (14.8.5).

14.8
$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0.8681 \\ 1.2287 \end{Bmatrix} D_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.0714 \\ 0.0736 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.1315 \\ -0.2283 \end{Bmatrix} D_2(t)$$
$$+ \begin{Bmatrix} 0.0714 \\ -0.0736 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_2(t)$$

14.9 $\omega_1 = 0.7743\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_2 = 1.8265\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\zeta_1 = 0.2553$ $\zeta_2 = 1.0415$

$\psi_1 = \begin{Bmatrix} 0.7611 + 0.0873\,i \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$ $\psi_2 = \begin{Bmatrix} -0.4568 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$ $\psi_3 = \begin{Bmatrix} -0.5421 \\ 1.0000 \end{Bmatrix}$

14.10 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)$

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{-0.2553\,\omega_1 t}\left[\begin{Bmatrix} 1.1901 \\ 1.4919 \end{Bmatrix} \cos\omega_{1D}t + \begin{Bmatrix} 0.3454 \\ 0.6250 \end{Bmatrix} \operatorname{sen}\omega_{1D}t\right]$$

$$\mathbf{u}_2(t) = e^{-1.0415\,\omega_2 t}\left[\begin{Bmatrix} -0.1901 \\ 0.5081 \end{Bmatrix} \cosh\omega_{2D}t - \begin{Bmatrix} 0.7240 \\ -1.4928 \end{Bmatrix} \operatorname{senh}\omega_{2D}t\right]$$

14.12 $$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0.9178 \\ 1.1607 \end{Bmatrix} D_1(t) + \begin{Bmatrix} 0.0544 \\ -0.1097 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_1(t) + \begin{Bmatrix} -0.1034 \\ 0.2133 \end{Bmatrix} D_2(t)$$

$$+ \begin{Bmatrix} -0.0544 \\ 0.1097 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{D}_2(t)$$

Donde $D_n(t)$ y $\dot{D}_n(t)$ se definen en las ecuaciones (14.9.3) y (14.9.4).

Capítulo 15

15.3 $\tilde{\omega}_1 = 8.389,\ \tilde{\omega}_2 = 23.59$ rad/sec

$\tilde{\phi}_1 = \langle 0.2319 \quad 0.4639 \quad 0.6311 \quad 0.7983 \quad 0.9332\rangle^T$

$\tilde{\phi}_2 = \langle -0.4366 \quad -0.8732 \quad -0.3396 \quad 0.1940 \quad 1.2126\rangle^T$

15.4 $\tilde{\omega}_1 = 8.263,\ \tilde{\omega}_2 = 23.428$ rad/sec

$\tilde{\phi}_1 = \langle 0.2319 \quad 0.4449 \quad 0.6753 \quad 0.8249 \quad 0.9038\rangle^T$

$\tilde{\phi}_2 = \langle -0.4366 \quad -0.4200 \quad -0.1042 \quad 0.2095 \quad 0.4108\rangle^T$

15.9 Valores máximos de los desplazamientos usando:
Dos vectores Ritz: 0.0548, 0.213, 0.460, 0.648, 0.757 pulg.
Dos modos: 0.0823, 0.205, 0.430, 0.646, 0.799 pulg.
Cinco modos: 0.0599, 0.202, 0.447, 0.6513, 0.778 pulg.

Capítulo 16

16.1–16.4 Compare los resultados numéricos contra la solución teórica.

16.5 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.1.

16.6 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.1 y la solución teórica.

16.7 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.2.

16.8 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.2.

16.10 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.3.

16.11 Compare los resultados numéricos contra la tabla E16.4.

Capítulo 17

17.2 $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mL^4}$; $\alpha_1 = 15.42$, $\alpha_2 = 49.97$ y $\alpha_3 = 104.2$

17.4 $u\left(\frac{L}{2}, t\right) = -\frac{2WL^3}{\pi^4 EI}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\cos\omega_3 t}{81} + \frac{\cos\omega_5 t}{625} + \frac{\cos\omega_7 t}{2401} + \cdots\right)$

17.6 $u\left(\frac{L}{4}, t\right) = \frac{8pL^4}{\pi^5 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_2 t}{32} - \frac{1-\cos\omega_6 t}{7776} + \frac{1-\cos\omega_{10} t}{100{,}000} - \cdots\right)$

17.7 $u(L/2, t) = q_1(t) - q_3(t) + q_5(t) - q_7(t) - q_9(t) - \cdots$

donde $q_n(t)$ está dada por (válido si $\omega_n \neq n\pi v/L$)

$$q_n(t) = \frac{2p_o}{n\pi m}\frac{1}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (n\pi v/L)^2}\cos\frac{n\pi v}{L}t + \frac{(n\pi v/L)^2}{\omega_n^2 - (n\pi v/L)^2}\cos\omega_n t\right]$$

$$t \leq L/\mathrm{v}$$

$$q_n(t) = \frac{2p_o}{n\pi m}\frac{1}{\omega_n^2}\left\{2 - \left[1 + \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (n\pi v/L)^2}(-1)^n\right]\cos\omega_n(t - t_d) + \frac{(n\pi v/L)^2}{\omega_n^2 - (n\pi v/L)^2}\cos\omega_n t\right\} \qquad t \geq L/v$$

17.11 $u_o(L) = 7.410$ pulg, $\mathcal{V}_{bo} = 1365$ kips, $\mathcal{M}_{bo} = 186{,}503$ kip-pie

Capítulo 18

18.2 $\tilde{\omega}_1 = \frac{11.765}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m_o}}$, $\tilde{\omega}_2 = \frac{130.467}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m_o}}$

$\tilde{\phi}_1(x) = 1.0\,\mathrm{sen}(\pi x/L) - 0.0036\,\mathrm{sen}(3\pi x/L)$

$\tilde{\phi}_2(x) = 0.2790\,\mathrm{sen}(\pi x/L) + 0.9603\,\mathrm{sen}(3\pi x/L)$

18.3 **(a)** $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mL^4}$; $\alpha_1 = 9.9086$, $\alpha_2 = 43.818$, $\alpha_3 = 110.14$, $\alpha_4 = 200.80$

(b) $\omega_1 = 9.798\sqrt{EI/mL^4}$

18.5 **(a)** $\omega_n = \alpha_n\sqrt{EI/mL^4}$; $\alpha_1 = 15.56$, $\alpha_2 = 58.41$, $\alpha_3 = 155.64$

(b) $\omega_1 = 14.81\sqrt{EI/mL^4}$

18.6 **(a)** $\omega_n = \alpha_n \sqrt{EI/mh^4}$; $\alpha_1 = 1.5354$, $\alpha_2 = 4.0365$, $\alpha_3 = 10.7471$

$\phi_1 = \langle 0.5440 \quad -0.5933/h \quad -0.5933/h \rangle^T$

$\phi_2 = \langle 0 \quad -1/\sqrt{2}h \quad 1/\sqrt{2}h \rangle^T$

$\phi_3 = \langle -0.0001 \quad 1/\sqrt{2}h \quad 1/\sqrt{2}h \rangle^T$

18.7 $\omega_1 = 1.477\sqrt{EI/mh^4}$

$\phi = \langle 0.544 \quad -0.594/h \quad -0.594/h \rangle^T$

Índice

Dinámica de estructuras

Este libro, concebido como un texto introductorio a la dinámica estructural en cursos de ingeniería civil, incluye muchos temas de aplicaciones al análisis, la respuesta, el diseño y la evaluación de estructuras.

Una característica interesante del libro es la aplicación de la teoría de la dinámica estructural a los aspectos más importantes en la respuesta sísmica y el diseño de edificios de varios niveles. La información que aquí se presenta es de gran valor para los ingenieros que participan en el diseño de estructuras sísmicas reales y que desean mejorar su comprensión del tema.

Aunque el material del libro conduce a la ingeniería sísmica, la información que se presenta también es relevante para comprender las vibraciones inducidas por el viento sobre las estructuras, así como los movimientos realizados por el hombre, como los producidos por martillos a gravedad o por el tráfico de vehículos pesados.

Este libro cubre los siguientes objetivos:

- Relacionar las ideas estructurales estudiadas con las propiedades de las estructuras reales.
- Presentar la teoría de la respuesta dinámica de las estructuras de una manera que destaque la comprensión física de los procedimientos analíticos.
- Ilustrar las aplicaciones de la teoría en la solución de problemas motivados por aplicaciones prácticas.
- Interpretar los resultados teóricos para entender la respuesta de las estructuras a diferentes excitaciones dinámicas, con énfasis en la sísmica.

Además, en el sitio web del libro encontrará capítulos adicionales en inglés y en español con temas avanzados.

Para mayor información visite la página web del libro:

www.pearsonenespañol.com/anilchopra

